F 257

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1

TOMUL 45

Ianuarie — Februarie

1986

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN,
Acad. CAIUS IACOB,
Acad. DAN MATEESCU,
Acad. RADU VOINEA
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. GHEORGHE BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Dr. ing. NICOLAE PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. RADU PRIŞCU,
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU,
Dr. ing. VIOREL VISARION,
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL,
Dr. ing. ION CRIŞAN
Prof. CRISTIAN PELECUDI,
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie.*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. DAN MATEESCU,
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU,
Dr. ing. ION CRIŞAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. TRAIAN DEMIAN,
Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute la Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ROMPRESFILATELIA — Sectorul export-import presă, P.O.Box 12 — 201, telex 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64 — 66, 78 104 Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali, difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, R — 79717, Calea Victoriei nr. 125, Bucureşti

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 45, nr. 1 ianuarie—februarie 1986

1989

SUMAR

Budapesti Műszaki Egyetem Központi Könyvtár Folyóirattár 4561/1987

STUDII

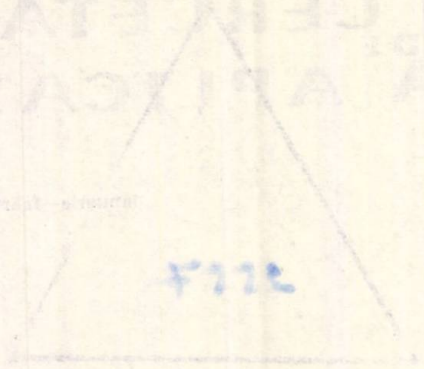
IOANA LUCA, EUGEN SOÓS, Termostatica fluidelor termoelastice. II. Potenţiali termostatici 3
DORIN BENA, Mişcări de circulaţie ale fluidelor compresibile în jurul cercului unitate. Calculul numerelor Mach critice 22
I. STROE, Influenţa distribuţiei de masă şi a armonicei gravitaţionale J_2 asupra mişcării vehiculului spaţial pe orbite ecuatoriale circulare 28
G. ONU, O soluţie consistentă pentru calculul coloanelor pasive 36
GHEORGHE ENE, POLIDOR BRATU, Determinarea traiectoriei granulei individuale pe sita cu mişcare de ruliu 46
GHEORGHE MUNTEANU, Prelucrarea datelor înregistrate în zborurile de încercare ale avionului pentru estimarea poziţiei punctului neutru 54
FL. DIMOFTE, ŞT. NEDELCU, GH. BUCŞĂ, Cercetări teoretice privind determinarea caracteristicilor funcţionale ale lagărelor aerostatice 68
LUCIAN CĂPITANU, GHEORGHE ŞERBAN, Încercarea de anduranţă a alternatoarelor şi a regulatoarelor de tensiune auto 83
A. TUDOR, A. P. ULAŞKIN, Cîteva aspecte privind influenţa capilarităţii asupra ungerii suprafeţelor plane rugoase cu viteze mici de alunecare 88

NOTE

MIRCEA V. SOARE, Asupra unei curbe funiculare în spaţiu 102

RECENZII 106

MŰSZAKI EGYETEM 1848 BUDAPESTI KÖZPONTI KÖNYVTÁR



TERMOSTATICA FLUIDELOR TERMOELASTICE. II. POTENȚIALI TERMOSTATICI*)

de IOANA LUCA
ICECHIM

EUGEN SOÓS
INCREST

Termostatica este privită ca o teorie autonomă, Se dau caracterizări echivalente ale stărilor locale de echilibru termic, utilizînd atît reprezentarea energetică, cît și pe cea entropică. Se determină proprietățile potențialilor termostatici, ce decurg din definițiile și axiomele adoptate și se dau condiții necesare și suficiente ce trebuie să fie îndeplinite pentru ca o stare locală să fie o stare de echilibru termic.

6. ENERGIA LIBERĂ SPECIFICĂ ȘI ECHILIBRUL TERMIC LOCAL

În acest paragraf vom cerceta modul în care se poate realiza caracterizarea stărilor locale de echilibru prin intermediul energiei libere specifice.

În acest scop, observăm că din corolarul 4.5 *rezultă* (vezi de exp. [24], Cap. VIII, §7) că ecuația termică de stare $(4.3)_2$ poate fi rezolvată în mod unic în raport cu η, pentru care orice v fixat :

$$\eta = \tilde{\eta}(v,\ t) \tag{6.1}$$

funcția $\tilde{\eta}(v,\ t)$ fiind *strict crescătoare* în t pentru orice v fixat și de clasa C^0 pe domeniul său de definiție $\tilde{D} \subset (0,\ \infty)\times(0,\ \infty)$. Faptul că (6.1) este obținut prin rezolvarea lui $(4.3)_2$ se exprimă prin identitatea

$$\hat{\varepsilon}_\eta(v,\ \tilde{\eta})\ v,\ t)) = t, \quad \forall (v,\ t) \text{ din } \tilde{D}. \tag{6.2}$$

Accentuăm că, pe baza ipotezelor admise, în general nu rezultă nici faptul că mulțimea $\tilde{D}$ este deschisă și/sau convexă, nici faptul că funcția $\tilde{\eta}(v,\ t)$ este de clasă C^1 pe domeniul său de definiție. Tocmai din acest motiv *presupunem* că este satisfăcută *ipoteza* (de regularitate) :

$\tilde{\mathbf{I}}$: Domeniul $\tilde{D} \subset (0,\ \infty) \times (0,\ \infty)$ introdus pe baza corolarului (4.5) este o mulțime nevidă, deschisă și convexă, iar funcția entropie specifică $\tilde{\eta}(v,\ t)$ introdusă prin relația (6.1) este de clasă C^1 pe $\tilde{D}$.

Definiția 6.1. Funcția *energie liberă specifică* $\tilde{\psi} : \tilde{D} \to R$ este definită prin relația

$$\tilde{\psi}(v,\ t) = \hat{\varepsilon}(v,\ \tilde{\eta}(v,\ t)) - t\tilde{\eta}(v,\ t), \tag{6.3}$$

*) Prima parte a lucrării, publicată în STUDII și CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ, vol. 30, nr. 6, anul 1985, conține referirile bibliografice.

unde funcţia entropie specifică $\tilde{\eta}$ este definită prin (6.1) ca soluţie unică a lui $(4.3)_2$.

Observăm că din ipoteza $\tilde{\mathbf{I}}$ urmează acum că funcţia $\tilde{\psi}$ este de clasă C^1 pe $\tilde{D}$; de aici şi din relaţia de definiţie (6.3) deducem că

$$\tilde{\psi}_t(v, t) = \hat{e}_v(v, \tilde{\eta}(v, t)) + \hat{e}_\eta(v, \tilde{\eta}(v, t))\,\tilde{\eta}_t(v, t) - t\tilde{\eta}_t(v, t).$$

De aici, pe baza lui (6.2) conchidem valabilitatea identităţii

$$\tilde{\psi}_v(v, t) = \hat{e}_v(v, \tilde{\eta}(v, t)) \text{ pe } \tilde{D}. \tag{6.4}$$

Analog, din (6.3) rezultă

$$\tilde{\psi}_t(v, t) = \hat{e}_\eta(v, \tilde{\eta}(v, t))\,\tilde{\eta}_t(v, t) - \tilde{\eta}(v, t) - t\tilde{\eta}_t(v, t),$$

de unde, făcînd din nou apel la (6.2), găsim identitatea

$$\tilde{\psi}_t(v, t) = -\tilde{\eta}(v, t) \quad \text{pe } \tilde{D}. \tag{6.5}$$

Următoarea teoremă dă o *caracterizare* a stărilor de echilibru termic cu ajutorul energiei libere specifice :

Teorema 6.1. Dacă $\tilde{\mathbf{I}}$ are loc, starea locală (v, η) este o stare de echilibru termic (în reprezentarea energetică) corespunzătoare perechii (p, t) dacă şi numai dacă p şi η sînt date de relaţiile constitutive

$$p = -\tilde{\psi}_v(v, t), \quad \eta = -\tilde{\psi}_t(v, t), \tag{6.6}$$

deci dacă şi numai dacă funcţia energie liberă specifică $\tilde{\psi}$ este un *potenţial termostatic.*

Demonstraţie. Valabilitatea afirmaţiei decurge nemijlocit din teoremele 4.2, 4.3 şi din identităţile (6.4), (6.5).

Vom stabili în continuare implicaţiile postulatului **P** asupra structurii funcţiei constitutive $\tilde{\psi}$.

În acest scop, presupunem că sînt date două volume specifice $(v, \overset{*}{v})$ şi două temperaturi absolute $(t, \overset{*}{t})$ şi punem

$$\eta = \tilde{\eta}(v, t) = -\tilde{\psi}_t(v, t), \quad \overset{*}{\eta} = \tilde{\eta}(\overset{*}{v}, \overset{*}{t}) = -\tilde{\psi}_t(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) \tag{6.7}$$

Folosind relaţia de definiţie (6.3) şi egalităţile precedente, deducem prin calcul direct următoarea *identitate* :

$$\hat{e}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{e}(v, \eta) - (\overset{*}{v} - v)\,\hat{e}_v(v, \eta) - (\overset{*}{\eta} - \eta)\,\hat{e}_\eta(v, \eta) =$$

$$= \tilde{\psi}(\overset{*}{v}, \overset{*}{t}) - \tilde{\psi}(v, t) - (\overset{*}{v} - v)\,\tilde{\psi}_v(v, t) - (\overset{*}{t} - t)\,\tilde{\psi}_t(\overset{*}{v}, \overset{*}{t}). \tag{6.8}$$

Din teorema 4.3 şi din identitatea precedentă rezultă

Teorema 6.2. Funcţia energie liberă specifică $\tilde{\psi}$ satisface inegalitatea

$$\tilde{\psi}(\overset{*}{v}, \overset{*}{t}) - \tilde{\psi}(v, t) - (\overset{*}{v} - v)\,\tilde{\psi}_v(v, t) - (\overset{*}{t} - t)\,\tilde{\psi}_t(\overset{*}{v}, \overset{*}{t}) > 0, \quad (6.9)$$

$$\forall (\overset{*}{v}, \overset{*}{t}) \neq (v, t) \text{ din } \tilde{D}.$$

Rezultatele obţinute conduc la

Teorma 6.3. Teorema 6.2 este *echivalentă* cu postulatul **P.**

Demonstraţie. Într-adevăr, din (6.9) şi (6.8) urmează că funcţia $\hat{\varepsilon}(v, \eta)$ satisface inegalitatea (4.4); astfel, echivalenţa enunţată decurge din teorema 4.4

Corolarul 6.1. Din (6.9), cu $\overset{*}{t} = t$, găsim

$$\tilde{\psi}(\overset{*}{v}, t) - \psi(v, t) - (\overset{*}{v} - v)\,\tilde{\psi}_v(v, t) > 0, \ \forall (\overset{*}{v}, t) \neq (v, t) \text{ din } \tilde{D}; \quad (6.10)$$

deci $\tilde{\psi}$ este o funcţie *strict convexă* în v, pentru orice t fixat.

Corolarul 6.2. Din (6.9), cu $\overset{*}{v} = v$, în mod analog obţinem

$$\tilde{\psi}(v, \overset{*}{t}) - \tilde{\psi}(v, t) - (\overset{*}{t} - t)\,\tilde{\psi}_t(v, t) < 0, \ \forall (v, \overset{*}{t}) \neq (v, t) \text{ din } \tilde{D}; \quad (6.11)$$

adică $\tilde{\psi}$ este o funcţie *strict concavă* în t, pentru orice v fixat.

Corolarul 6.3. Schimbînd în (6.9) rolul perechii $(v. t)$ cu cel al perechii $(\overset{*}{v}, \overset{*}{t})$ şi adunînd relaţia astfel obţinută cu (6.9) conchidem că funcţia $\tilde{\psi}$ satisface inegalitatea

$$(\overset{*}{v} - v)[\tilde{\psi}_v(\overset{*}{v}, \overset{*}{t}) - \tilde{\psi}_v(v, t)] - (\overset{*}{t} - t)[\tilde{\psi}_t(\overset{*}{v}, \overset{*}{t}) - \tilde{\psi}_v(v, t)] > 0, \quad (6.12)$$

$$\forall (\overset{*}{v}, \overset{*}{t}) \neq (v, t) \text{ din } \tilde{D}.$$

Corolarul 6.4. Din (6.12) cu $\overset{*}{t} = t$ găsim

$$(\overset{*}{v} - v)[\tilde{\psi}_v(\overset{*}{v}, \overset{*}{t}) - \tilde{\psi}_v(v, t)] > 0, \ \forall (\overset{*}{v}, t) \neq (v, t) \text{ din } \tilde{D}; \quad (6.13)$$

deci $\tilde{\psi}_v(v, t)$ este o funcţie *strict crescătoare* de v, pentru orice t fixat.

Corolarul 6.5. Din ecuaţia constitutivă $(6.6)_1$ şi din corolarul precedent rezultă că presiunea p, pentru orice valoare fixată a temperaturii absolute t, este o funcţie *strict descrescătoare* de volumul specific v, sau, echivalent, o funcţie *strict crescătoare* de densitatea de masă ρ.

Corolarul 6.6. Precedînd ca mai sus şi luînd $\overset{*}{v} = v$ în (6.12), obţinem:

$$(\overset{*}{t} - t)[\tilde{\psi}_t(v, \overset{*}{t}) - \tilde{\psi}_t(v, t)] < 0, \ \forall (v, \overset{*}{t}) \neq (v, t) \text{ din } \tilde{D}; \quad (6.14)$$

adică $\tilde{\psi}_t(v, t)$ este o funcţie *strict descreseătoare* de temperatura absolută t, pentru orice valoare fixată a volumului specific v.

Corolarul 6.7. Din ecuația constitutivă $(6.6)_1$, pe baza corolarului precedent, urmează că entropia specifică η este o funcție *strict crescătoare* de temperatura absolută t, oricare ar fi valoarea fixată a volumului specific v.

7. ENTALPIA SPECIFICĂ ȘI ECHILIBRUL TERMIC LOCAL

Rezultatele din acest paragraf sînt similare cu cele prezentate în paragraful precedent, dar au ca punct de pornire corolarul 4.3, analogul corolarului 4.5, exploatat în paragraful 6.

Într-adevăr, din corolarul 4.3 *rezultă* că ecuația termică de stare $(4.3)_1$ poate fi rezolvată în raport cu v pentru orice η fixat :

$$v = \bar{v}\,(p,\ \eta) \tag{7.1}$$

iar funcția $\bar{v}(p,\ \eta)$ este *strict descrescătoare* de p, oricare ar fi η fixat și este de clasă C^0 pe domeniul său de definiție $\bar{D} \subset (-\infty),\ \infty) \times (-\infty,\ \infty)$. Faptul că (7.1) este soluția ecuației $(4.3)_1$ se exprimă prin identitatea

$$-\hat{e}_v(\bar{v}(p,\ \eta),\ \eta) = p. \tag{7.2}$$

Deoarece nici în acest caz ipotezele admise *nu* implică nici restricții suficiente asupra naturii domeniului $\bar{D}$, nici existența și sau continuitatea derivatelor parțiale de ordinul unu ale funcției $\bar{v}(p,\ \eta)$ pe domeniul său de definiție $\bar{D}$, vom admite *ipoteza* de regularitate

$\bar{\mathbf{I}}$: Domeniul $\bar{D} \subset (-\infty,\ \infty) \times (-\infty,\ \infty)$ introdus pe baza corolarului 4.3 este o mulțime nevidă, deschisă și convexă, iar funcția volum specific $\bar{v}(p,\ \eta)$ introdusă prin relația (7.1) este de clasă C^1 pe $\bar{D}$.

Definiția 7.1. Funcția *entalpie specifică* $\bar{\chi} : \bar{D} \to R$ este definită prin relația

$$\bar{\chi}(p,\ \eta) = \hat{e}(\bar{v}(p,\ \eta)\ \eta) + p\,\bar{v}(p,\ \eta), \tag{7.3}$$

unde funcția volum specific $\bar{v}$ este definită prin (7.1), ca soluție unică a lui $(4.3)_1$.

Din ipoteza $\bar{\mathbf{I}}$ și din relația de definiție (7.3) urmează că funcția $\bar{\chi}$ este de clasă C^1 pe $\bar{D}$.

Folosind identitatea (7.2) și raționînd ca în paragraful precedent conchidem că au loc identitățile :

$$\bar{\chi}_p(p,\ \eta) = \bar{v}(p,\ \eta),\ \bar{\chi}_\eta(p,\ \eta) = \hat{e}_\eta(\bar{v}\,(p,\ \eta)\ \eta) \text{ pe } \bar{D}. \tag{7.4}$$

Identitățile precedente ne permit să stabilim *legătura* ce există între stările locale de echilibru termic și entalpia specifică ; avem

Teorema 7.1. În ipoteza $\bar{\mathbf{I}}$, pentru ca starea locală $(v,\ \eta)$ să fie o stare de echilibru termic corespunzătoare perechii presiune-temperatură $(p,\ t)$,

este necesar şi suficient să fie satisfăcute ecuaţiile constitutive

$$v = \overline{\chi}_p(p, \eta) > 0, \quad t = \overline{\chi}_\eta(p, n) > 0; \tag{7.5}$$

adică funcţia entalpia specifică $\overline{\chi}$ este un *potenţial termostatic*.

Demonstraţie. Raţionamentul este analog cu cel utilizat în cazul teoremei 6.1 şi valabilitatea criteriului formulat rezultă din teoremele 4.2, 4.3, pe baza identităţilor (7.4).

Urmînd o cale analoagă cu cea care a condus la teorema 6.2, deci folosind teorema 4.3 şi relaţia de definiţie 7.1 a funcţiei entalpie specifică $\overline{\chi}$, deducem :

Teorema 7.2. Funcţia entalpie specifică $\overline{\chi}$ satisface inegalitatea

$$\overline{\chi}(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) - \overline{\chi}(p, \eta) - (\overset{*}{p} - p)\,\overline{\chi}_p(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) - (\overset{*}{\eta} - \eta)\,\overline{\chi}_\eta(p, \eta) > 0, \tag{7.6}$$

$$\forall\,(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) \neq (p, \eta) \quad \text{din } \bar{D}.$$

Ddemonstraţie. Relaţia (7.6) se obţine pe baza identităţii

$$\hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}(v, \eta) - (\overset{*}{v} - v)\,\hat{\varepsilon}_v(v, \eta) - (\overset{*}{\eta} - \eta)\,\hat{\varepsilon}_\eta(v, \eta) =$$

$$= \overline{\chi}(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) - \overline{\chi}(p, \eta) - (\overset{*}{p} - p)\,\overline{\chi}_p(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) - (\overset{*}{\eta} - \eta)\,\overline{\chi}_\eta(p, \eta), \tag{7.7}$$

analoagă cu identitatea (6.8) stabilită pentru $\tilde{\psi}$.

Teorema 7.3. Teorema 7.2 este *echivalentă* cu postulatul **P**.

Demonstraţie. Ca în cazul teoremei 6.3, din (7.6) şi (7.7) urmează că funcţia $\hat{\varepsilon}(v, \eta)$ satisface inegalitatea (4.4) ; în consecinţă, echivalenţa afirmată decurge din teorema 4.4.

Procedînd ca în paragraful precedent obţinem următoarele corolare :

Corolarul 7.1. Funcţia $\overline{\chi}$ este *strict concavă* în p, pentru orice η fixat

$$\overline{\chi}(\overset{*}{p}, \eta) - \overline{\chi}(p, \eta) - (\overset{*}{p} - p)\,\overline{\chi}_p(p, \eta) < 0, \quad (\overset{*}{p}, \eta) \neq (p, \eta) \text{ din } \bar{D}. \tag{7.8}$$

Corolarul 7.2. Funcţia $\overline{\chi}$ este *strict convexă* în η pentru orice p fixat :

$$\overline{\chi}(p, \overset{*}{\eta}) - \overline{\chi}(p, \eta) - (\overset{*}{\eta} - \eta)\,\overline{\chi}_\eta(p, \eta) > 0, \quad \forall (p, \overset{*}{\eta}) \neq p, \eta) \text{ din } \bar{D}. \tag{7.9}$$

Corolarul 7.3. Funcţia $\overline{\chi}$ satisface inegalitatea

$$-(\overset{*}{p} - p)[\overline{\chi}_p(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) - \overline{\chi}_p(p, \eta)] - (\overset{*}{\eta} - \eta)\,[\overline{\chi}_\eta(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) - \overline{\chi}_\eta(p, \eta)] > 0, \tag{7.10}$$

$$\forall\,(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) \neq (p, \eta) \quad \text{din } \bar{D}.$$

Corolarul 7.4. Funcţia $\overline{\chi}_p(p, \eta)$ este *strict descrescătoare* de p, pentru orice η fixat.

Corolarul 7.5. Din ecuaţia constitutivă $(7.5)_1$ deducem astfel că pentru orice valoare fixată a entropiei specifice η, volumul specific v este o funcţie *strict descrescătoare* de presiunea p, sau, echivalent, densitatea de masă ρ este o funcţie *strict crescătoare* din presiunea p.

Corolarul 7.6. Funcţia $\overline{\chi}_\eta(p, \eta)$ este *strict crescătoare* de η, pentru orice p fixat.

Corolarul 7.7. Pe baza ecuaţiei constitutive (7.5), conchidem astfel că temperatura absolută t este o funcţie *strict crescătoare* de entopia specifică η, pentru orice valoare fixată a presiunii p.

8. ENTALPIA LIBERĂ SPECIFICĂ SAU FUNCŢIA LUI GIBBS ŞI ECHILIBRUL TERMIC LOCAL

În acest paragraf vom pune în evidenţă rolul esenţial şi dual jucat de funcţia lui Gibbs în caracterizarea stărilor locale de echilibru termic.

În acest scop, observăm la început că din corolarul 7.7 *urmează* că ecuaţia constitutivă $(7.5)_2$ poate fi rezolvată în mod unic în raport cu η pentru orice p fixat :

$$\eta = \acute{\eta}(p, t), \tag{8.1}$$

funcţia $\acute{\eta}(p, t)$ fiind *strict crescătoare* în t pentru orice valoare fixată a lui p şi de clasă C^0 pe domeniul său de definiţie $\acute{D} \subset (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$. Exprimăm faptul că (8.1) este obţinut prin rezolvarea lui $(7.5)_2$ prin identitatea

$$\overline{\chi}_\eta(p, \acute{\eta}(p, t)) = t. \tag{8.2}$$

Definiţia 8.1. Funcţia entalpie liberă specifică sau *funcţia lui Gibbs* $\acute{\zeta} : \acute{D} \to R$ este definită prin relaţia

$$\acute{\zeta}(p, t) = \overline{\chi}(p, \acute{\eta}(p, t)) - t\acute{\eta}(p, t), \tag{8.3}$$

unde funcţia $\acute{\eta}$ este definită prin (8.1) cu soluţia unică a lui $(7.5)_2$.

Ca şi în cele două paragrafe precedente, pentru stabilirea *legăturii* ce există între stările de echilibru termic şi funcţia lui Gibbs, este necesar să admitem o ipoteză suplimentară de regularitate :

Ī : Domeniul $\acute{D} \subset (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ introdus pe baza corolarului 7.7 este o mulţime nevidă, deschisă şi convexă, iar funcţia entropie specifică $\acute{\eta}(p, t)$ introdusă prin relaţia (8.1) este de clasă C^1 pe $\acute{D}$.

Din relaţia de definiţie (8.3) şi din ipoteza **Ī** urmează că funcţia lui Gibbs $\acute{\zeta}$ este de clasă C^1 pe $\acute{D}$; de asemenea, cu (7.2) din (8.3) rezultă identităţile :

$$\acute{\zeta}_p(p, t) = \overline{\chi}_p(p, \acute{\eta}(p, t)), \quad \acute{\zeta}_t(p, t) = -\acute{\eta}(p, t). \tag{8.4}$$

Pe baza relaţiilor obţinute putem deduce imediat teorema ce stabileşte *legătura* între funcţia lui Gibbs şi stările locale de echilibru termic ; avem :

Teorema 8.1. Dacă ÎI are loc, pentru ca starea locală (v, η) să fie o stare de echilibru termic corespunzătoare perechii (p, t) este necesar și suficient cu v și η să fie dată de relațiile constitutive

$$v = \zeta'_p(p, t) > 0, \qquad \eta = -\zeta'_t(p, t); \tag{8.5}$$

deci funcția lui Gibbs ζ' este un *potențial termostatic.*

Următoarea teoremă precizează natura funcției ζ' și are la bază identitatea de mai jos, care rezultă din relația de definiție (8.3) :

$$\bar{\chi}(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) - \bar{\chi}(p, \eta) - (\overset{*}{p} - p)\,\bar{\chi}_p(\overset{*}{p}, \overset{*}{\eta}) - (\overset{*}{\eta} - \eta)\,\bar{\chi}_\eta(p, \eta) =$$

$$= \zeta'(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) - \zeta'(p, t) - (\overset{*}{p} - p)\,\zeta'_p(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) - (\overset{*}{t} - t)\,\zeta'_t(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}). \tag{8.6}$$

Din (8.6), pe baza teoremei 7.2, conchidem că este adevărată

Teorema 8.2. Funcția lui Gibbs ζ' este *strict concavă* pe $\acute{D}$; adică

$$\zeta'(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) - \zeta'(p, t) - (\overset{*}{p} - p)\,\zeta'_p(p, t) - (\overset{*}{t} - t)\,\zeta'_t(p, t < 0,$$

$$\forall(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) \neq (p, t) \text{ din } \acute{D}. \tag{8.7}$$

Deoarece funcția $\bar{\chi}$ satisface inegalitatea (7.6) dacă și numai dacă funcția ζ' satisface inegalitatea (8.7), din teorema 7.3 decurge

Teorema 8.3. Teorema 8.2 este *echivalentă* cu postulatul **P.**

Corolarele de mai jos sînt *consecințe* ale teoremelor precedente și dezvăluie *semnificația geometrică și termomecanică* a rezultatelor obținute.

Corolarul 8.1. Din teoremele 8.2 și 3.1 urmează că funcția lui Gibbs $\zeta'(p, t)$ satisface inegalitatea

$$(\overset{*}{p} - p)[\zeta'_p(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) - \zeta'_p(p, t))] + (\overset{*}{t} - t)\,[\zeta'_t(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) - \zeta'_t(p, t)] < 0,$$

$$\forall(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) \neq (p, t) \text{ din } \acute{D}. \tag{8.8}$$

Corolarul 8.2. $\zeta'_p(p, t)$ este o funcție *strict descrescătoare* de p, pentru orice t fixat; adică

$$(\overset{*}{p} - p)[\zeta'_p(\overset{*}{p}, t) - \zeta'_p(p, t)] < 0, \ \forall(\overset{*}{p}, t) \neq (p, t) \text{ din } \acute{D}. \tag{8.9}$$

Corolarul 8.3. Din corolalrul precedent și din ecuația constitutivă $(8.5)_1$ rezultă că, pentru orice valoare fixată a temperaturii absolute t, volumul specific v este o funcție *strict descrescătoare* de presiunea p sau, echivalent, densitatea de masă ρ este o funcție *strict crescătoare* de presiunea p.

Corolarul 8.4. $\zeta'_t(p, t)$ este o funcţie *strict descrescătoare* de t, pentru orice p fixat.

Corolarul 8.5. Din ecuaţia constitutivă $(8.5)_2$ şi din corolarul precedent urmează că entropia specifică η este o funcţie *strict crescătoare* de temperatura absolută t pentru orice valoare fixată a volumului specific v, sau, echivalent, pentru orice valoare fixată a densităţii de masă ρ.

Următorul corolar precizează restricţiile suplimentare ce se impun asupra funcţiei lui Gibbs $\zeta'(p, t)$ dacă ea este suficient de regulată în domeniul său de definiţie.

Corolarul 8.6. Din teoremele 8.2 şi 3.2 rezultă că dacă funcţia $\zeta'(p, t)$ este de clasă C^2 pe $\acute{D}$, matricea

$$\begin{Vmatrix} \zeta'_{pp} & \zeta'_{pt} \\ \zeta'_{tp} & \zeta'_{tt} \end{Vmatrix} \tag{8.10}$$

este *negativ semidefinită* pe $\acute{D}$.

Observaţia 8.1. Deoarece conform ipotezelor admise $v > 0$, din ecuaţia constitutivă $(8.5)_1$ urmează că $\zeta'_p(p, t) > 0$ pe $\acute{D}$; în consecinţă, funcţia lui Gibbs sau funcţia entalpie liberă specifică este *strict crescătoare* de presiunea p, pentru orice valoare fixată a temperaturii absolute. Conchidem astfel că, în cadrul teoriei construite, stricta pozitivitate a volumului specific sau, echivalent, a densităţii de masă şi admiterea faptului că, pentru orice valoare fixată a temperaturii absolute presiunea şi entalpia liberă specifică cresc sau scad simultan, sînt *echivalente* între ele (în sensul precizat în observaţia 4.1). Este evident că proprietatea de mai sus a funcţiei lui Gibbs $\zeta'(p, t)$ este *analoagă* cu cea formulată în teorema 5.1 în legătură cu funcţia calorică de stare $\hat{\varepsilon}(v, \eta)$.

Observaţia 8.2. Similitudinea semnalată în observaţia precedentă nu este singulară. Într-adevăr, analiza comparativă a rezultatelor prezentate în paragraful 4, respectiv în acest paragraf, relevă *rolul dual* pe care îl joacă în termostatica fluidelor termoelastice energia internă specifică, deci funcţia calorică de stare $\hat{\varepsilon}(v, \eta)$, pe de o parte, şi entalpia liberă specifică deci funcţia lui Gibbs $\zeta'(p, t)$, pe de altă parte, în caracterizarea stărilor locale de echilibru termic. La studiul stabilităţii stărilor globale de echilibru termic vom releva *limitele* pînă la care dualitatea semnalată poate fi acceptată (vezi în special § 18).

Următoarele observaţii vor pune în evidenţă *alte două modalităţi* prin intermediul cărora poate fi introdusă funcţia lui Gibbs,

Observaţia 8.3. Din corolarul 6.5. urmează că ecuaţia constitutivă $(6.6)_1$, pentru orice t fixat, poate fi rezolvată în mod unic în raport cu v:

$$v = \hat{v}(p, t), \tag{8.11}$$

$\hat{v}(p, t)$ fiind o funcţie *strict descrescătoare* de p pentru orice t fixat şi de clasă C^0 pe domeniul său de definiţie $\acute{D}$. De aici, pe baza relaţiilor de definiţie

(6.3), (7.3) și (8.3) urmează că funcția lui Gibbs poate fi introdusă pe următoarea cale alternativă

$$\zeta'(p,\ t) = \tilde{\psi}(\acute{v}(p,\ t),\ t) + p\acute{v}(p,\ t), \tag{8.12}$$

unde funcția $\acute{v}$ este definită prin (8.11), ca unica soluție a ecuației $(6.8)_1$. Evident, nici pe această cale nu putem evita introducerea ipotezei **Í** dacă dorim să stabilim legătura ce există între stările locale de echilibru termic și funcția lui Gibbs.

Observația 8.4. Făcînd apel la teorema 3.1 obținem *a treia modalitate* prin intermediul căreia putem introduce funcția lui Gibbs. Într-adevăr, conform proprietății (δ), sistemul (4.3) al ecuațiilor termice de stare poate fi rezolvat în mod unic în raport cu perechea $(v,\ \eta)$:

$$v = \acute{v}(p, t),\ \eta = \acute{\eta}(p, t). \tag{8.13}$$

În acest mod, după cum rezultă din (6.3), (7.3) și (8.3), funcția lui Gibbs ζ' poate fi definită prin relația

$$\zeta'(p,\ t) = \hat{\varepsilon}(\acute{v}(p,\ t),\ \acute{\eta}(p,\ t)) + p\acute{v}(p,\ t) - t\acute{\eta}(p,\ t),\ \forall (p, t) \text{ din } \acute{D}. \tag{8.14}$$

Se constată imediat că nici a treia alternativă nu face posibilă *deducerea* proprietății stipulate prin ipoteza **Í**; prin urmare, valabilitatea ei trebuie acceptată *axiomatic*.

Pe baza rezultatelor obținute putem da o *nouă caracterizare* (echivalentă) a stărilor locale de echilibru termic, în cazul în care variabilele independente sînt p și t, deci în situațiile utile în aplicații, avînd în vedere faptul că tocmai presiunea și temperatura sînt parametrii controlabili și măsurabili în cercetările experimentale. Următoarele considerații vor preciza ideile de mai sus.

Observația 8.5. Folosind relația (8.14) putem introduce funcția energie internă specifică $\acute{\varepsilon} : \acute{D} \to R$, definită prin relația

$$\acute{\varepsilon}(p, t) = \zeta'(p, t) - vp + \eta t. \tag{8.15}$$

Prin utilizarea funcției $\acute{\varepsilon}$ putem da o *definiție alternativă* stării de echilibru termic (în reprezentarea energetică) :

Definiția 8.2. Starea locală $(v,\ \eta)$ este o *stare de echilibru termic* corespunzătoare perechii $(p,\ t)$ dacă

$$\acute{\varepsilon}(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) < \acute{\varepsilon}(p,\ t), \quad \forall (\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) \neq (p, t) \text{ din } \acute{D}. \tag{8.16}$$

Pe baza proprietății de *maxim* stipulată în definiția precedentă, din teorema 8.2, combinată cu ecuațiile constitutive (8.5), rezultă că are loc proprietatea afirmată în

Teorema 8.4 Dacă ipoteza **Í** are loc, definițiile 4.1 și 8.2 sînt *echivalente* între ele.

9. FUNCȚIA LUI MASSIEU ȘI ECHILIBRUL TERMIC LOCAL

În acest paragraf, ca și în cel următor, vom prezenta caracterizări alternative ale stărilor locale de echilibru termic, utile în cazul în care teoria este construită pe baza reprezentării entropice.

Din corolarul 5.5 *rezultă* că ecuația constitutivă $(5.9)_2$ poate fi rezolvată în mod unic în raport cu ε:

$$\varepsilon = \bar{\bar{\varepsilon}}(v, \tau), \tag{9.1}$$

$\bar{\bar{\varepsilon}}(v, \tau)$ fiind o funcție *strict descrescătoare* de τ, pentru orice v fixat și de clasă C^0 pe domeniul său de definiție $\bar{\bar{D}} \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$. Identitatea

$$\check{\eta}_\varepsilon(v, \bar{\bar{\varepsilon}}(v, \tau)) = \tau \tag{9.2}$$

exprimă faptul că relația (9.1) s-a obținut rezolvînd ecuația $(5.9)_2$.

Definiția 9.1. Funcția lui Massieu $\bar{\bar{\varphi}} : \bar{\bar{D}} \to R$ este definită prin relația

$$\bar{\bar{\varphi}}(v, \tau) = \check{\eta}(v, \bar{\bar{\varepsilon}}(v, \tau)) - \tau\bar{\bar{\varepsilon}}(v, \tau), \tag{9.3}$$

unde funcția energie internă specifică $\bar{\bar{\varepsilon}}$ este definită prin (9.1) și reprezintă soluția unică a ecuației $(5.9)_2$.

Admitem ipoteza:

$\bar{\bar{\mathbf{I}}}$: Domeniul $\bar{\bar{D}} \subset (0, \infty) \times (0, \infty)$ introdus prin corolarul 5.5. este o mulțime nevidă, deschisă și convexă, iar funcția energie internă specifică $\bar{\bar{\varepsilon}}(v, \tau)$, introdusă prin relația (9.1), este de clasă C^1 pe $\bar{\bar{D}}$.

Acum, din relația de definiție (9.3) urmează că funcția $\bar{\bar{\varphi}}$ este de clasă C^1 pe $\bar{\bar{D}}$, iar (9.3) combinat cu (9.1) arată că sînt satisfăcute următoarele identități:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\varphi}}_v(v, \tau) &= \check{\eta}_v(v, \bar{\bar{\varepsilon}}(v, \tau)), \\ \bar{\bar{\varphi}}_\tau(v, \tau) &= -\bar{\bar{\varepsilon}}(v, \tau), \end{aligned} \tag{9.4}$$

Din acest moment raționamente similare cu cele făcute în paragraful 6 conduc la următoarele rezultate:

Teorema 9.1. Pentru ca starea locală (v, η) sau, echivalent, (v, ε) să fie o stare de echilibru termic corespunzătoare perechii (p, t), sau, echivalent, (π, τ), este necesar și suficient ca presiunea redusă $\pi = p/t$ și energia internă specifică ε să fie date de ecuațiile constitutive

$$\pi = \bar{\bar{\varphi}}_v(v, \tau), \qquad \varepsilon = -\bar{\bar{\varphi}}_\tau(v, \tau); \tag{9.5}$$

cu alte cuvinte, funcția lui Massieu $\bar{\bar{\varphi}}(v, \tau)$ este un *potențial termostatic*.

Teorema 9.2. Funcția lui Massieu φ satisface inegalitatea

$$\bar{\bar{\varphi}}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\tau}) - \bar{\bar{\varphi}}(v, \tau) - (\overset{*}{v} - v)\,\bar{\bar{\varphi}}_v(v, \tau) - (\overset{*}{\tau} - \tau)\,\bar{\bar{\varphi}}_\tau(\overset{*}{v}, \overset{*}{\tau}) > 0, \tag{9.6}$$

$\forall (\overset{*}{v}, \overset{*}{\tau}) \neq (v, \tau)$ din $\bar{\bar{D}}$.

Teorema 9.3. Dacă ipoteza $\bar{I}$ are loc, teorema 9.2 este *echivalentă* cu postulatul **P**.

Corolarul 9.1. Funcția $\bar{\bar{\varphi}}$ este *strict concavă* în v pentru orice τ fixat; adică

$$\bar{\bar{\varphi}}(\overset{*}{v}, \tau) - \bar{\bar{\varphi}}(v, \tau) - (\overset{*}{v} - v)\bar{\bar{\varphi}}_v(v, \tau) < 0,$$

$$\forall(\overset{*}{v}, \tau) \neq (v, \tau) \text{ din } \bar{D}. \tag{9.7}$$

Corolarul 9.2. Funcția $\bar{\bar{\varphi}}$ este *strict convexă* în τ pentru orice v fixat; adică

$$\bar{\bar{\varphi}}(v, \overset{*}{\tau}) - \bar{\bar{\varphi}}(v, \tau) - (\overset{*}{\tau} - \tau)\,\bar{\bar{\varphi}}_\tau(v, \tau) > 0,$$

$$\forall(v, \overset{*}{\tau}) \neq (v, \tau) \text{ din } \bar{\bar{D}}. \tag{9.8}$$

Corolarul 9.3. Funcția $\bar{\bar{\varphi}}$ satisface inegalitatea

$$(\overset{*}{v} - v)[\bar{\bar{\varphi}}_v(\overset{*}{v}, \overset{*}{\tau}) - \bar{\bar{\varphi}}_v(\tau, v)] - (\overset{*}{\tau} - \tau)\,[\bar{\bar{\varphi}}_\tau(\overset{*}{v}, \overset{*}{\tau}) - \bar{\bar{\varphi}}_\tau(v, \tau)] < 0\,, \tag{9.9.}$$

$$\forall(\overset{*}{v}, \overset{*}{\tau}) \neq (v, \tau) \text{ din } \bar{\bar{D}}.$$

Corolarul 9.4 Funcția $\bar{\bar{\varphi}}_i(v, \tau)$ este *strict descrescătoare de* v, pentru orice τ fixat, adică

$$(\overset{*}{v} - v)[\bar{\bar{\varphi}}_v(\overset{*}{v}, \tau) - \bar{\bar{\varphi}}_v(v, \tau)] < 0,$$

$$\forall(\overset{*}{v}, \tau) \neq (v, \tau) \text{ din } \bar{\bar{D}}. \tag{9.10}$$

Corolarul 9.5. Presiunea redusă π este o funcție *strict descrescătoare* de volumul specific v pentru orice valoare fixată a gradului de răcire τ.

Corolarul 9.6. Funcția $\bar{\bar{\varphi}}_\tau(v, \tau)$ este *strict crescătoare de* τ pentru orice v fixat, adică

$$(\overset{*}{\tau} - \tau)[\bar{\bar{\varphi}}_\tau(v, \overset{*}{\tau}) - \bar{\bar{\varphi}}_\tau(v, \tau)] > 0,$$

$$\forall(v, \overset{*}{\tau}) \neq (v, \tau) \text{ din } \bar{\bar{D}}. \tag{9.11}$$

Corolarul 9.7. Energia internă specifică ε este o funcție *strict descrescătoare* de gradul de răcire τ sau, echivalent, o funcție *strict crescătoare* de temperatura absolută t, pentru orice valoare fixată a volumului specific v, sau, echivalent, pentru orice valoare fixată a densității de masă ρ.

10. FUNCȚIA LUI PLANCK ȘI ECHILIBRUL TERMIC LOCAL

În reprezentarea entropică, funcția lui Planck joacă *același* rol pe care îl joacă funcția lui Gibbs în reprezentarea energetică.

Pentru introducerea funcției lui Planck observăm că din corolarul 9.5 *urmează* rezolvabilitatea ecuației constitutive $(9.5)_1$ în mod unic, în

raport cu v, pentru orice valoare fixată a lui τ:

$$v = \hat{v}(\pi, \tau), \tag{10.1}$$

funcţia $\hat{v}(\pi, \tau)$ astfel obţinută fiind *strict descrescătoare* de π, oricare ar fi τ fixat şi de clasă C^0 pe domeniul său de definiţie $\check{D} \subset (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$.

Faptul că (10.1) este soluţia ecuaţiei $(9.5)_1$ se exprimă prin identitatea

$$\bar{\bar{\varphi}}_v(\hat{v}(\pi, \tau), \tau) = \pi \tag{10.2}$$

Definiţia 10.1. Funcţia lui Planck $\grave{\nu} : \check{D} \to R$ este definită prin relaţia

$$\grave{\nu}(\pi, \tau) = \bar{\bar{\varphi}}(\grave{\nu}(\pi, \tau), \tau) - \pi \grave{\nu}(\pi, \tau), \tag{10.3}$$

funcţia volum specific $\hat{v}$ fiind definită prin (10.1), ca unica soluţie a lui (9.6).

Admitem, ca şi în paragrafele anterioare, *ipoteza* de regularitate:

Î: Domeniul $\check{D} \subset (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ introdus prin corolarul 9.5 este o mulţime nevidă, deschisă şi convexă, iar funcţia volum specific $\hat{v}(\pi, \tau)$ introdusă prin relaţia (10.1) este de clasă C^1 pe $\check{D}$.

În acest caz, repetînd raţionamente analoage cu cele efectuate deja de mai multe ori, putem conchide că au loc următoarele proprietăţi:

Teorema 10.1. Pentru ca starea locală (v, ε) sau, echivalent, (v, η) să fie o stare de echilibru termic corespunzătoare perechii (π, τ) sau, echivalent, (p, t), este necesar şi suficient să fie satisfăcute relaţiile constitutive

$$v = -\grave{\nu}_\pi(\pi, \tau) > 0, \qquad \varepsilon = -\grave{\nu}_\tau(\pi, \tau); \tag{10.4}$$

adică funcţia lui Planck $\grave{\nu}$ este un *potenţial termostatic*.

Teorema 10.2. Funcţia lui Planck $\grave{\nu}$ este *strict convexă*, adică

$$\grave{\nu}(\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau}) - \grave{\nu}(\pi, \tau) - (\overset{*}{\pi} - \pi)\grave{\nu}_\pi(\pi, \tau) - (\overset{*}{\tau} - \tau)\grave{\nu}_\tau(\pi, \tau) > 0, \tag{10.5}$$

$$\forall (\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau}) \neq (\pi, \tau) \text{ din } \acute{D}.$$

Teorema 10.3. Dacă ipoteza **Î** are loc, teorema 10.2. este *echivalentă* cu postulatul **P**.

Corolarul 10.1. Funcţia $\grave{\nu}_\pi(\pi, \tau)$ este *strict crescătoare* de π, pentru orice τ fixat.

Corolarul 10.2. Volumul specific v este o funcţie *strict descrescătoare* de presiunea redusă π, pentru orice valoare fixată a răcirii τ.

Corolarul 10.3. Funcţia $\grave{\nu}_\tau(\pi, \tau)$ este *strict crescătoare* de τ, pentru orice π fixat.

Corolarul 10.4. Energia internă specifică ε este o funcţie *strict descrescătoare* de răcire τ, pentru orice valoare fixată a presiunii reduse π.

Corolarul 10.5. Din teoremele 10.2 și 3.2 rezultă, că dacă funcția lui Planck $\grave{\nu}$ este de clasă C^2 pe $\grave{D}$, matricea

$$\left\| \begin{matrix} \grave{\nu}_{\pi\pi} & \grave{\nu}_{\pi\tau} \\ \grave{\nu}_{\tau\pi} & \grave{\nu}_{\tau\tau} \end{matrix} \right\| \tag{10.6}$$

este *pozitiv semidefinită* pe $\grave{D}$.

Observația 10.1. Făcînd apel la teorema 3.1, obținem o *a doua cale* prin care poate fi introdusă funcția lui Planck. Într-adevăr, în acord cu proprietatea (δ), sistemul (5.13) al ecuațiilor termice de stare poate fi rezolvat în mod unic în raport cu perechea (v, ε):

$$v = \hat{v}(\pi, \tau), \qquad \varepsilon = \grave{\varepsilon}(\pi, \tau) \tag{10.7}$$

Pe această cale, după cum rezultă din (9.3) și (10.3), funcția lui Planck $\grave{\nu}$ poate fi definită prin relația

$$\grave{\nu}(\pi, \tau) = \check{\eta}(\hat{v}(\pi, \tau), \grave{\varepsilon}(\pi, \tau)) - \pi\hat{v}(\pi, \tau) - \tau\grave{\varepsilon}(\pi, \tau). \tag{10.8}$$

Observăm că nici această cale nu implică valabilitatea proprietății stipulate prin ipoteza $\hat{\mathbf{I}}$ și deci legătura ce există între funcția lui Planck și stările de echilibru termic poate fi stabilită numai prin acceptarea axiomatică a proprietății de netezime afirmată în $\hat{\mathbf{I}}$.

Observația 10.2. Utilizînd relația (10.8) putem introduce funcția entropie specifică $\grave{\eta} : \grave{D} \to R$, definită prin relația

$$\grave{\eta}(\pi, \tau) = \grave{\nu}(\pi, \tau) + v\pi + \varepsilon\tau. \tag{10.9}$$

Cu ajutorul funcției introduse putem da o definiție *alternativă* a stării de echilibru termic (în reprezentarea entropică);

Definiția 10.2. Starea locală (v, ε) este o stare de *echilibru termic* corespunzătoare perechii (π, τ) dacă

$$\grave{\eta}(\pi, \tau) < \grave{\eta}(\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau}), \qquad \forall(\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau}) \neq (\pi, \tau) \text{ din } \grave{D}. \tag{10.10}$$

După cum urmează din teorema 8.2, combinată cu relațiile constitutive (10.4), are loc proprietatea formulată în

Teorema 10.4. Dacă ipoteza $\hat{\mathbf{I}}$ are loc, definițiile 5.4 și 10.2 sînt *echivalente* între ele.

Observația 10.3. Deoarece conform ipotezelor admise $v > 0$, din ecuația constitutivă $(10.4)_1$ rezultă că $\grave{\nu}_\pi(\pi, \tau) < 0$ pe $\grave{D}$: prin urmare, funcția lui Planck $\grave{\nu}$ (π, τ) este *strict descrescătoare* de presiunea redusă π (deci de presiunea p) pentru orice valoare fixată a gradului de răcire τ (deci a temperaturii absolute t). În consecință, stricta pozitivitate a volumului specific este o proprietate *echivalentă* (în sensul precizat în observația 4.1) cu admiterea faptului că valoarea funcției lui Planck scade sau crește

simultan cu creşterea, respectiv cu scăderea presiunii, oricare ar fi valoarea *fixată* a temperaturii absolute.

Observaţia 10.4. Analiza comparativă a rezultatelor expuse în acest paragraf şi în paragrafele 5, respectiv 10, arată că în termostatica fluidelor termoelastice entropia specifică, deci funcţia calorică de stare $\check{\eta}(v, \varepsilon)$, pe de o parte, şi funcţia lui Planck $\check{\nu}(\pi, \tau)$, pe de altă parte, joacă roluri *duale*, această dualitate avînd însă un caracter *limitat* (vezi în acest sens paragrafele 17 şi 18).

11. CONSECINŢE; COEFICIENŢI DE MATERIAL

În discuţia ce urmează vom presupune că gradul de regularitate al funcţiilor implicate este cel necesar pentru ca operaţiile efectuate să aibă sens.

1. Fie funcţia energia internă specifică $\tilde{\varepsilon} : \tilde{D} \to R$ definită prin relaţia

$$\tilde{\varepsilon}(v, t) = \hat{\varepsilon}(v, \tilde{\eta}(v, t)), \tag{11.1}$$

unde $\tilde{\eta}(v, t)$ este funcţia introdusă prin (6.1). Mărimea

$$c_V = \tilde{c}_V(v, t) = \tilde{\varepsilon}_t(v, t) \tag{11.2}$$

se numeşte *căldura specifică la volum constant* sau *capacitatea calorică specifică izocoră* corespunzătoare volumului specific v şi temperaturii absolute t.

(Observăm că aici şi în continuare indicii inferiori notaţi cu litere latine mari *nu* indică o operaţie de derivare parţială!).

Folosind identitatea (6.2) şi regula de derivare a funcţiilor compuse obţinem

$$\tilde{c}_V(v, t) = t\tilde{\eta}_t(v, t), \tag{10.3}$$

Deoarece funcţia $\tilde{\eta}(v, t)$ este strict crescătoare în raport cu t pentru orice v fixat, iar temperatura absolută t este strict pozitivă conform postulatului **II**, din (11.3) *urmează* că pentru nici o valoare a lui v şi t căldura specifică la volum constant nu poate fi negativă; adică

$$c_V = \tilde{c}_V(v, t) \geqslant 0, \quad \forall (v, t) \text{ din } \tilde{D}; \tag{11.4}$$

mai precis, $\tilde{c}_V$ poate să se anuleze cel mult pe o mulţime *rară* (nicăieri densă) a domeniului constitutiv $\tilde{D}$ (vezi teorema A2).

2. Fie funcţia entalpie specifică $\acute{\chi} : \acute{D} \to R$ definită prin relaţia

$$\acute{\chi}(p, t) = \overline{\chi}(p, \acute{\eta}(p, t)), \tag{11.5}$$

unde $\acute{\eta}(p, t)$ este funcţia introdusă prin (8.1), Mărimea

$$c_P = \acute{c}_P(p, t) = \acute{\chi}_t(p, t) \tag{11.6}$$

se numește *căldura specifică la presiune constantă* sau *capacitatea calorică specifică izobară* corespunzătoare presiunii p și temperaturii absolute t. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse și identitatea (8.2) deducem

$$\acute{c}_P(p, t) = t\acute{\eta}_t(p, t). \tag{11.7}$$

Deoarece funcția $\acute{\eta}(p, t)$ este strict crescătoare în raport cu t, oricare ar fi v fixat, din (11.7) și din postulatul II *urmează* că pentru nici o valoare a lui p și t căldura specifică la presiune constantă nu poate fi negativă; deci

$$c_P = \acute{c}_P(p, t) \geqslant 0, \qquad \forall (p, t) \text{ din } \acute{D} \tag{11.8}$$

mai precis $\acute{c}_P$ poate să se anuleze cel mult pe o mulțime *rară* a domeniului constitutiv $\acute{D}$.

3. Fie funcția $\tilde{p} : \tilde{D} \to R$ definită orin ecuația constitutivă (6.6). Mărimea

$$k_T = \tilde{k}_T(v, t) = -v\tilde{p}_v(v, t) \tag{11.9}$$

se numește *modulul de elasticitate izoterm* corespunzător volumului specific v și tempetaturii absolute t. Deoarece conform corolarului 6.5 presiunea p, pentru orice t fixat, este o funcție strict descrescătoare de volumul specific v, iar v este strict pozitiv, din (11.9) urmează că modulul de elasticitate izoterm nu poate fi negativ pentru nici o valoare a lui v și t; deci

$$\tilde{k}_T(v, t) \geqslant 0, \qquad \forall (v, t) \text{ din } \tilde{D}; \tag{11.10}$$

mai precis, $\tilde{k}_T$ poate să se anuleze cel mult pe o mulțime *rară* a domeniului constitutiv $\tilde{D}$.

4. Fie funcția $\hat{p} : \hat{D} \to R$ definită prin ecuația constitutivă (4.3). Mărimea

$$k_H = \hat{k}_H(v, \eta) = -v\hat{p}_v(v, \eta) \tag{11.11}$$

se numește *modulul de elasticitate adiabatic* sau *izentropic* corespunzător volumului specific v și entropiei specifice η. Deoarece conform corolarului 4.3 presiunea p, pentru orice η fixat, este o funcție strict descrescătoare de volumul specific strict pozitiv v, din (11.11) *urmează* că pentru orice valori ale lui v și η modulul de elasticitate izentropic (adiabatic) este nenegativ; deci

$$\hat{k}_H(v, \eta) \geqslant 0, \qquad \forall (v, \eta) \text{ din } \hat{D}; \tag{11.12}$$

mai precis, $\hat{k}_H$ poate să se anuleze cel mult pe o mulțime *rară* a domeniului constitutiv $\hat{D}$.

5. Fie funcția $\acute{v} : \acute{D} \to R$ definită prin ecuația constitutivă (7.5), Mărimea

$$\alpha = \acute{\alpha}(p, t) = \acute{v}_t(p, t)/\acute{v}(p, t) \tag{11.13}$$

MŰSZAKI EGYETEM 1848

se numeşte *coeficientul de dilatare termică* corespunzător presiunii p şi temperaturii absolute t. În cadrul teoriei construite în această lucrare, semnul acestui coeficient *nu* poate fi stabilit şi coeficientul α — în general — poate avea atît valori pozitive, cît şi negative, sau chiar nule.

6. Fie funcţia $\tilde{p} : \tilde{D} \to R$ definită prin ecuaţia constitutivă (6.6); *presupunem* pe moment că p *nu* se anulează în nici un punct din $\tilde{D}$. Mărimea

$$\beta = \tilde{\beta}(v, t) = \tilde{p}_t(v, t)/\tilde{p}(v, t) \tag{11.14}$$

se numeşte *coeficientul termic al presiunii* corespunzător volumului specific v şi temperaturii absolute t. Exact ca în cazul precedent, în cadrul teoriei construite în această lucrare nu se poate stabili semnul acestui coeficient; β poate fi pozitiv, negativ sau nul. Admiterea faptului că β este strict pozitiv — în general — este echivalent cu admiterea proprietăţii conform căreia scăderea temperaturii fluidului termoelastic (omogen) în lungul unei izobare implică micşorarea volumului său. Se ştie însă că apa, la presiunea egală cu 1 atmosferă şi în jurul temperaturii de 4°C, nu are această proprietate (vezi de exp. [22], Cap. 2). Astfel, cel puţin în privinţa proprietăţii semnalate, apa ca fluid termoelastic (compresibil) nu este exclusă din teoria construită.

7. Conform corolarului 8.2, presiunea este o funcţie strict crescătoare de densitate de masă oricare ar fi valoarea fixată a temperaturii absolute. De aici urmează că, dacă pentru o valoare dată t a temperaturii absolute există o valoare ρ_0 a densităţii de masă (ce poate depinde de t) pentru care presiunea este strict pozitivă, atunci presiunea va rămîne strict pozitivă pentru orice valoare a densităţii de masă $\rho \geqslant \rho_0$, cu condiţia ca temperatura să rămînă la valoarea dată t. În cadrul teoriei construite în această lucrare *nu* se poate demonstra că într-un fluid termoelastic presiunea este strict pozitivă în orice stare de echilibru termic. Coleman şi Noll (vezi în special [9], §§ 4, 11) au reuşit să demonstreze stricta pozitivitate a presiunii (hidrostatice), însă pentru aceasta au presupus că este cunoscută — în cazul unui fluid termoelastic — dependenţa funcţiei calorice de stare $\hat{e}$ a fluidului atît de entropia specifică, cît şi de gradientul deformaţiei. Însă în cazul unui fluid termoelastic-conform definiţiei- $\hat{e}$ depinde de gradientul deformaţiei *numai* prin intermediul determinantului acestui tensor, deci numai prin intermediul volumului specific. În consecinţă, dependenţa a cărei cunoaştere este admisă de cei doi autori — şi stă la baza demonstrării strictei pozitivităţi a presiunii — *principial nu poate fi determinată* nici teoretic, nici experimental; cu alte cuvinte, ipoteza lui Coleman şi Noll nu este realistă.

ANEXĂ

În această anexă, pentru conciziune, vom folosi următoarele notaţii:

$\boldsymbol{\omega} = (x, y)$, $\boldsymbol{\omega}_1 = (x_1, y_1)$, $\overset{*}{\boldsymbol{\omega}} = (\overset{*}{x}, \overset{*}{y})$, $\boldsymbol{\omega} = (\bar{x}, \bar{y})$, ..., elemente din R^2, $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 = xx_1 + yy_1$, ..., produsul scalar dintre $\boldsymbol{\omega}$ şi $\boldsymbol{\omega}_1$, grad $f(\boldsymbol{\omega}) = (f_x(\boldsymbol{\omega}), f_y(\boldsymbol{\omega}))$, gradientul funcţiei f calculat în $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad}\, f(\boldsymbol{\omega}) = x_1 f_x(\boldsymbol{\omega}) + y_1 f_y(\boldsymbol{\omega})$ produsul scalar dintre $\boldsymbol{\omega}_1$ şi grad $f(\boldsymbol{\omega})$.

Teorema A.1. Fie $f: D \to R$ o funcție convexă, de clasă C^1 pe $D \subset R^2$. Următoarele două afirmații sînt echivalente:

(a) grad $f(\omega) = \overline{\omega}$;

(b) $\omega \cdot (\omega_1 - \omega) \leqslant f(\omega_1) - f(\omega)$, $\forall\ \omega_1$ din D.

Demonstrație. Arătăm la început că (a) implică (b). Avem

$$\overline{\omega} \cdot (\omega_1 - \omega) = (\omega_1 - \omega) \cdot \text{grad } f(\omega) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f[\omega + \lambda(\omega_1 - \omega)] - f(\omega)}{\lambda} =$$

$$= \lim \frac{f[(1-\lambda)\,\omega + \lambda\omega_1] - f(\omega)}{\lambda} \leqslant \lim_{\lambda \to 0} \frac{(1-\lambda) f(\omega) + \lambda f(\omega_1) - f(\omega)}{\lambda} =$$

$$= f(\omega_1) - f(\omega).$$

Demonstrăm în continuare că (b) implică (a). Fie $\omega_1 = \omega + \lambda \overset{*}{\omega}$; avem:

$$\lambda \overset{*}{\omega} \cdot \overline{\omega} = \overline{\omega} \cdot (\omega_1 - \omega) \leqslant f(\omega_1) - f(\omega) = f(\omega + \lambda \overset{*}{\omega}) - f(\omega);$$

în consecință

$$\overset{*}{\omega} \cdot \overline{\omega} \leqslant \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\omega + \lambda \overset{*}{\omega}) - f(\omega)}{\lambda} = \overset{*}{\omega} \cdot \text{grad} f(\omega) \text{ pentru } \lambda < 0$$

și

$$\overset{*}{\omega} \cdot \overline{\omega} \geqslant \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\omega + \lambda \overset{*}{\omega}) - f(\omega)}{\lambda} = \overset{*}{\omega} \cdot \text{grad } f(\omega) \text{ pentru } \lambda < 0;$$

din ultimele două inegalități urmează că

$$\overset{*}{\omega} \cdot \overline{\omega} = \overset{*}{\omega} \cdot \text{grad } f(\omega), \quad \forall\ \omega \text{ din } D.$$

Teorema 3.1. Demonstrație. Arătăm la început că (α) implică (β). Din teorema A.1 rezultă că, pentru orice ω din D, au loc relațiile

$$(\omega - \omega_1) \cdot \text{grad } f(\omega_1) \leqslant f(\omega) - f(\omega_1),$$

$$(\omega - \omega_2) \cdot \text{grad } f(\omega_2) \leqslant f(\omega) - f(\omega_2).$$

Fie λ din intervalul (0,1) și $\omega = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\,\omega_2$, $\omega_2 \neq \omega_1$; avem

$$(1 - \lambda)(\omega_2 - \omega_1) \cdot \text{grad } f(\omega_1) = (\omega - \omega_1) \cdot \text{grad } f(\omega_1) \leqslant f(\omega) -$$

$$- f(\omega_1) = f[\lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2] - f(\omega_1) < \lambda f(\omega_1) + (1 - \lambda) f(\omega_2) -$$

$$- f(\omega_2) = (1 - \lambda)\,[f(\omega_2) - f(\omega_1)];$$

deci

$$(\omega_2 - \omega_1) \cdot \text{grad} f(\omega_1) < f(\omega_2) - f(\omega_1), \quad \forall\, \omega_2 \neq \omega_1 \text{ din } D.$$

Arătăm acum că (β) implică (γ). Într-adevăr, procedînd ca mai sus, găsim

$$(\omega_1 - \omega_2)\cdot \operatorname{grad} f(\omega_2) < f(\omega_1) - f(\omega_2), \quad \forall\ \omega_1 \neq \omega_2 \text{ din } D.$$

Adunînd ultimele două relaţii şi rearanjînd termenii obţinem

$$(\omega_2 - \omega_1)\cdot[\operatorname{grad} f(\omega_2) - \operatorname{grad} f(\omega_1)] > 0, \qquad \forall\ \omega_2 \neq \omega_1 \text{ din } D.$$

Vom demonstra în continuare că (γ) implică (δ). Într-adevăr, dacă

$$\operatorname{grad} f(\omega_2) = \operatorname{grad} f(\omega_1),$$

atunci şi

$$(\omega_2 - \omega_1)\cdot[\operatorname{grad} f(\omega_2) - \operatorname{grad} f(\omega_1)] = 0,$$

şi conform ultimei inegalităţi stricte $\omega_2 = \omega_1$.

În fine, vom arăta că (δ) implică (α). Fie $\omega_1 \neq \omega_2$, λ din intervalul (0,1) şi $\bar{\omega} = \lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\,\omega_2$. Definim funcţia $F : D \to R$ prin relaţia

$$F(\omega) = f(\omega) - \omega\cdot \operatorname{grad} f(\bar{\omega}).$$

Prin calcul direct, pe baza teoremei A.1 rezultă

$$F(\bar{\omega}) \leqslant F(\omega), \qquad \forall\ \omega \text{ din } D.$$

Să presupunem că există $\omega_0 \neq \bar{\omega}$ aşa încît $F(\bar{\omega}) = F(\omega_0)$; în acest caz, conform relaţiei precedente are loc şi inegalitatea $F(\omega_0) \leqslant F(\omega)$, $\forall\ \omega$ din D; de aici, pe baza relaţiei de definiţie a funcţiei F urmează că

$$(\omega - \omega_0)\cdot \operatorname{grad} f(\bar{\omega}) \leqslant f(\omega) - f(\omega_0), \qquad \forall\ \omega \text{ din } D,$$

deci are loc o relaţie de tipul celei de la punctul (b) al teoremei A.1, din care rezultă că trebuie să avem graf $f(\omega_0) = \operatorname{grad} f(\bar{\omega})$. Aceasta contazice însă injectivitatea gradientului funcţiei f. În consecinţă

$$F(\bar{\omega}) < F(\omega), \qquad \forall\ \omega \text{ din } D.$$

În particular,

$$F(\bar{\omega}) < F(\omega_1) \text{ şi } F(\bar{\omega}) < F(\omega_2).$$

Dacă înmulţim prima inegalitate de mai sus cu λ, iar pe a doua cu $(1-\lambda)$, şi adunăm relaţiile obţinute, ţinînd seama de expresiile lui F şi $\bar{\omega}$, obţinem inegalitatea de la punctul (α).

Definiţia A1. Fie (a, b), $-\infty < a < b < \infty$, un interval deschis al axei reale. Mulţimea M din (a, b) se numeşte *rară* sau *nicăieri densă* în (a, b) dacă interiorul închiderii sale în (a, b) este mulţimea vidă, deci dacă $\overset{\circ}{\bar{M}} = \emptyset$.

Teorema A2 : Fie $f : (a, b) \to R$ o funcție *strict* monotonă și de clasă C^1 pe (a, b). Atunci mulțimea punctelor din (a, b) în care se anulează prima derivată a lui f este *cel mult rară* în (a, b).

Demonstrație. Să notăm cu M_f mulțimea amintită în teoremă, adică

$$M_f = \{x \in (a, b) \mid f_x(x) = 0\}.$$

Deoarece f este de clasă C^1 pe (a, b), se constată imediat că M_f este o mulțime *închisă* în (a, b), adică $\overline{M}_f = M_f$.

Presupunem prin absurd că $\overset{\circ}{M}_f \neq \emptyset$, deci că $\overset{\circ}{M}_f \neq \emptyset$; În acest caz există o mulțime deschisă D în (a, b) și conținută în M_f, deci pe care prima derivată a lui f este identic nulă. În consecință, în virtutea teoremei lui Lagrange, funcția f va fi constantă pe D, ceea ce contrazice *stricta* sa monotonie pe (a, b).

Teorema A3. Fie M o mulțime rară, închisă în (a, b). Atunci există o funcție f strict crescătoare și de clasă C^1 pe (a, b) astfel încît $M_f = M$, unde M_f are semnificația din teorema precedentă.

Demonstrație. Fie funcția $g : (a, b) \to [0, \infty)$, definită prin relația

$$g(x) = d(x, M),$$

unde

$$d(x, M) = \inf\{d(x, y) \mid y \in M\},$$

iar $d(x, y)$ este distanța obișnuită pe axa reală între punctele x și y.

Observăm că, deoarece M este o mulțime închisă în (a, b), g se anulează *numai* pe M și are valori strict pozitive în toate punctele lui (a, b) ce nu fac parte din M. De asemenea, se verifică ușor că g este o funcție *continuă* pe (a, b), deci putem construi funcția $f : (a, b) \to [0, \infty)$, definită prin relația

$$f(x) = \int_a^x g(t)\, dt.$$

Evident, $f_x(x) = g(x)$, deci f este de clasă C^1 pe (a, b). Mai mult, deoarece $g(x) = 0$ numai pe M, rezultă că $M_f = M$. Trebuie să mai arătăm că f este *strict* crescătoare pe (a, b). Deoarece $g(x) \geqslant 0$, rezultă că $f_x(x) \geqslant 0$, adică f este crescătoare pe (a, b). Presupunem că monotonia *nu* este strictă; atunci urmează *cu necesitate* că f are o valoare *constantă* pe o mulțime *deschisă* D din (a, b). Prin urmare, $f_x(x) = 0$, $\forall x$ din D și deci $D \subset M_f = M = \overline{M}$, ceea ce contrazice faptul că mulțimea M este rară.

Mulțumim colegilor noștri mat. I. R. Ionescu (INCREST) și dr. D. Polisevschi (INCREST) pentru formularea și demonstrarea teoremelor A.1, 3.1, respectiv A.2, A.3.

Primită la redacție la 5 martie 1985

MIȘCĂRI DE CIRCULAȚIE ALE FLUIDELOR COMPRESIBILE ÎN JURUL CERCULUI UNITATE. CALCULUL NUMERELOR MACH CRITICE

de DORIN BENA

Institutul de Construcții, București

Plecînd de la soluția aproximativă a ecuației (1.1) se obține distribuția de viteze pe obstacol dată prin (2.3).
Se calculează numerele Mach critice în prima aproximație, apoi în a doua aproximație în variantele Ciaplîghin—Demcenko, Iacob, Kármán—Tsien.

1. INTRODUCERE

Vom considera mișcarea plană, permanentă, cu circulație a unui fluid compresibil în jurul cercului unitate. Vom presupune mișcarea subsonică de viteză asimptotică V_∞.

Să notăm cu $\rho_{(x,y)}$ densitatea fluidului și cu $p(x, y)$ presiunea. Se știe că în cadrul mișcării izentropice presiunea și densitatea sînt legate prin relația :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma,$$

unde γ este raportul dintre căldurile specifice sub presiune constantă și sub volum constant $\left(\gamma = \frac{C_p}{C_v}\right)$. Vom nota cu C viteza sunetului în fluid, cu V modulul vitezei, iar cu M numărul lui Mach, $M = \frac{V}{C}$.

Se cunoaște [1], [2] că metoda de aproximare hodografică a lui Ciaplîghin revine la aproximarea mișcării compresibile a unui fluid real, printr-o mișcare compresibilă, a unui fluid fictiv, în jurul aceluiași obstacol.

Legea de compresibilitate a lui Ciaplîghin revine la înlocuirea curbei izentropice din planul $\left(\frac{1}{\rho}, p\right)$, cu o dreaptă. După modul de alegere a dreptei care să aproximeze curba izentropică reală, distingem variantele principale ale metodei hodografice :

a) varianta Ciaplîghin-Demcenko, care constă în a aproxima curba izentropică, prin dreapta tangentă la curbă în punctul corespunzător vitezei nule ;

b) varianta Kármán-Tsien în care se înlocuiește curba izentropică, cu tangenta la curbă în punctul corespunzător vitezei de la infinit ;

c) varianta Iacob (a coardei), în care se înlocuiește curba izentropică prin coarda ce unește două puncte de pe curbă, de exemplu, punctul corespunzător vitezei nule și cel corespunzător vitezei de la infinit.

Mai menționăm existența altor variante [4].

În cele trei variante, mărimile p, ρ, V rămîn monotone unele față de altele, în aceași sens ca în fluidul real.

Se arată [1], [5], [6] că determinarea mișcării fluidului fictiv, revine la aflarea unei funcții $\omega(\zeta) = \theta + i\tau$; analitică în exteriorul cercului unitate, care satisface pe contur condițiile:

$$\frac{d\tau}{dn} = 1 - \lambda [C_1 e^{-\tau} + 4C_2 V_\infty^2 (\sin \sigma - \sin \sigma_0)^2 e^{\tau}]; \tag{1.1}$$

și în plus

$$\tau(\infty) = 0,$$

unde λ este un parametru care trebuie determinat, iar constantele C_1 și C_2 sînt

$$C_1 = 1 + \frac{1}{4} M_\infty^2 + A M_\infty^4, \tag{1.2}$$

$$C_2 V_\infty^2 = -\frac{1}{4} M_\infty^2 - A M_\infty^4, \tag{1.3}$$

constanta A fiind

$A = \frac{1 - 2\gamma}{16}$ dacă adoptăm varianta Ciaplighin-Demcenko,

$A = \frac{2 - \gamma}{16}$ dacă adoptăm varianta Iacob,

$A = \frac{3}{16}$ dacă adoptăm varianta Kármán-Tsien,

iar σ_0 este legat de circulația Γ prin formula:

$$\Gamma = 4\pi \lambda V_\infty \sin \sigma_0 \tag{1.4}$$

2. DISTRIBUȚIA DE VITEZE PE PROFIL

Academician C. Iacob [1] arată existența și unicitatea soluției pentru problema (1.1) și arată modul de aproximare a soluției, considerînd pentru λ și τ dezvoltări de forma:

$$\lambda = \lambda_0 + M_\infty^2 \lambda_1 + M_\infty^4 \lambda_2 + \ldots, \tag{2.1}$$

$$\tau = \tau_0 + M_\infty^2 \tau_1 + M_\infty^4 \tau_2 + \ldots \tag{2.2}$$

și se obține [6]:

$$\lambda_0 = 1; \quad \tau_0 = 1; \quad \lambda_1 = \frac{1}{4} + \sin^2 \sigma_0,$$

$$\tau_1 = \operatorname{Im}\left(\frac{i}{6\zeta^2} - \frac{\sin\sigma_0}{\zeta}\right),$$

$$\lambda_2 = A + \frac{1}{72} + \sin^4\sigma_0 + 4A\sin^2\sigma_0 - \frac{3}{4}\sin^2\sigma_0,$$

$$\tau_2 = \operatorname{Im}\left(\frac{A_1}{2\zeta} - \frac{C_1 i}{3\zeta^2} + \frac{B_1}{4\zeta^3} - \frac{D_1 i}{5\zeta^4}\right).$$

unde $A_1 = (1 - 8A)\sin\sigma_0$; $B_1 = -\frac{1}{2}\sin\sigma_0$,

$$C_1 = \frac{1}{24} - 2A + \frac{13}{12}\sin^2\sigma_0 : D_1 = -\frac{7}{144}.$$

Distribuţia de viteze pe obstacol se obţine [1], [6] plecînd de la funcţia $\tau(x, y)$, soluţie a ecuaţiei (1.1) cu formula :

$$V = \frac{2V_\infty e^\tau |\sin\sigma - \sin\sigma_0|}{C_1 + 4C_2 V_\infty^2 e^{2\tau}(\sin\sigma - \sin\sigma_0)^2}. \tag{2.3}$$

Se consideră cazul $\sigma_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$; vom calcula valorile numerelor Mach critice, adică valorile lui M_∞ pentru care viteza sunetului este atinsă în domeniu.

Dacă vom nota cu M_∞^* valoarea numărului Mach critic, atunci pentru $M > M_\infty^*$ mişcarea va fi parţial supersonică, fapt care are consecinţe asupra caracteristicilor aerodinamice ale mişcării.

În fluidul fictiv viteza sunetului este dată de

$$C^2 = C_\infty^2 - \frac{\gamma - 1}{2}(V - V_\infty^2) \tag{2.4}$$

sau, punînd în evidenţă numerele lui Mach,

$$C^2 = C_\infty^2\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\left(\frac{V^2}{V_\infty^2} - 1\right)\right], \tag{2.4'}$$

problema revine la a elimina V_{max} între relaţiile (2.4') şi (2.3); în relaţia (2.4) se înlocuieşte C^2 cu V_{max}^2.

3. NUMERELE MACH CRITICE ÎN PRIMA APROXIMAŢIE

Dacă vom considera în (2.3) dezvoltările după M_∞^2 vom avea (neglijînd termenii în M_∞^4);

$$V = 2V_\infty(\sin\sigma - \sin\sigma_0)\left\{1 + M_\infty^2\left[\frac{3 - 4\cos 2\sigma}{12} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin\sigma_0\sin\sigma + \sin^2\sigma_0\right]\right\}, \tag{3.1}$$

iar V_{max} se obține luînd $\sigma = \frac{\pi}{2}$, deci

$$V_{max} = 2V_\infty (1 - \sin \sigma_0)^2 \left[1 + M_\infty^2 \left(\frac{7}{12} - \sin \sigma_0 + \sin^2 \sigma_0\right)\right]. \quad (3.2)$$

Eliminînd V_{max} între (3.2) și (2.4) avem pentru numerele Mach critice ecuația :

$$2(\gamma + 1)(1 - \sin\sigma_0)^2 M_\infty^{*2} \left\{1 + M_\infty^{*2} \left[\frac{7}{12} - \sin \sigma_0 + \sin^2 \sigma_0\right]\right\}^2 -$$

$$- \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^{*2} - 1 = 0. \quad (3.3)$$

În tabelul 1 dăm valorile lui M_∞^* calculate după diverse valori ale circulației :

Tabelul 1

	$\gamma = 1{,}4$	$\gamma = 1{,}405$
$\sigma_0 = 0$	0,42094	0,42064
$\sigma_0 = -5^0$	0,38683	0,38654
$\sigma_0 = -10^0$	0,35780	0,35752
$\sigma_0 = -15^0$	0,33301	0,33275
$\sigma_0 = -20^0$	0,31160	0,31156
$\sigma_0 = -25^0$	0,29361	0,29338
$\sigma_0 = -30^0$	0,27799	0,27776
$\sigma_0 = -35^0$	0,26457	0,26435
$\sigma_0 = -40^0$	0,25305	0,25285
$\sigma_0 = -45^0$	0,24320	0,24300
$\sigma_0 = -50^0$	0,23481	0,23461
$\sigma_0 = -55^0$	0,22772	0,22753
$\sigma_0 = -60^0$	0,22180	0,22162
$\sigma_0 = -65^0$	0,21696	0,21678
$\sigma_0 = -70^0$	0,21310	0,21292
$\sigma_0 = -80^0$	0,20809	0,20792
$\sigma_0 = -85^0$	0,20686	0,20669
$\sigma_0 = -90^0$	0,20646	0,20629

Toate zecimalele sînt exacte.

4. NUMERELE MACH CRITICE ÎN A DOUA APROXIMAȚIE ÎN CELE TREI VARIANTE

Dacă vom lua în considerare termenii în M_∞^4, din (2.3) vom obține pentru distribuția de viteze pe profil :

$$V = 2V_\infty |\sin\sigma - \sin\sigma_0| \{1 + \\ + BM_\infty^2 + CM_\infty^4\}, \quad (4.1)$$

unde

$$B = \frac{3 - 4\cos 2\sigma}{12} - \\ - \sin\sigma_0 \sin\sigma + \sin^2\sigma_0, \quad (4.2)$$

$$C = A + \frac{5}{72} + 4A \sin^2\sigma_0 - \frac{1}{4} \sin^2\sigma_0 + \sin^4\sigma_0 - \sin\sigma_0 \sin\sigma \times$$

$$\times \left(4A + \frac{1}{12} + \sin^2\sigma_0\right) - \cos 2\sigma \left(\frac{4A}{3} + \frac{1}{18} + \frac{\sin^2\sigma_0}{9}\right) -$$

$$- \frac{1}{24} \sin\sigma_0 \sin 3\sigma + \frac{\cos 4\sigma}{60}. \quad (4.3)$$

Viteza maximă se obține pentru $\sigma = \frac{\pi}{2}$. Dacă adoptăm varianta Iacob, vom înlocui V_∞ cu $V_\infty\left(1 + \frac{\gamma+1}{96} M_\infty^4\right)$, deoarece viteza fluidului fictiv la mari distanțe diferă de cea a fluidului real.

Ecuația care ne dă numărul Mach se obține eliminînd V_{max} între (2.4') și (4.1), unde luăm $\sigma = \frac{\pi}{2}$. Se obțin pentru M_∞^* ecuații de forma :

$$2(\gamma+1)(1-\sin\sigma_0)^2 M_\infty^{*2}\{1 + B_0 M_\infty^{*2} + C_0 M_\alpha^{*4}\}^2 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^{*2} - 1 = 0 \qquad (4.4)$$

unde B_0 ia aceleași valori în cele trei variante.

În tabelele 2 și 3 sînt date numerele Mach critice cu 5 zecimale, pentru $\gamma = 1,4$, respectiv $\gamma = 1,405$.

Tabelul 2 (γ=1,4)

	Ciaplîghin Demcenko	Iacob	Kármán — Tsien
$\sigma_0 = 0°$	0,42222	0,41838	0,41530
$\sigma_0 = -15°$	0,33384	0,33198	0,33153
$\sigma_0 = -30°$	0,27841	0,27730	0,27625
$\sigma_0 = -45°$	0,24331	0,24255	0,24183
$\sigma_0 = -60°$	0,22173	0,22114	0,22058
$\sigma_0 = -75°$	0,20965	0,20948	0,20899
$\sigma_0 = -90°$	0,20625	0,20577	0,20531

Tabelul 3 (γ=1,405)

	Ciaplîghin Demcenko	Iacob	Kármán-Tsien
$\sigma_0 = 0°$	0,42191	0,41808	0,41502
$\sigma_0 = -15°$	0,33358	0,33172	0,33003
$\sigma_0 = -30°$	0,27819	0,27708	0,27603
$\sigma_0 = -45°$	0,24311	0,24235	0,24163
$\sigma_0 = -60°$	0,22155	0,22096	0,22040
$\sigma_0 = -75°$	0,20980	0,20931	0,20882
$\sigma_0 = -90°$	0,20608	0,20559	0,20514

Primită la redacție la 9 iulie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei R.S. România Gautkier-Villars, Bucarest—Paris, 1957.
2. C. IACOB, *Studiul comparat al variantelor metodei de aproximație a lui S. A. Ciaplîghin, în problema mișcării subsonice în jurul cilindrului circular*, Bul. Științ. al Academiei R. S. România, Secția Șt. Matem. și Fizice, **1**, 3, p. 293 — 302 (1951).

3. I.FILIMON, *Asupra corecțiilor de compresibilitate la mișcări continue subsonice. Cazul obstacolului eliptic*, Studii și cercetări matematice, **VII**, 3 — 4, p. 46 7 — 504.
4. S. POPP, *Lecții de dinamica gazelor*, Curs litografiat, București, 1979.
5 I. FILIMON, *Mișcări circulatorii în jurul unui profil dat, Metoda corectă a lui Ciaplighin* Studii și cercetări matematice, **19**, 6, p. 831 — 844 (1967).
6. D. BENA, *Applications de la méthode de S. A. Tchapliguine a l'étude des mouvements avec circulations, dans le cas de l'obstacle circulaire*, Mathematica, **11**, 1 — 2, p. 7 — 14 (1982).

INFLUENȚA DISTRIBUȚIEI DE MASĂ ȘI A ARMONICEI GRAVITAȚIONALE J_2 ASUPRA MIȘCĂRII VEHICULULUI SPAȚIAL PE ORBITE ECUATORIALE CIRCULARE

de I. STROE

Institutul Politehnic, București

În lucrare se studiază mișcarea plană a vehiculului spațial punîndu-se în evidență influența distribuției de masă a vehiculului și a armonicei gravitaționale J_2. Se liniarizează ecuațiile de mișcare considerînd perturbații ale razei și vitezei unghiulare față de mișcarea circulară a punctului material luată ca mișcare de bază.

1. ECUAȚIILE LINIARIZATE ALE MIȘCĂRII PLANE

Centrul de masă al vehiculului are coordonatele polare r, ν față de sistemul de axe $Ox_a y_a$ situat în planul orbitei și cu centrul O în centrul corpului atractiv.

Ecuațiile mișcării centrului de masa în coordonate polare sînt:

$$\ddot{r} - r\dot{\nu}^2 = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{F_r}{m},$$

$$2\dot{r}\dot{\nu} + r\ddot{\nu} = \frac{1}{m} F_\nu. \tag{1.1}$$

În relațiile de mai sus F_r și F_ν reprezintă forțele perturbatoare față de problema celor două centre

În cazul problemei plane a mișcării, vehiculul are și o mișcare de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul orbitei, mișcare dată de ecuația

$$C\dot{r}_\omega = \mathcal{M}_3, \tag{1.2}$$

în care C este momentul de inerție față de axa principală centrală V_{z_1}, r_ω este viteza unghiulară a vehiculului, iar $\mathcal{M}_3$ este momentul forțelor față de axa V_{z_1}.

Mișcarea de bază este caracterizată de raza r_0 și de viteza unghiulară constantă

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}. \tag{1.3}$$

Introducînd parametrii mici ε, φ, funcții de timp, așa cum se procedează și în [1], p. 81, putem scrie raza și viteza unghiulară în mișcarea reală cu relațiile:

$$r(t) = r_0[1 + \varepsilon(t)],$$

$$\dot{\nu}(t) = n_0[1 + \varphi(t)]. \tag{1.4}$$

Accelerațiile centrului de masă din (1.1) se scriu, cu (1.4),

$$\ddot{r} - r\dot{\nu}^2 = r_0\ddot{\varepsilon} - r_0(1+\varepsilon)n_0^2(1+2\varphi) \approx$$

$$\approx r_0\ddot{\varepsilon} - \frac{\mu}{r_0^2} - \frac{\mu}{r_0^2}(\varepsilon + 2\varphi), \tag{1.5}$$

$$2\dot{r}\dot{\nu} + r\ddot{\nu} = 2r_0\dot{\varepsilon}\, n_0(1+\varphi) + r_0(1+\varepsilon)n_0\dot{\varphi} \approx$$

$$\approx n_0 r_0(2\dot{\varepsilon} + \dot{\varphi}). \tag{1.6}$$

În prima relație (1.1) vom înlocui și

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{r_0^2(1+2\varepsilon)} \approx \frac{1}{r_0^2}(1-2\varepsilon). \tag{1.7}$$

Dacă notăm cu θ unghiul dintre axa centrală principală V_{x_1} legată de vehicul și prelungirea razei vectoare OV, viteza unghiulară a vehiculului spațial este :

$$r_\omega = \dot{\theta} + \dot{\nu}. \tag{1.8}$$

Înlocuind relațiile (1.3) — (1.8) în ecuațiile de mișcare (1.1), (1.2), obținem

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{3\mu}{r_0^3}\varepsilon - \frac{2\mu}{r_0^3}\varphi = \frac{F_r}{mr_0},$$

$$2\dot{\varepsilon} + \dot{\varphi} = \frac{1}{mn_0r_0}F_\nu, \tag{1.9}$$

$$\ddot{\theta} + n_0\dot{\varphi} = \frac{1}{C}\mathcal{M}_3.$$

Forțele F_r, F_ν se scriu

$$F_r = F_{r_2} + F_{rV},$$

$$F_\nu = F_{\nu 2} + F_{\nu V}, \tag{1.10}$$

unde al doilea indice (2) corespunde influenței armonicei gravitaționale J_2, iar al doilea indice, V, corespunde influenței distribuției de masă a vehiculului.

În [1], p. 124, sînt date influențele armonicei J_2 ;

$$F_{r_2} = -\frac{3}{2}\mu m R^2 J_2 \frac{1}{r^4},$$

$$F_{\nu 2} = 0, \tag{1.11}$$

unde R este raza corpului atractiv.

Folosind (1.4), putem scrie

$$F_{r_2} \approx 6\mu \frac{mR^2J_2}{r_0^4} - \frac{3}{2}\mu \frac{mR^2J_2}{r_0^4}, \qquad F_{v2} = 0. \tag{1.11'}$$

În [3] sînt calculate forțele date de distribuția de masă a vehiculului :

$$F_{rV} = -\frac{3\mu}{2r^4}[(1 - 3a_{11}^2)A + (1 - 3a_{12}^2)B + (1 - 3a_{13}^2)C], \tag{1.12}$$

$$F_{vV} = -\frac{3\mu}{r^4}[a_{11}a_{21}A + a_{12}a_{22}B + a_{13}a_{23}C].$$

În relațiile de mai sus, A, B, C sînt momentele de inerție ale vehiculului față de axe centrale principale, iar a_{ij} sînt cosinuși directori.

Pentru probleme plane matricea cosinușilor directori este

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.13}$$

În căzul stabilizării gravitaționale, unghiul θ are valori mici și putem face aproximațiile :

$$\cos^2\theta \approx 1; \quad \sin^2\theta \approx 0. \tag{1.14}$$

În cazul stabilizării giroscopice vom înlocui $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ cu valoarea $\frac{1}{2}$ corespunzătoare mediei pe o perioadă a mișcării de rotație în jurul centrului de masă.

Din [3] rezultă că momentul gravitațional $\mathcal{M}_3$ se scrie

$$\mathcal{M}_3 = -\frac{3\mu a_{11}a_{12}}{r^3}(A - B). \tag{1.15}$$

Cu (1.13) obținem

$$\mathcal{M}_3 = \frac{3\mu(A - B)}{2r^3}\sin 2\theta. \tag{1.15'}$$

Introducînd forțele F_r, F_v și momentul $\mathcal{M}_3$ în (1.9) obținem, pentru unghiuri θ mici (cazul stabilizării gravitaționale), ecuațiile de mișcare

liniarizate :

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{3\mu}{r_0^3}\left[\frac{2R^2J_2}{r_0^2} + 2\frac{B+C-2A}{mr_0^2}\right]\varepsilon - \frac{2\mu}{r_0^3}\varphi = -\frac{3}{2}\frac{\mu}{r_0^5}\left[J_2R^2 + \frac{B+C-2A}{m}\right],$$

$$2\dot{\varepsilon} + \dot{\varphi} - 3\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}\frac{B-A}{mr_0^2}\theta = 0, \tag{1.16}$$

$$\ddot{\theta} + \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}\dot{\varphi} + 3\frac{\mu}{r_0^3}\frac{B-A}{C}\theta = 0.$$

Ecuațiile de mai sus formează un sistem de ecuații liniare cu coeficienți constanți. Considerînd, pentru sistemul omogen, soluții de forma $\varrho\, e^{\lambda t}$, obținem ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} -\frac{3\mu}{r_0^3}\left(1 + 2J_2\frac{R^2}{r_0^2} + 2\frac{B+C-2A}{mr_0^2}\right) + \lambda^2 & -\frac{2\mu}{r_0^3} & 0 \\ 2\lambda & \lambda & -3\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}\frac{B-A}{mr_0^2} \\ 0 & \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}\lambda & \frac{3\mu}{r_0^3}\frac{B-A}{C} + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.17}$$

Notînd

$$\lambda = \omega n_0 = \omega\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}, \tag{1.18}$$

ecuația caracteristică devine

$$\begin{vmatrix} -3\left(1 + 2J_2\frac{R^2}{r_0^2} + 2\frac{B+C-2A}{mr_0^2}\right) + \omega^2 & -2 & 0 \\ 2\omega & \omega & -3\frac{B-A}{mr_0^2} \\ 0 & \omega & 3\frac{B-A}{C} + \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.17'}$$

Ecuația de mai sus se scrie sub forma :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \omega^2 & -2 & 0 \\ 2\omega & \omega & \alpha_{23} \\ 0 & \omega & \alpha_{33} + \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \tag{1.17''}$$

coeficienții α_{ij} rezultînd din compararea relațiilor (1.17'), (1.17'').

Dezvoltînd determinantul (1.17''), obținem ecuația caracteristică sub forma :

$$\omega^4 + (\alpha_{11} + \alpha_{33} - \alpha_{23} + 4)\omega^2 + \alpha_{11}(\alpha_{33} - \alpha_{23}) + 4\alpha_{33} = 0, \quad (1.19)$$

care devine, după înlocuirea coeficienților α_{ij}.

$$\omega^4 + \left[1 - 6J_2\frac{R^2}{r_0^2} - \frac{3(B + 2C - 3A)}{mr_0^2} + 3\frac{B - A}{C}\right]\omega^2 -$$

$$-9(B - A)\left(1 + 2J_2\frac{R^2}{r_0^2} + 2\frac{B + C - 2A}{mr_0^2}\right)\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{mr_0^2}\right) + 12\frac{B - A}{C} = 0. \quad (1.19')$$

Cu ajutorul rădăcinilor ecuației de mai sus putem scrie soluția sistemului (1.16).

Dacă în (1.19') se neglijează termenii în J_2 și $-\frac{1}{mr_0^2}$, se obține ecuația aproximativă

$$\omega^4 + \left(1 + 3\frac{B - A}{C}\right)\omega^2 + 3\frac{B - A}{C} = 0, \quad (1.20)$$

cu rădăcinile :

$$\omega_1^2 = -3\frac{B - A}{C}, \quad \omega_2^2 = -1. \quad (1.21)$$

Prima rădăcină se obține din a treia ecuație (1.16) dacă se neglijează termenul în $\dot{\varphi}$, deci dacă se neglijează influența micșării centrului de masă asupra mișcării vehiculului în jurul centrului de masă, iar a doua rădăcină corespunde unor perturbații periodice care au perioada egală cu perioada mișcării centrului de masă pe orbita de bază.

2. INFLUENȚA MIȘCĂRII DE ROTAȚIE ASUPRA TRAIECTORIEI

2.1. CAZUL STABILIZĂRII GRAVITAȚIONALE

Vom considera că mișcarea de rotație în jurul centrului de masă este dată de

$$\theta = \theta_0 \cos p_\theta t, \quad (2.1.1)$$

cu

$$p_\theta = n_0\sqrt{3\frac{B - A}{C}}. \quad (2.1.2)$$

pentru orbite circulare. Putem presupune și alte valori ale pulsației p_θ realizate prin comandă.

Ecuațiile traiectoriei se obțin din primele două ecuații (1.16) în care se introduce θ din (2.1.1):

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{3\mu}{r_0^3}\left[1 + 2J_2\frac{R^2}{r_0^2} + 2\frac{B+C-2A}{mr_0^2}\right]\varepsilon - \frac{2\mu}{r_0^3}\varphi =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{\mu}{r_0^5}\left[J_2R^2 + \frac{B+C-2A}{m}\right], \tag{2.1.3}$$

$$2\dot{\varepsilon} + \dot{\varphi} = 3\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}\frac{B-A}{mr_0^2}\theta_0 \cos p_\theta t.$$

Eliminînd φ între cele două ecuații de mai sus, se obține:

$$\dddot{\varepsilon} + \frac{\mu}{r_0^3}\left[1 - 6J_2\frac{R^2}{r_0^2} - 6\frac{B+C-2A}{mr_0^2}\right]\dot{\varepsilon} =$$

$$= 6\left(\frac{\mu}{r_0^3}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{B-A}{mr_0^2}\theta_0 \cos p_\theta t. \tag{2.1.4}$$

Integrînd ecuația (2.1.4), obținem, pentru condițiile inițiale ($t = 0$)

$$\varepsilon = 0, \qquad \dot{\varepsilon} = C_0, \qquad \ddot{\varepsilon} = 0, \tag{2.1.5}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{p_\varepsilon}\left[C_0 - \frac{6\left(\frac{\mu}{r_0^3}\right)^{3/2}\frac{B-A}{mr_0^2}}{p_\varepsilon^2 - p_\theta^2}\right]\sin p_\varepsilon t +$$

$$+ \frac{6\left(\frac{\mu}{r_0^3}\right)^{3/2}\frac{B-A}{mr_0^2 p_\theta}}{p_\varepsilon^2 - p_\theta^2}\theta_0 \sin p_\theta t, \tag{2.1.6}$$

cu

$$p_\varepsilon = n_0\sqrt{1 - 6J_2\frac{R^2}{r_0^2} - 6\frac{B+C-2A}{mr_0^2}}. \tag{2.1.7}$$

Din (2.1.6) observăm că raza vectoare are o perturbație de pulsație p_θ (oscilație forțată) și o perturbație de pulsație (p_ε) dată de (2.1.7), apropiată de viteza unghiulară a mișcării pe traiectoria circulară de bază.

Dacă $p_\theta = p_\varepsilon$, din (2.1.6) rezultă că se ajunge la rezonanță. Totuși, nu putem trage concluzia că mișcarea devine instabilă, deoarece liniarizarea ecuațiilor s-a făcut în ipoteza că ε este un parametru mic.

Variația vitezei unghiulare pentru orbita reală, dată prin parametrul φ, se obține introducînd soluția (2.1.6) în a doua ecuație (2.1.3).

2.2. CAZUL STABILIZĂRII GIROSCOPICE

Dacă vehiculul are o mişcare de rotaţie în jurul centrului de masă cu viteza unghiulară mare, perpendiculară pe planul orbitei, putem neglija perturbaţiile care pot să apară faţă de mişcarea de rotaţie de bază

$$\dot{\theta} = \Omega_\theta = \text{const.} \tag{2.2.1}$$

Ecuaţiile traiectoriei se obţin din primele două ecuaţii (1.9) în care se introduc forţele F_r, F_v corespunzătoare rotaţiei rapide. Forţele date de armonica J_2 rămîn aceleaşi ca în cazul stabilizării gravitaţionale.

Folosind (1.1.2), forţa F_{rV} devine

$$F_{rV} = -\frac{3\mu}{2r^4}[(1 - 3/\cos^2\theta)A + (1 - 3\sin^2\theta)B + C]. \tag{2.2.2}$$

Înlocuind $\cos^2\theta$ şi $\sin^2\theta$ cu $\frac{1}{2}$, valoarea lor medie pe o perioadă şi punînd

$$\frac{1}{r^4} \approx \frac{1}{r_0^4}(1 - 4\varepsilon), \tag{2.2.3}$$

obţinem

$$\bar{F}_{rV} = -\frac{3\mu}{r_0^4}(A + B - 2C) + \frac{3\mu}{4r_0^4}(A + B - 2C) \tag{2.2.2'}$$

Din (1.1.2), forţa F_{vV} se scrie

$$F_{vV} = \frac{3}{2}\frac{B - A}{r^4}\sin 2\theta, \tag{2.2.4}$$

care are valoarea medie pe o perioadă

$$\bar{F}_{vV} = 0. \tag{2.2.4'}$$

Cu relaţiile de mai sus, primele două ecuaţii (1.9) devin :

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} - \frac{3\mu}{r_0^3}\varepsilon - \frac{2\mu}{r_0^3}\varphi &= \frac{6\mu R^2 J_2}{r_0^5}\varepsilon - \frac{3}{2}\frac{\mu R^2 J_2}{r_0^5} - \\ &- \frac{3\mu}{r_0^5}\frac{A + B - 2C}{m}\varepsilon + \frac{3\mu}{4r_0^5}\frac{A + B - 2C}{m}, \\ 2\dot{\varepsilon} + \dot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Eliminînd φ între ecuaţiile de mai sus, obţinem

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\mu}{r_0^3}\left(1 - 6J_2\frac{R^2}{r_0^2} - 6\frac{C - \frac{A + B}{2}}{mr_0^2}\right)\dot{\varepsilon} = 0. \tag{2.2.6}$$

Integrînd ecuaţia (2.2.6) cu condiţiile iniţiale ($t = 0$)

$$\varepsilon = 0, \qquad \dot{\varepsilon} = C_0, \qquad \ddot{\varepsilon} = 0 \tag{2.2.7}$$

rezultă

$$\varepsilon = \frac{C_0}{p_\varepsilon} \sin p_\varepsilon t, \tag{2.2.8}$$

cu

$$p_\varepsilon = n_0 \sqrt{1 - 6J_2 \frac{R^2}{r_0^2} - 6 \frac{C - \frac{A+B}{2}}{mr_0^2}}. \tag{2.2.9}$$

Se observă că pulsaţia perturbaţiilor ε, φ se obţine din formula stabilită pentru cazul stabilizării gravitaţionale înlocuind expresia $(B + C - 2A)$ cu $\left(C - \frac{A+B}{2}\right)$.

Primită la redacţie la 14 martie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. M. M. NIŢĂ, *Teoria zborului spaţial*, Edit. Academiei R. S. România 1973.
2. I. STROE, *Asupra mişcării plane a vehiculului spaţial în prezenţa unui centru atractiv*, St. cerc. mec. apl., **44**, 5 (1985).
3. I. STROE, *Perturbaţiile mişcării centrului de masă al vehiculului spaţial date de mişcarea în jurul centrului de masă*, St. cerc. mec. apl., **44**, 6 (1985).

O SOLUȚIE CONSISTENTĂ PENTRU CALCULUL COLOANELOR PASIVE

de G. ONU

Institutul de Proiectări Transporturi Auto, Navale și Aeriene

Articolul descrie un procedeu pentru calculul coloanelor supuse unor presiuni laterale provocate de deplasarea neuniformă a terenului din jur. Soluția se obține cu ajutorul unor funcții locale prestabilite. Procedeul, care se încadrează în metoda elementelor finite, poate fi inclus cu ușurință în programele existente pentru calculul structurilor în conlucrare cu terenul de fundație.

1. INTRODUCERE

După modul în care sînt solicitate, coloanele încărcate transversal se împart în două categorii. În prima categorie sînt incluse coloanele active, acele coloane care preiau încărcarea de la suprastructură și o transmit la terenul de fundație prin presiune laterală. În a doua categorie, categoria coloanelor pasive, intră coloanele solicitate transversal prin deformarea proprie a terenului din jur. Dacă în primul caz terenul se deformează în urma preluării încărcării de la coloane, în al doilea caz, deformarea terenului este cauza care induce eforturi în coloane.

În figura 1 este reprezentat un caz tipic de coloană pasivă solicitată prin deformarea terenului. Coloana străbate un strat de teren în mișcare,

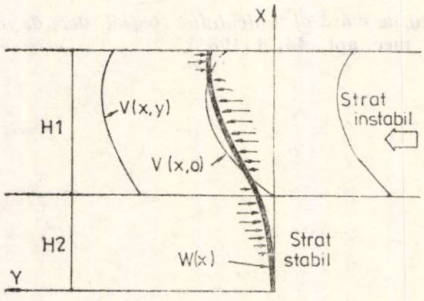


Fig. 1. — Coloană pasivă.

de grosime $H1$ și se încastrează, pe lungimea $H2$, într-un strat stabil. Deformata proprie a terenului, neinfluențată de prezența coloanei, este reprezentată de curbele $V(x, y)$. Coloana, antrenată de masa de pămînt în mișcare, se deformează ajungînd într-o poziție de echilibru, $W(x)$, în care presiunile de contact se autoechilibrează. În această situație, după cum rezultă din figura 1, terenul joacă atît un rol activ, de încărcare a coloanei, cît și un rol pasiv, de rezistență la deformarea coloanei. Pentru a putea determina presiunile de contact și eforturile din coloană, trebuie să se cunoască atît deformata proprie a terenului $V(x, 0)$ din amplasamentul coloanei, cît și fibra medie deformată a coloanei $W(x)$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 1, 1986, P. 36–45

Au fost propuse mai multe procedee de soluționare a problemei. Dintre acestea, utilizarea în extenso a metodei elementelor finite, cu luarea în considerație a proprietăților de deformare elastoplastică a terenului, conduce la cele mai bune rezultate [13]. Pe de altă parte, consumul de timp și de memorie la calculator fac ca soluția obținută pe aceasta cale să fie adeseori prea scumpă. După cum se subliniază în [3], utilizarea acestui procedeu este justificată numai în stadiile finale ale proiectării obiectivelor importante. Pentru problemele de proiectare curentă trebuie să se facă apel la procedee de calcul mai puțin costisitoare. Unul dintre acestea, prezentat în [12], utilizează o schemă cu diferențe finite care are la bază soluția dată de Mindlin pentru o sarcină concentrată în interiorul unui semispațiu elastic și omogen. Autorul procedeului recomandă utilizarea acestuia și în situațiile în care se admite că terenul de fundație este constituit dintr-un material stratificat, ideal elasto-plastic. Calculul coloanelor pasive se poate efectua, de asemenea, cu ajutorul teoriei grinzii rezemate pe mediu elastic în ipoteza lui Winkler. În situațiile în care se admite valabilitatea acestei ipoteze, iar terenul este constituit din cel mult două straturi omogene, soluția analitică a mediului Winklerian este direct utilizabilă [7]. În caz contrar, se caută o soluție numerică, pentru aceasta în [12] recomandîndu-se utilizarea metodei diferențelor finite. Deși în multe situații soluția obținută folosind modelul lui Winkler nu diferă substanțial de cea care se obține pe baza teoriei lui Mindlin, se admite [9, 5, 2, 10, 14] că prin sporirea numărului parametrilor care definesc mediul suport, se poate obține o îmbunătățire însemnată a soluției în sensul teoriei elasticității.

Extinderea cea mai firească a modelului Winklerian o constituie introducerea, alături de parametrul *Es* care caracterizează compresabilitatea terenului, a unui parametru suplimentar *Gs* prin care se ia în considerație capacitatea de repartiție a terenului [9, 2, 10, 14]. În [10] se prezintă un procedeu numeric de calcul în domeniul neliniar elastic a fundațiilor pe coloane active, procedeu în care se ține seama de variația cu adîncimea a celor doi parametri. Recent, în [14], au fost prezentate două elemente finite liniare pentru calculul grinzilor rezemate pe un mediu elastic caracterizat prin aceiași parametri considerați constanți. Una dintre cele două matrice de rigiditate derivate în [14] constituie o particularizare a matricei obținute anterior în [10].

În cele ce urmează, tratînd aspectul static al problemei, se va prezenta o soluție pentru calculul coloanelor pasive, soluție consistentă cu formularea elementului finit de grindă încovoiată care este utilizat la modelarea coloanelor. La fel ca în [10], se va ține seama de variația parametrilor *Es* și *Gs* în lungul coloanei.

2. METODA DE CALCUL

Ecuația diferențială care caracterizează echilibrul elastic al coloanei pasive poate fi obținută din condiția de minim a energiei potențiale totale a ansamblului coloană-teren. Considerînd coloana pasivă în stare de deformație statică, energia de deformație acumulată în coloană și în mediul

suport se calculează cu relaţia

$$U = \frac{1}{2}\int_l \left[EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 W(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + Gs(x)\left(\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V(x,\,o)}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + Es(x)\,(W(x) - V(x,\,o))^2 \right] \mathrm{d}x, \qquad (1)$$

în care $W(x)$ reprezintă săgeata coloanei faţă de un reper fix, poziţia nedeformată a acesteia, iar $V(x, o)$ este deformata proprie a terenului în raport cu acelaşi reper.

Primul termen din relaţia (1) reprezintă energia de deformaţie acumulată în coloană dintr-o solicitare de încovoiere pură. Semnificaţia celorlalţi doi termeni rezultă din cele discutate în legătură cu relaţiile (2) şi (3).

2.1. **Modelul fundaţiei generalizate.** Pe baza ipotezei lui Winkler, reacţiunea globală normală a terenului $p(x)$, în secţiunea curentă a coloanei, se admite a fi proporţională cu deplasarea locală relativă :

$$p(x) = Es(x)\,(W(x) - V(x,\,o)). \qquad (2)$$

În consecinţă, termenul $p(x)\,(W(x) - V(x, o))/2$ reprezintă energia acumulată în resoartele mediului Winklerian cînd se admite că, pe lîngă deformata elastică $W(x)$,aceste resoarte suportă deplasarea rigidă dată de curba $V(x, o)$.

Luînd în consideraţie efectul de cuplu realizat de forţele de aderenţă longitudinală, forţe care devin active cînd secţiunea coloanei se roteşte, şi admiţînd proporţionalitatea acestora cu rotirea relativă a secţiunii, se obţin momentele-reacţiuni ale terenului :

$$m(x) = Gs(x)\left(\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}V(x,\,o)}{\mathrm{d}x}\right). \qquad (3)$$

Acceptînd ipoteza în virtutea căreia forţele de aderenţă sînt preluate de nişte resoarte longitudinale, termenul $m(x)\,(\mathrm{d}W(x)/\mathrm{d}(x) - \mathrm{d}V(x, o)/\mathrm{d}x)/2$ reprezintă energia de deformaţie acumulată în aceste resoarte cînd, pe lîngă rotirea $\mathrm{d}W(x)/\mathrm{d}x$ a secţiunii pilotului, aceste resoarte suportă deplasări rigide exprimate prin derivata curbei $V(x, o)$.

Dacă se ia $V(x, o) = 0$, iar Es şi Gs sînt constante, relaţiile (2) şi (3) caracterizează modelul de fundaţie generalizată propuse de Kerr [8]. Acest model este asemănător celui utilizat anterior în [9].

Forţele de aderenţă care generează momentele distribuite $m(x)$ nu pot depăşi capacitatea terenului de a rezista la forfecare transversală. Legătura dintre aceste forţe şi momentele distribuite $m(x)$ rezultă din

figura 2*a*. La o rotire a secțiunii cu unghiul $(dW(x)/dx - dV(x, o)/dx)$, pe suprafața laterală a coloanei apar eforturi longitudinale de aderență τ, proporționale cu distanța la axa neutră. Aceste eforturi depind de parametrul aderenței $t(x)$ care, la rîndul său, variază în funcție de caracteristicile terenului, adîncime, stratificație și modul de instalare a coloanei. $Gs(x)$ depinde deci de parametrul $t(x)$ și de geometria secțiunii.

2.2. **Ecuația diferențială de echilibru a coloanei pasive.** Revenind la relația (1), se observă că, în lipsa forțelor exterioare, energia potențială totală este egală cu energia de deformație a coloanei și a mediului suport :

$$\Pi = U. \qquad (4)$$

Dacă funcția $W(x)$ reprezintă deformata de echilibru a coloanei sub acțiunea deplasării proprii a terenului, valoarea energiei potențiale a sistemului coloană-pilot, calculată cu relația (1), va fi minimă. În această situație, $W(x)$ realizează extremul funcționalei Π, ceea ce se exprimă prin anularea primei variații a acesteia :

$$\partial\Pi = 0. \qquad (5)$$

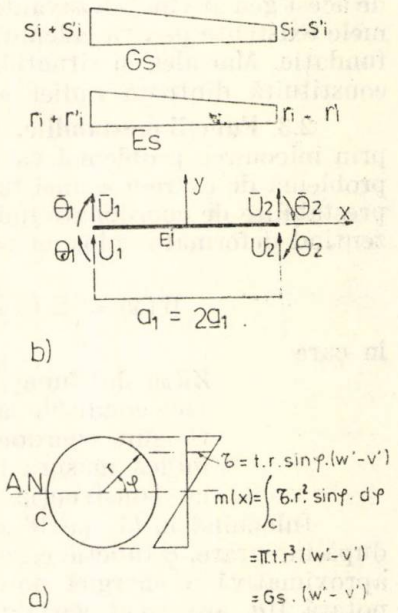


Fig. 2. — *a*) Determinarea parametrului $Gs(x)$ pentru secțiune circulară ; *b*) Variația parametrilor $Gs(x)$ și $Es(x)$ în lungul unui element de coloană.

Pe de altă parte, condiția (5) este îndeplinită dacă funcția extremală $W(x)$, împreună cu primele ei derivate, satisface ecuația diferențială a lui Euler asociată funcționalei și, în același timp, verifică condițiile la limită [6, 4].

Dacă se notează cu F integrandul din (1), ecuația diferențială asociată funcționalei Π se scrie :

$$\frac{\partial F}{\partial W} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial W'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial W''}\right) = 0. \qquad (6)$$

Înlocuind în (6) derivatele integrandului F, se va obține ecuația diferențială care guvernează echilibrul elastic al coloanei pasive :

$$EI\frac{d^4W(x)}{dx^4} - Gs(x)\left(\frac{d^2W(x)}{dx^2} - \frac{d^2V(x, o)}{dx^2}\right) +$$

$$+ Es(x)(W(x) - V(x, o)) = 0. \qquad (7)$$

Ecuația (7) are soluție exactă numai în cîteva cazuri particulare. O astfel de soluție (cazul $Gs = 0$ și Es constant) este utilizată într-un studiu

parametric care analizează efectul configurației deformatei terenului asupra deplasărilor și eforturilor din pilot [7]. Diversitatea condițiilor de fundare, exprimată prin variația celor doi parametri în lungul coloanei, împiedică obținerea unei soluții generale. Este posibilă o rezolvare aproximativă a ecuației (7) pe cale numerică, prin diferențe finite. O eventuală soluție de acest gen are însă dezavantajul de a se adapta cu dificultate la programele existente pentru calculul structurilor care conlucrează cu terenul de fundație. Mai ales în situațiile în care interfața structura-coloană este constituită dintr-un radier elastic.

2.3. **Funcții prestabilite.** O soluție numerică completă se poate obține prin înlocuirea problemei variaționale care a condus la ecuația (7), cu o problemă de extrem a unei funcții constituite ca o combinație de funcții prestabilite de coordonate liniar independente. O astfel de funcție, reprezentînd deformata coloanei pasive, se poate scrie sub forma

$$W(x) = \Sigma\, Ci\, Zi(x), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots\ j, \tag{8}$$

în care

— $Zi(x)$ sînt funcții derivabile, convenabil alese pentru a satisface condițiile la limită și a asigura convergența soluției, iar
— Ci sînt coordonate generalizate, inițial necunoscute, care indică măsura în care participă fiecare din funcțiile $Zi(x)$ la construcția soluției.

Înlocuind în (1) pe $W(x)$ împreună cu derivatele sale se va obține, după integrare, o funcție care, avînd în vedere (4), constituie o formulare aproximativă a energiei potențiale a coloanei pasive. Această funcție, notată Πa, are drept variabile independente cele j coordonate generalizate. Din condiția ca acestea să ia valorile care minimizează funcția Πa, se va obține un sistem de ecuații algebrice liniare

$$\frac{\partial \Pi a}{\partial Ci} = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots j, \tag{9}$$

din care rezultă coordonatele $C1,\ C2,\ \ldots\ Cj$.

Deformata $W(x)$, obținută pe această cale, nu verifică decît în mod aproximativ ecuația (7). Ea aproximează soluția reală făcînd ca energia potențială calculată cu relațiile (1), (8) și (9) să mărginească superior valoarea exactă. Deoarece energia potențială astfel calculată nu poate fi mai mică decît valoarea minimă reală, se deduce că pentru o anumită deformată proprie a terenului energia acumulată în resoartele fundației generalizate va fi întotdeauna mai mică decît cea reală.

Din cele arătate rezultă că acuratețea soluției depinde de capacitatea funcțiilor prestabilite de a se substitui deformatei reale și că eficiența procedeului este, într-un anumit sens, invers proporțională cu numărul acestor funcții.

Există două posibilități de a se alege funcțiile $Zi(x)$. Dacă alegerea se face astfel încît funcțiile au un caracter global, acoperind întreaga lungime a coloanei, soluția obținută va aparține manierei tradiționale de aplicare a metodei lui Ritz. Dacă însă, funcțiile prestabilite sînt locale, alese astfel încît fiecare din ele acoperă numai o anumită zonă a coloanei,

procedeul de calcul se va încadra în metoda elementelor finite, putînd fi interpretat și ca o variantă modernă a metodei Ritz.

Din punctul de vedere al efortului de calcul consumat pentru rezolvarea ecuației (9), funcțiile locale sînt mai eficiente decît cele globale. Ele conduc întotdeauna la sisteme de ecuații liniare cu matrice bandă. Aceste funcții au și alte avantaje, avantaje care conferă metodei elementelor finite atributele celui mai puternic instrument teoretic pentru calculul structurilor [1].

2.4. **Utilizarea funcțiilor locale.** Folosind funcții locale în cele ce urmează, și presupunînd coloana împărțită în n zone, nu neapărat egale, vom rescrie relația (8) sub o formă mai convenabilă

$$W(x) = \Sigma Ni\,\Delta i, \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{10}$$

în care sumarea se extinde asupra celor n zone (elemente) ale coloanei.

În (10) funcțiile prestabilite $Zi(x)$ sînt reprezentate de funcțiile de interpolare Ni, iar coordonatele generalizate capătă semnificație fizică, devenind deplasările nodale ale modelului.

Produsul

$$Wi = Ni\Delta i \tag{11}$$

definește în mod unic deformata elementului i în raport cu gradele de libertate nodală.

Funcțiile de interpolare

$$Ni = [N_{i1},\ N_{i2},\ N_{i3},\ N_{i4}] \tag{12}$$

sînt alese astfel încît satisfac automat condițiile de capăt ale elementului [11]:

$$\begin{aligned}
N_{i1} &= \frac{1}{2} - \frac{3x}{4\underline{a}_i} + \frac{x^3}{4\underline{a}_i^3},\\
N_{i2} &= -\frac{\underline{a}_i}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4\underline{a}_i} - \frac{x^3}{4\underline{a}_i^2},\\
N_{i3} &= \frac{1}{2} + \frac{3x}{4\underline{a}_i} - \frac{x^3}{4\underline{a}_i^3},\\
N_{i4} &= \frac{\underline{a}_i}{4} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4\underline{a}_i} - \frac{x^3}{4\underline{a}_i^2}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Deplasările nodale

$$\Delta i = [U_{i1},\ \theta_{i1},\ U_{i2},\ \theta_{i2}] \tag{14}$$

care constituie gradele de libertate ale elementului, sînt reprezentate în figura 2*a*.

În vederea obținerii unei soluții consistente și, totodată, pentru a se ajunge la o formulare convenabilă a energiei potențiale, deformata proprie a terenuluiu $V(x, o)$ va fi descrisă cu ajutorul aceloraşi funcții de interpolare Ni. Drept coordonate generalizate vor figura deplasările reale ale terenului de la nodurile elementului. Deci

$$V(x, o) = \Sigma Ni\ \overline{\Delta i}, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{15}$$

în care Ni este dat de (13), iar $\overline{\Delta i}$ este

$$\overline{\Delta i} = [\overline{U}_{i1}\ \overline{\theta}_{i1}, \overline{U}_{i2}, \overline{\theta}_{i2}]. \tag{16}$$

Componentele vectorului $\overline{\Delta i}$ sînt reprezentate în figura 2*a*.

Ținînd seama de relațiile (10 — 16) și avînd în vedere (4), energia potențială a coloanei și a mediului suport se rescrie sub forma

$$\Pi a = \frac{1}{2}\Sigma\Delta^T i \int_{a_i}\left[\frac{\mathrm{d}^2 Ni}{\mathrm{d}x^2}\right]^T EI\left[\frac{\mathrm{d}^2 Ni}{\mathrm{d}x^2}\right]\mathrm{d}x\Delta i +$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma(\Delta i - \overline{\Delta i})^T \int\left(\left[\frac{\mathrm{d}Ni}{\mathrm{d}x}\right]^T\left(s_i - s_i'\frac{x}{a_i}\right)\left[\frac{\mathrm{d}Ni}{\mathrm{d}x}\right] +\right.$$

$$\left. + [Ni]^T\left(r_i - r_i'\frac{x}{a_i}\right)[Ni]\right)\mathrm{d}x(\Delta i - \overline{\Delta i}), \quad i = 1,2,\ldots n, \tag{17}$$

în care sumarea se referă la cele n elemente ale pilotului. Variația parametrilor Es și Gs este exprimată în funcție de valorile lor de la nodurile elementelor. După cum rezultă și din figura 2*b*, cei doi parametri au o creștere liniară în lungul elementului.

După efectuarea integrării, relația (17) devine

$$\Pi a = \frac{1}{2}\Delta i^T Kp_i \Delta i + \frac{1}{2}(\Delta i - \overline{\Delta i})^T Kt_i(\Delta i - \overline{\Delta i}), \tag{18}$$

unde Kp_i reprezintă matricea de rigiditate standard a unui element de grindă încovoiată, iar Kt_i constituie matricea de rigiditate a mediului de rezemare aferent elementului i.

Elementele matricei simetrice Kt_i sînt următoarele :

$$\begin{aligned}
k_{11} &= (156r_i + 84r_i')\,a_i^2 + 504\,s_i,\\
k_{12} &= (-22r_i - 8r_i')\,a_i^3 + (-42\,s_i + 42\,s_i')\,a_i,\\
k_{13} &= 54\,r_i a_i^2 + 504\,s_i,\\
k_{14} &= (13r_i + r_i')a_i^3 + (-42\,s_i - 42s_i')\,a_i,\\
k_{22} &= (4r_i + r_i')\,a_i^4 + (56\,s_i + 28\,s_i')\,a_i^2
\end{aligned} \tag{19}$$

$$k_{23} = (-13\, r_i + r_i')\, a_i^3 + (42 s_i - 42\, s_i')\, a_i$$

$$k_{24} = -\, 3 r_i\, a_i^4 - 14 s_i a_i^2,$$

$$k_{33} = (156\, r_i - 84\, r_i')\, a_i^2 + 504\, s_i, \tag{19}$$

$$k_{34} = (22 r_i - 8 r_i')\, a_i^3 + (42\, s_i + 42\, s_i')\, a_i,$$

$$k_{44} = (4 r_i - r_i')\, a_i^4 + (56\, s_i - 28\, s_i')\, a_i^2.$$

Toți termenii matricei trebuie împărțiți la 420 a_i. Dacă se va lua $r_i' = s_i' = 0$, se va obține matricea corespunzătoare cazului în care parametrii *Es* și *Gs* sînt constanți.

Soluția problemei rezultă din minimizarea energiei potențiale (18) în raport cu gradele de libertate ale modelului :

$$\frac{\partial \Pi a}{\partial \Delta i} = \Sigma\, ((Kp_i + Kt_i)\, \Delta i - Kt_i\, \bar{\Delta} i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots n. \tag{20}$$

Relația astfel obținută constituie forma neasamblată a sistemului ecuațiilor de condiție ale coloanei pasive. Sistemul global de ecuații se obține cu ajutorul transformărilor

$$\Delta i = Li \Delta,\ \bar{\Delta} i = Li\, \bar{\Delta}. \tag{21}$$

în care Li este matricea de localizare a deplasărilor nodale ale elementului i, Δ este vectorul deplasărilor nodurilor coloanei, iar $\bar{\Delta}$ este vectorul deplasărilor proprii ale terenului de la nodurile coloanei.

Substituind (21) în (20) și apoi înmulțind la stînga fiecare termen cu Li, rezultă sistemul global de ecuații. Deci, succesiv,

$$\Sigma((Kp_i + Kt_i)\, Li\, \Delta i - Kt_i\, Li \bar{\Delta} i) = 0,$$

$$\Sigma(L^T i (Kp_i + Kt_i)\, Li\, \Delta i - L^T i\, Kt_i\, Li\, \bar{\Delta} i) = 0 \tag{22}$$

$$K\Delta - K_t \bar{\Delta} = 0.$$

În ultima relație din (22), K este matricea globală a ansamblului coloană-teren, iar K_t reprezintă contribuția terenului în această matrice. Rezolvînd această ecuație cu privire la Δ se obțin deplasările pilotului în funcție de deplasările proprii ale terenului :

$$\Delta = K^{-1} K_t \bar{\Delta}. \tag{23}$$

Aceeași ecuație poate fi folosită de asemenea pentru stabilirea deformatei terenului natural atunci cînd deplasările coloanei au fost determinate prin măsurători :

$$\bar{\Delta} = K_t^{-1} K \Delta. \tag{24}$$

În sfîrșit, se poate imagina un procedeu iterativ în care soluțiile (23) și (24) sînt utilizate alternativ în vederea determinării celor doi parametri ai terenului în funcție de deplasările coloanei și ale terenului, deplasări determinate prin măsurători.

2.5. **Calcul în domeniul neliniar elastic.** Soluția obținută cu relația (23) este utilă în situațiile în care deplasările proprii ale terenului sînt mici și deci un calcul liniar-elastic poate fi considerat satisfăcător. Dacă însă aceste deplasări sînt importante, neliniaritatea reologică nu mai poate fi desconsiderată fiind deci necesar să se țină seama de faptul că procesul de interacțiune este guvernat de relații neliniare între deplasările coloanei și răspunsul terenului. Întrucît curbele de interacțiune $p - y$, determinate pentru calculul coloanelor active, nu pot fi folosite în cazul terenurilor instabile, se recurge la ipoteza mediului de rezemare ideal elastoplastic [12].

Soluția se va obține aplicînd procedeul de încărcare cu trepte neegale descris în [10].

3. EXEMPLU COMPARATIV

Pentru comparație se ia unul din cazurile studiate în [7]. Acesta corespunde situației reprezentate în figura 1, dacă se consideră $H2 = 0{,}2H1$, $Gs = 0$, $Es1$ și $Es2$ constante, $H1(Es1/4EI) = 3$, iar configurația deformatei terenului dată de relația

$$V(x, o) = 0{,}73 + 2{,}13\,\overline{x} - 4{,}69\overline{x}^2 + 1{,}83\overline{x}^3,$$

în care $\overline{x} = x/H1$.

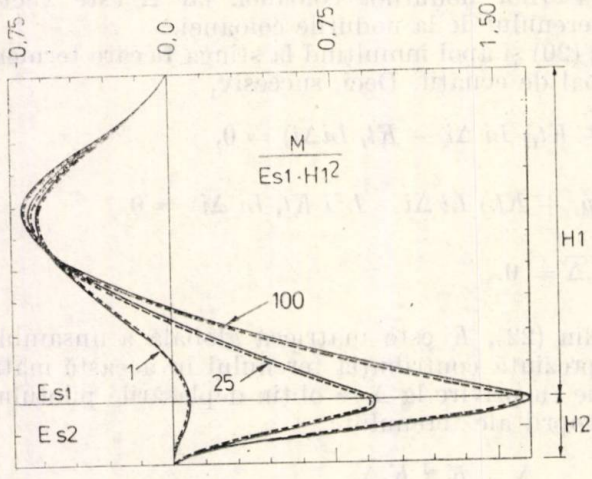


Fig. 3. — Variația momentului încovoietor în lungul coloanei.

În figura 3 este reprezentată variația momentului încovoietor în lungul coloanei cînd $Es2/Es1 = 1$, $Es2/Es1 = 25$ și $Es2/Es1 = 100$. Cu linie continuă sînt reproduse rezultatele din [7] și cu linie întreruptă cele obținute aplicînd soluția (23). Se constată o bună concordanță a rezultatelor.

4. CONCLUZII

S-a prezentat un procedeu pentru calculul coloanelor amplasate în terenuri instabile. Procedeul se caracterizează prin aceea că atît caracteristicile de rigiditate ale ansamblului coloană-teren, cît și încărcările echivalente deplasării terenului se deduc folosind aceleași funcții prestabilite.

NOTAȚII

a_i	reprezintă	lungimea elementului de coloană;
Ci		— coordonate generalizate;
$Es(x)$, $Gs(x)$		— parametrii terenului;
K, Kp, Kt		— matrice de rigiditate;
Ni		— funcții de formă;
$V(x, y)$		— deformata proprie a terenului;
$W(x)$		— fibra medie deformată a coloanei.

Primită la redacție la 27 februarie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. C. AVRAM și colab., *Structuri din beton armat Metoda elementelor finite — Teoria echivalenților*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1984.
2. A. BELEȘ și colab., *Calculul construcțiilor amplasate pe medii deformabile*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1977.
3. E. E. DE BEER, *Piles Subjected to Static Lateral Loads*, State-of-the Art Report, IX ICSMFE, Tokio, 1977.
4. I. FILIMON, M. V. SOARE, *Ecuații diferențiale cu aplicații în mecanica construcțiilor*, Edit. tehnică, București, 1983.
5. D. Q. FLETCHER, L. R. HERMANN, *Elastic Foundation Representation of Continuum*, Journal ASCE, 1971, EMI, p. 95 — 107.
6. M. J. FORRAY, *Calcul variațional în știință și tehnică*, Edit. tehnică, București, 1975 (traducere din l. engleză).
7. R. FRANK, M. KUTNIAK, *Etude de pieux soumis à des poussées latérales*, Rapport LPC No 107 LCPC, Paris, Dec. 1981.
8. A. D. KERR, *Elastic and Viscoelastic Foundation Models*, Journal of Applied Mechanics, **31**, 3, p. 491 — 498 (1964).
9. M. MIȘICU, *Grinzi și plăci pe teren elastic*, Buletin Științific, Secțiunea de științe tehnice și chimice, **111**, 2 — 4 (1951).
10. G. ONU, *Calculul fundațiilor pe coloane în domeniul neliniar elastic*, St. Cerc. Mec. Apl., **40**, 5, p. 697 — 714 (1981).
11. G. ONU, *Includerea efectului forței tăietoare în matricele elementului de grindă dreaptă*, St. Cerc. Mec. Apl., **41**, 4, p. 459 — 469 (1982).
12. H. G. POULOS, E. H. DAVIS, *Pile Foundation Analysis and Design*, Wiley, New York, 1980.
13. R. K. ROWE, H. G. POULOS, *A Method for Predicting the Effect of Piles on Slope Behaviour*, Proc. 3rd Int. Conf. Num. Methods in Geomechs., Aachen, Balkema, 1979, p. 1073—1086.
14. FENG ZHAOHUA, R. D. COOK, *Beam Elements on Two-Parameter Elastic Foundations*, J.E.M., **109**, 6, Dec., p. 1390—1402 (1983).

DETERMINAREA TRAIECTORIEI GRANULEI INDIVIDUALE PE SITA CU MIȘCARE DE RULIU

de GHEORGHE ENE
Institutul Politehnic, București
POLIDOR BRATU
INCERC București

În lucrare se tratează studiul mișcării granulei de material pe sita cu mișcare de ruliu ținînd seama de parametrii regimului de funcționare a ciurului.
Au fost stabilite ecuațiile diferențiale de mișcare și metoda de integrare numerică pe baza cărora au fost trasate traiectoriile granulei.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Necesitatea realizării unei clasări de calitate a materialelor polidisperse, care prezintă dificultăți deosebite de cernere (materiale umede, materiale fin dispersate, materiale încărcate electrostatic, materiale fibroase etc.), a impus utilizarea unor noi tipuri de ciururi cu mișcare de ruliu a sitei.

În vederea optimizării fluxurilor tehnologice de proces este necesară cunoașterea în detaliu a tuturor parametrilor funcționali și constructivi

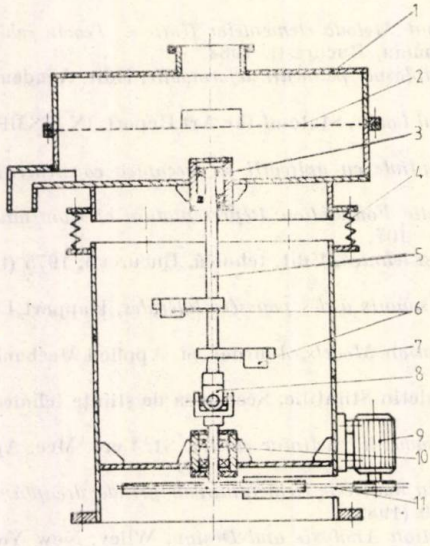


Fig. 1. — Schema constructivă a unui ciur cu mișcare de ruliu, tip CMR—IPB : *1* — carcasa sitei ; *2* — sita ; *3* — lagărul superior ; *4* — arcurile de legătură ; *5* — arborele condus al ciurului ; *6* — masele excentrice ; *7* — corpul ciurului ; *8* — cuplajul cardanic ; *9* — motorul electric de acționare ; *10* — lagărul inferior ; *11* — transmisia cu curele.

ai ciururilor cu mișcare de ruliu, astfel încît să se realizeze adaptarea tehnologică impusă, în condițiile unei eficiențe economice maxime.

Astfel, la noi în țară s-a realizat în concepție proprie și s-a experimentat [3] un ciur cu mișcare de ruliu a cărui schemă constructivă este prezentată în figura 1.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 1, 1986, P. 46—53

Avantajele utilizării unor astfel de utilaje de clasare în comparație cu cele clasice sînt următoarele :

— realizează separarea materialelor cu dificultăți deosebite de cernere ;

— prezintă o mare flexibilitate în reglarea parametrilor regimului de vibrare ;

— asigură nivelul de performanță impus de actualele tehnologii de proces ;

— construcție compactă cu gabarit redus ;

— soluțiile constructive adoptate asigură realizarea unor utilaje cu fiabilitate ridicată și costuri reduse de mentenanță.

2. STABILIREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE A GRANULEI INDIVIDUALE PE SITA CU MIȘCARE DE RULIU

Pe baza studiului privind dinamica ciurului cu mișcare de ruliu, efectuat în lucrarea [2] și a rezultatelor obținute la experimentare, s-a constatat că sita efectuează o mișcare în plan orizontal, centrul ei geometric descriind o traiectorie circulară de rază r_s, peste care se suprapune o oscilație verticală. Amplitudinea oscilației verticale, într-un punct al sitei, este proporțională cu distanța radială a punctului.

În vederea realizării studiului mișcării unei granule în interacțiune cu sita ciurului se introduc [4] următoarele sisteme de coordonate (fig. 2) :

— sistemul inerțial $ox_1y_1z_1$ a cărui axă oz_1 coincide cu axa geometrică normală a sitei ;

— sistemul rotitor $oxyz$ care are viteza unghiulară ω în raport cu axa $oz \equiv oz_1$. La momentul inițial sistemele de axe $oxyz$ și $ox_1y_1z_1$ sînt suprapuse ;

— sistemul rotitor $OX_1Y_1Z_1$ care are viteza unghiulară ω în raport cu axa OZ_1 care se suprapune în permanență peste axa geometrică normală a sitei. Axa OY_1 este paralelă în permanență cu axa oy.

— sistemul $OXYZ$ legat de sită ale cărei axe coincid, la momentul inițial, cu axele sistemului $OX_1Y_1Z_1$.

Ipotezele utilizate în studiu sînt următoarele :

a) unghiul γ de înclinare a planului sitei față de planul orizontal de referință este considerat mic ($\gamma = 4 - 6°$) în ipoteza micilor oscilații, astfel încît se pot face aproximările $\sin \gamma \cong \gamma$ și $\cos \gamma \cong 1$;

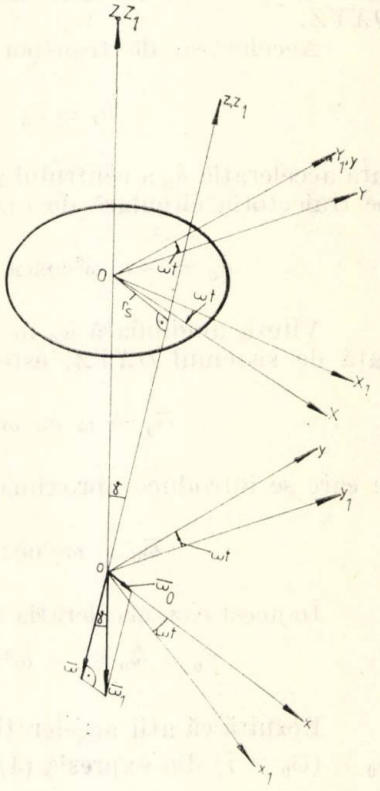


Fig. 2. — Sistemele de coordonate utilizate la studiul mișcării unei granule pe sita cu mișcare de ruliu.

b) frecarea complexă dintre granulă și suprafața sitei se caracterizează prin coeficientul global de frecare μ;

c) mișcarea granulei pe sită are loc fără rostogolire.

Ecuația de mișcare a granulei în contact cu sita este de forma:

$$m\bar{a}_a = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_f, \tag{1}$$

în care $\bar{N}$ este reacțiunea normală a sitei asupra granulei; $\bar{F}_f$ — forța de frecare dintre granulă și sită.

Ecuația mișcării relative a granulei față de sită este următoarea:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_f - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c \tag{2}$$

unde $\bar{a}_r$ este accelerația relativă; $\bar{a}_t$ — accelerația de transport; $\bar{a}_c$ — accelerația Coriolis.

Accelerația gravitațională față de sistemul $OXYZ$ poate fi scrisă astfel:

$$\bar{g} = -\bar{g}\gamma \cos\omega t\, \bar{\imath} - g\gamma \sin\omega t\, \bar{j} - g\bar{k}, \tag{3}$$

unde $\bar{\imath}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ sînt versorii axelor sistemului de coordonate rectangulare $OXYZ$.

Accelerația de transport are expresia:

$$\bar{a}_t = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}_0 \times \bar{r} + \bar{\omega}_0 \times (\bar{\omega}_0 \times \bar{r}), \tag{4}$$

iara accelerația $\bar{a}_0$ a centrului geometric al sitei în timpul mișcării acestuia pe traiectoria circulară de rază r_s este:

$$\bar{a}_0 = -r_s\, \omega^2 \cos\omega t\, \bar{\imath} - r_s\, \omega^2 \sin\omega t \bar{j} + r_s\, \omega^2 \gamma \bar{k}. \tag{5}$$

Viteza unghiulară $\bar{\omega}_0$ de basculare a sitei față de așa ox, raportată față de sistemul $OXYZ$, este:

$$\bar{\omega}_0 = \omega\gamma \cos\omega t \bar{\imath} + \omega\gamma \sin\omega t \bar{j} - \omega\gamma^2 \bar{k} \tag{6}$$

în care se introduce aproximația $\omega\gamma^2 \cong 0$ și se obține:

$$\bar{\omega}_0 = \omega\gamma \cos \omega t\, \bar{\imath} + \omega\gamma \sin \omega t \bar{j}. \tag{7}$$

În acest caz, accelerația unghiulară $\bar{\varepsilon}_0$ are expresia:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \dot{\bar{\omega}}_0 = -\omega^2\gamma \sin \omega t\, \bar{\imath} + \omega^2\gamma \cos \omega t \bar{j}. \tag{8}$$

Rezultă că atît accelerația Euler $\bar{\varepsilon}_0 \times \bar{r}$, cît și accelerația centrifugă $\bar{\omega}_0 \times (\bar{\omega}_0 \times \bar{r})$ din expresia (4) pot fi scrise astfel:

$$\bar{\varepsilon}_0 \times \bar{r} = -\omega^2\gamma(Y \sin \omega t + X \cos \omega t)\, \bar{k} \tag{9}$$

$$\bar{\omega}_0 \times (\bar{\omega}_0 \times \bar{r}) = \omega^2\gamma^2(Y \cos \omega t - X \sin \omega t)(\sin \omega t\, \bar{\imath} - \cos \omega t \bar{j}). \tag{10}$$

Acceleraţia Coriolis a_c este de forma :

$$\bar{a}_c = 2\omega\gamma\,(\dot{Y}\cos\omega t - \dot{X}\sin\omega t)\,\bar{k}. \tag{11}$$

Forţa de frecare dintre granulă şi sită este dată de relaţia :

$$\bar{F}_f = -\mu N\frac{\dot{X}\bar{i} + \dot{Y}\bar{j}}{\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}}. \tag{12}$$

Pe baza ecuaţiei vectoriale (2) şi a relaţiilor (3), (5), (9), (10), (11) şi (12) se obţin ecuaţiile scalare ale mişcării relative a granulei faţă de sită, astfel :

$$m\ddot{X} = -mg\,\gamma\cos\omega t + m[r_s\omega^2\cos\omega t - \omega^2\gamma^2\sin\omega t\,(Y\cos\omega t - X\sin\omega t)] -$$

$$-\mu N\frac{\dot{X}}{\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}},$$

$$m\ddot{Y} = -mg\,\gamma\sin\omega t + m[r_s\omega^2\sin\omega t + \omega^2\gamma^2\cos\omega t\,(Y\cos\omega t - X\sin\omega t)] -$$

$$-\mu N\frac{\dot{Y}}{\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}},$$

$$0 = -mg + m\,[-r_s\,\omega^2\,\gamma + \omega^2\gamma\,(Y\sin\omega t + X\cos\omega t) -$$

$$- 2\omega r(\dot{Y}\cos\omega t - \dot{X}\sin\omega t)] + N. \tag{13}$$

Granula de material se menţine în contact cu sita atîta timp cît $N > 0$, iar desprinderea are loc pentru $N = 0$. Impunînd condiţia desprinderii, ultima ecuaţie din sistemul (13) conduce la relaţia :

$$R = r_{lim} = r_s + \frac{g}{\omega^2\gamma}, \tag{14}$$

în care R este distanţa radială peste care granula se desprinde de sită.

În cazul în care granula rămîne în contact cu sita din aceeaşi ecuaţie se obţine expresia reacţiunii normale N, astfel :

$$N = m[g + r_s\,\omega^2\gamma - \omega^2\gamma\,(Y\sin\omega t + X\cos\omega t) +$$

$$+ 2\omega\gamma(\dot{Y}\cos\omega t - \dot{X}\sin\omega t)]. \tag{15}$$

Înlocuind relaţia (15) în primele două ecuaţii ale sistemului (13)

se obţin următoarele ecuaţii :

$$\frac{\ddot{X}}{\omega^2} = \left(-\frac{g\gamma}{\omega^2} + r_s\right)\cos\omega t - \gamma^2 \sin\omega t(Y\cos\omega t - X\sin\omega t) -$$

$$- \mu\gamma\left[\frac{g}{\gamma\omega^2} + r_s - (Y\sin\omega t + X\cos\omega t) +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\omega}(\dot{Y}\cos\omega t - \dot{X}\sin\omega t)\right]\frac{\dot{X}}{\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}}, \qquad (16)$$

$$\frac{\ddot{Y}}{\omega^2} = \left(-\frac{g\gamma}{\omega^2} + r_s\right)\sin\omega t + \gamma^2\cos\omega t(Y\cos\omega t - X\sin\omega t) -$$

$$- \mu\gamma\left[\frac{g}{\gamma\omega^2} + r_s - (Y\sin\omega t + X\cos\omega t) +\right.$$

$$\left. + \frac{2}{\omega}(\dot{Y}\cos\omega t - \dot{X}\sin\omega t)\right]\frac{\dot{Y}}{\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}}. \qquad (17)$$

Deoarece $\frac{g\gamma}{\omega^2} \ll r_s$, se poate neglija termenul $\frac{g\gamma}{\omega^2}$ în relaţiile (16) şi (17). De asemenea, utilizînd relaţia (14), ecuaţiile (16) şi (17) pot fi exprimate sub forma finală astfel :

$$\frac{\ddot{X}}{R\omega^2} = \frac{r_s}{R}\cos\omega t - \gamma^2\sin\omega t\left(\frac{Y}{R}\cos\omega t - \frac{X}{R}\sin\omega t\right) -$$

$$- \mu\gamma\left[1 - \left(\frac{X}{R} + \frac{2\dot{X}}{R\omega}\right)\sin\omega t - \left(\frac{X}{R} - \frac{2\dot{Y}}{R\omega}\right)\cos\omega t\right]\frac{\dot{X}}{\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}}; \qquad (18)$$

$$\frac{\ddot{Y}}{R\omega^2} = \frac{r_s}{R}\sin\omega t + \gamma^2\cos\omega t\left(\frac{Y}{R}\cos\omega t - \frac{X}{R}\sin\omega t\right) -$$

$$- \mu\gamma\left[1 - \left(\frac{Y}{R} + \frac{2\dot{X}}{R\omega}\right)\sin\omega t - \left(\frac{X}{R} - \frac{2\dot{Y}}{R\omega}\right)\cos\omega t\right]\frac{\dot{Y}}{\sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2}}. \qquad (19)$$

Ecuaţiile diferenţiale (18) şi (19) determină traiectoria granulei în mişcare de alunecare pe sită. Acestea au fost rezolvate prin integrare numerică utilizînd algoritmul predictor-corector al metodei Euler îmbu-

nătățite [1]. Metoda folosită a dus la o convergență rapidă a soluțiilor obținute numeric față de alte metode utilizate (de exemplu Runge-Kutta), oferind posibilități simplificate de reluare a iterației la testarea programului de verificare a convergenței.

În sistemul de programare BASIC-FORTRAN metoda utilizată a permis ocuparea unui spațiu de calcul (memorie) relativ redus. Pentru acest motiv programul de calcul elaborat a fost rulat pe un calculator de proces Felix M 18.

3. ANALIZA REZULTATELOR OBȚINUTE

Pentru diverse valori practice ale parametrilor γ, ω și μ au fost obținute soluțiile sub formă numerică ale ecuațiilor (18) și (19) care au permis trasarea prin puncte ale traiectoriilor corespunzătoare fiecărui caz în parte. Astfel s-au trasat traiectoriile granulei în mișcarea de alunecare pe sită prezentate în figurile 3 și 4.

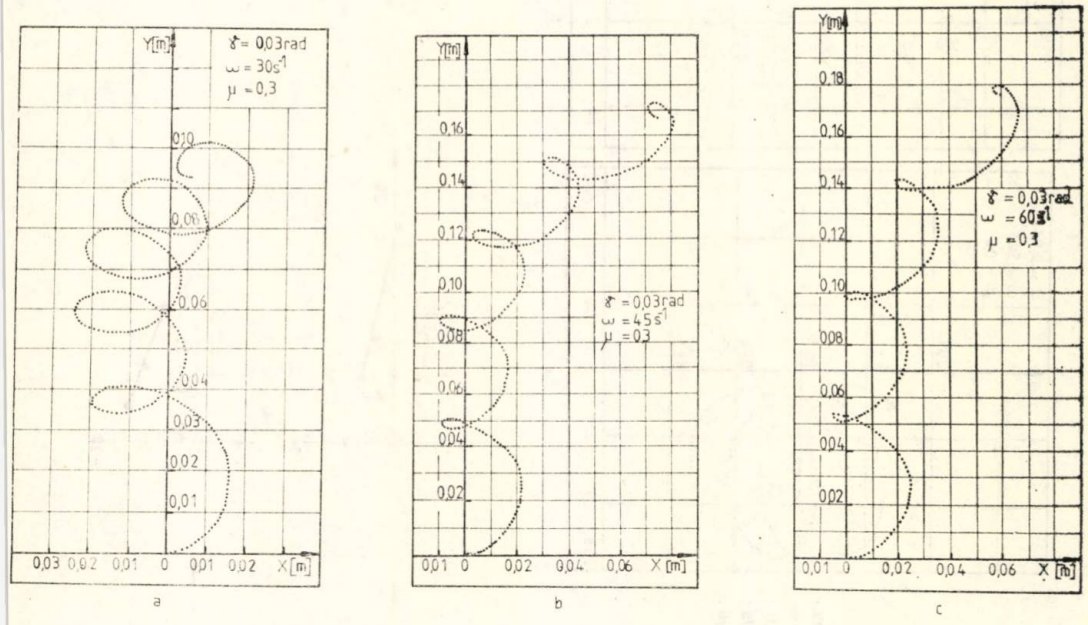


Fig. 3. — Traiectoria granulei pe sită pentru $\gamma = 0{,}03$ rad și $\mu = 0{,}3$: *a*) pentru $\omega = 30$ rad/s ; *b*) pentru $\omega = 45$ rad/s ; *c*) pentru $\omega = 60$ rad/s

Înfășurătoarea traiectoriilor obținute este o spirală logaritmică cu ecuația exprimată în coordonate polare, de forma [5] :

$$r = R \exp k(\varphi - \varphi_0) \tag{20}$$

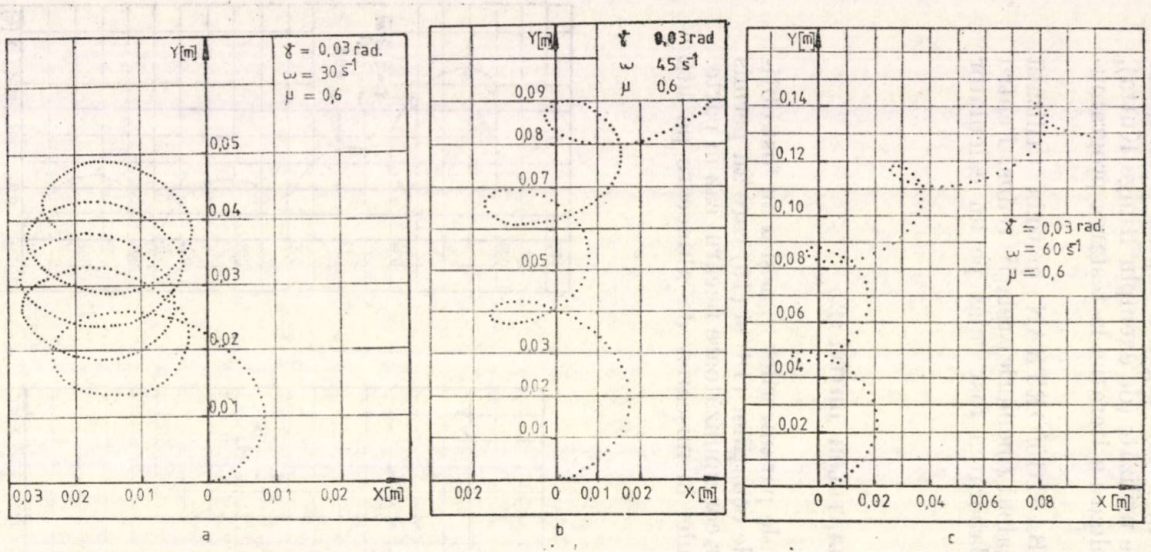


Fig. 4. — Traiectoria granulei pe sită pentru $\gamma = 0{,}03$ rad și $\mu = 0{,}6$:
a) pentru $\omega = 30$ rad/s;
b) pentru $\omega = 45$ rad/s;
c) pentru $\omega = 60$ rad/s

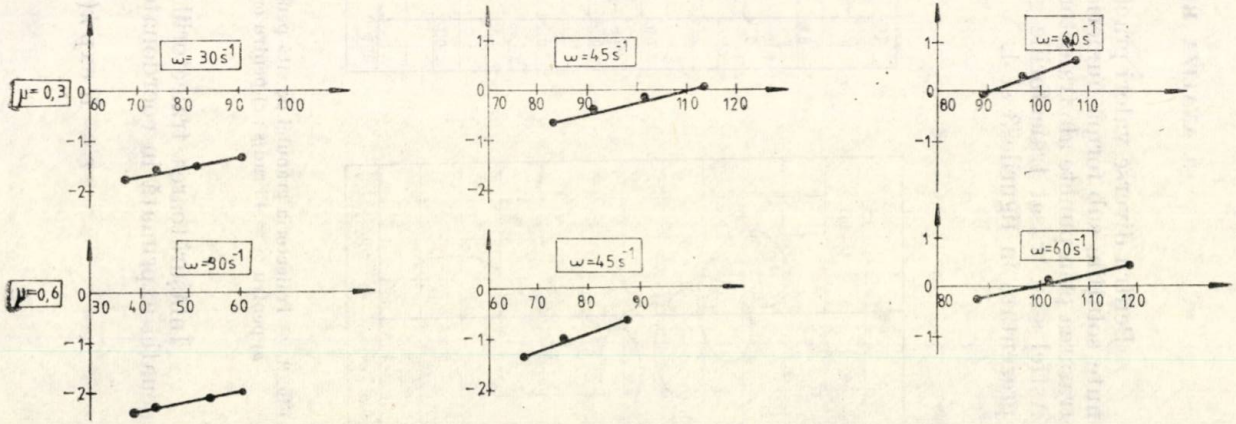


Fig. 5. — Graficele funcției $\ln (r/R) = f(\varphi)$ pentru $\gamma = 0{,}03$ rad.

Prin logaritmare relația (20) devine :

$$\ln \frac{r}{R} = k(\varphi - \varphi_0) \cdot \tag{21}$$

Dacă se trasează în coordonate rectangulare $\ln \frac{r}{R}$ și φ funcția (21) se obține o dreaptă cu panta k, în cazul spiralei logaritmice.

Pe baza soluțiilor numerice obținute anterior a fost reprezentată funcția (21) pentru valorile parametrilor γ, ω și μ. În figura 5 sînt prezentate graficele funcției $\ln \frac{r}{R} = f(\varphi)$.

Rezultă că pentru toate cazurile analizate, dependența $\ln \frac{r}{R} = f(\varphi)$ este o dreaptă, deci înfășurătoarele traiectoriilor sînt spirale logaritmice.

Se remarcă faptul că traiectoriile de acest tip favorizează procesul de trecere a granulelor prin ochiurile sitei deoarece se realizează un timp de reținere mai mare a materialului pe sită (are loc un număr mai mare de comparații statistice între granulă și ochiurile sitei). De asemenea, acest tip de traiectorie permite ca direcția mișcării granulei, față de axa de simetrie a ochiului pătrat al sitei, să fie de fiecare dată alta, favorizînd creșterea calității cernerii.

4. CONCLUZII

Față de studiul efectuat și avînd în vedere rezultatele experimentale obținute [2] pot fi sintetizate următoarele :

a. Pe baza ecuațiilor diferențiale privind mișcarea granulei pe sită, rezolvate numeric, au fost trasate traiectoriile granulei pentru diverse regimuri de lucru.

b. Traiectoriile obținute pe baza studiului teoretic au fost confirmate experimental pe baza înregistrărilor fotografice ale traiectoriei.

c. Relațiile de calcul prezentate permit proiectarea și optimizarea funcțională a ciururilor cu mișcare de ruliu pentru tehnologiile de proces.

Primită la redacție la 21 martie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. GH. DOBRESCU, M. TOMA *Metode de calcul numeric.* Editura didactică și pedagogică, București, 1976.
2. GH. ENE. *Dinamica materialelor granulare corelată cu dinamica particulei individuale, cu aplicație la ciururile cu ruliu,* Teză de doctorat, Institutul Politehnic, București, 1984.
3. R. IATAN, M. RENERT, I. GUERON, GH. ENE *Sită vibratoare cu ruliu pentru deshidratarea nămolurilor.* Brevet de invenție nr. 67497/1978.
4. T. KANZLEITER, *Die Taumelsiebmaschine. Maschinendynamik und Guttransport. Teil 2 : Der Guttransport auf dem Taumelsieb in Aufbereitungs-Technik,* **12**, 7, p. 380 — 390 (1971).
5. * * * *Kleine Enzyklopädie der Mathematik.* Verlag Enzyklopädie, Leipzig, 1967.

PRELUCRAREA DATELOR ÎNREGISTRATE ÎN ZBORURILE DE ÎNCERCARE ALE AVIONULUI PENTRU ESTIMAREA POZIȚIEI PUNCTULUI NEUTRU

de GHEORGHE MUNTEANU

Centrul de Încercări al Industriei Aeronautice Române, Craiova

Printre primele probleme de rezolvat, legate de încercarea unui avion prototip, se numără și estimarea poziției punctului neutru.
Un posibil mod de rezolvare a acestei probleme face obiectul prezentei lucrări. Algoritmul de prelucrare a datelor experimentale, prezentat în sinteză în finalul lucrării, cuprinde și o relație pentru corectarea valorii unghiului de bracare a suprafeței de comandă longitudinală pentru echilibru datorită schimbării poziției centrului de greutate al avionului în timpul zborului. Analiza preciziei valorilor estimate după acest algoritm se face prin compararea rezultatelor obținute (din prelucrări de date simulate) cu rezultatele teoretice (exacte) precum și cu valorile estimate prin regresie neliniară.

1. INTRODUCERE

În general, răspunsul tranzitoriu și caracteristicile de stabilitate (statică și dinamică) longitudinală sînt puternic influențate de mărimea momentului aerodinamic de tangaj (de coeficientul adimensional, C_m, al acestuia). La rîndul lui, C_m este o funcție de unghiul de incidență, α, de numărul Mach, M, de presiunea dinamică, q, de unghiul de bracare al suprafeței de comandă longitudinală, δ, de pozițiile voleților de bord de atac, δ_a, și de fugă, δ_f, de poziția centrului de reducere al forțelor aerodinamice h (care în problemele de mecanica zborului se consideră a fi centrul de greutate).

Există o poziție particulară, h_n, a centrului de greutate pentru care C_m nu depinde de incidență (pentru variații mici ale acesteia). Această poziție se numește punct neutru.

2. CONSIDERAȚII TEORETICE

În continuare, presupunem că toți parametrii de care depind coeficientul de portanță C_p, și coeficientul momentului aerodinamic de tangaj sînt constanți, în afară de α și δ.

În cazul general, cînd α și δ sînt măsurate față de origini fixe,

$$C_p = f_p(\alpha, \delta), \tag{1}$$

$$C_m = f_m(\alpha, \delta) \tag{2}$$

sînt funcții neliniare.

Pentru valorile uzuale ale unghiurilor α și δ vom scrie

$$C_p = C_{p_{\alpha_1}} \cdot \alpha_1 + C_{p_{\delta_1}} \cdot \delta_1, \tag{3}$$

$$C_m = C_{m_1} + C_{m_{\alpha_1}} \cdot \alpha_1 + C_{m_{\delta_1}} \cdot \delta_1. \tag{4}$$

Luînd coeficienţii $C_{p_{\alpha_1}}$ şi $C_{p_{\delta_1}}$ ca fiind egali cu valorile derivatelor $\partial C_p/\partial\alpha$ şi $\partial C_p/\partial\delta$ în punctul (α_0, δ_0), în vecinătatea căruia se face aproximarea, atunci $C_{m_{\alpha_1}}$ şi $C_{m_{\delta_1}}$ reprezintă valorile derivatelor $\partial C_m/\partial\alpha$ şi $\partial C_m/\partial\delta$, iar α_1 şi δ_1 sînt valorile unghiurilor α şi δ translatate cu $\Delta\alpha_0$ şi $\Delta\delta_0$.

Mai notăm faptul că C_{m_1} nu reprezintă valoarea reală a lui C_m la portanţă nulă (C_{m_0}) deoarece atît C_p şi C_m, în cazul general, au fost presupuse neliniare, iar relaţiile aproximative (3) şi (4) ale funcţiilor (1) şi (2) sînt valabile pentru valori ale unghiurilor α şi δ apropiate de α_0 şi δ_0.

Observaţiile de mai sus sînt ilustrate simplificat (pentru cazul cînd C_p şi C_m sînt funcţii neliniare numai de α; δ = constant) în figura 1.

Ecuaţiile de mişcare ale avionului în zbor orizontal rectiliniu şi uniform, în formă adimensională se vor scrie :

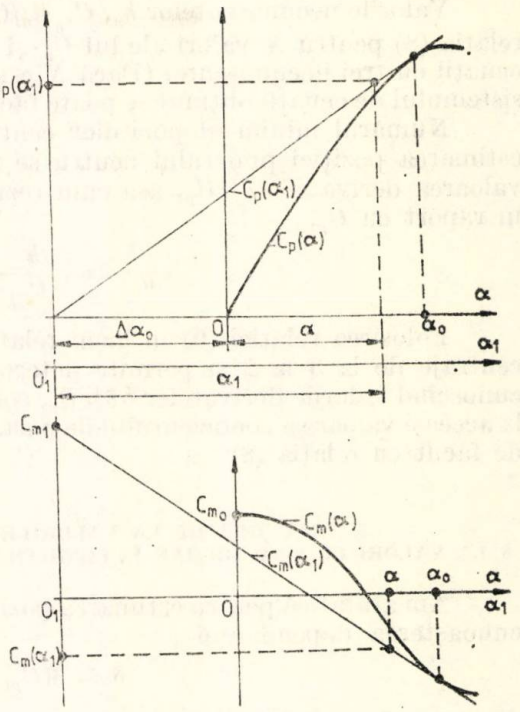


Fig. 1.

— după axa z : $C_p = C_{p_\alpha} \cdot \alpha_1 + C_{p_\delta} \cdot \delta_1$; (5)

— în jurul axei y : $C_m = C_{m_1} + C_{m_\alpha} \cdot \alpha_1 + C_{m_{\delta_1}} \cdot \delta_1 = 0$. (6)

Dar $C_{m_\alpha} = C_{p_\alpha}(h - h_n)$ şi $C_{m_\delta} = -C_{p_\delta}[l_n/C + (h_n - h)]$, unde l_n este distanţa de la centrul de presiune al ampenajului orizontal la punctul neutru, iar C mărimea corzii medii aerodinamice.

Eliminînd α între (5) şi (6) după ce, în prealabil, s-au substituit expresiile derivatelor C_{m_α} şi C_{m_δ} în (6), rezultă

$$\delta = \frac{C_{m_1} + C_p(h - h_n)}{C_{p_\delta} l_n/C} \tag{7}$$

sau

$$C_p \cdot h_n + C_{p_\delta} \cdot h_n/C - C_{m_1} = C_p \cdot h. \tag{8}$$

Relaţiile (7) şi (8) constituie punctul de plecare în elaborarea procedurii de prelucrare a datelor experimentale pentru estimarea poziţiei punctului neutru.

Din datele înregistrate în timpul zborurilor de încercare se pot obține valorile coeficientului de portanță, C_p, bracajul suprafeței de comandă longitudinală, δ, precum și poziția centrului de greutate, h.

Valorile necunoscutelor h_n, $C_{p_\delta} \cdot l_n/C$ și C_{m_1} se pot estima dacă se scrie relația (8) pentru N valori ale lui C_p și δ, formînd astfel un sistem de N ecuații cu trei necunoscute. (Dacă N este mai mare decît trei, rezolvarea sistemului de ecuații obținut se poate face în sensul celor mai mici pătrate).

Numărul minim al pozițiilor centrului de greutate necesar pentru estimarea poziției punctului neutru se reduce la două dacă se cunoaște valoarea derivatei $\partial\delta/\partial C_p$, așa cum rezultă dacă se derivează relația (7) în raport cu C_p,

$$\frac{\partial \delta}{\partial C_p} = \frac{h - h_n}{C_{p_\delta} \cdot l_n/C}. \tag{9}$$

Folosirea relației (9) în locul relației (8) reduce numărul minim de centraje de la 3 la 2 și permite determinarea poziției punctului neutru cunoscînd valorile derivatelor $\partial\delta/\partial C_p$, corespunzătoare celor două centraje, la aceeași valoare a coeficientului de portanță (incidență) — lucru imposibil de făcut cu relația (8).

3. TRECEREA DE LA VALORILE ÎNREGISTRATE ALE LUI δ LA VALORI CE S-AR OBȚINE ÎN CONDIȚII STANDARD (DE CENTRAJ CONSTANT)

Am arătat că pentru estimarea poziției punctului neutru este necesară cunoașterea dependenței

$$\delta = \delta(C_p, h), \tag{10}$$

din care să se obțină derivata

$$\frac{\partial \delta}{\partial C_p} = \delta c_p(C_p, h) \tag{11}$$

În relațiile (10) și (11) h este parametru constant (izo-parametru).

Realizarea condiției h = constant în timpul încercărilor în zbor este foarte greu de îndeplinit, dacă nu chiar imposibil, iar desfășurarea testelor în zbor numai la cantități de combustibil, Q_c, la care diagrama de centraj $h = h(Q_c) \simeq$ constant ar reduce considerabil timpul efectiv de încercare [9]. Pe de altă parte, diferența dintre două centraje consecutive (corespunzătoare la două configurații masice, realizate în mod artificial pentru zborurile de încercare), este de 2 ... 3 %C, atunci o variație de 0,5 ... 1,0 %C în jurul valorii medii a centrajului este mare.

Cel puțin din considerentele arătate mai sus devine necesară corectarea valorii unghiului de bracare a suprafeței de comandă longitudinală înregistrate în zbor. Aceasta revine la a stabili valoarea pe care ar avea-o δ cînd h = constant pe toată durata încercării.

Pentru a obține relația de corecție a lui δ vom porni de la egalitatea (8), pe care o vom scrie pentru trei triplete de valori (C_{p_i}, δ, h_i), $i = 1, 2, 3$, obținînd, în felul acesta, un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute :

$$C_{p_i} h_n + \delta_i C_{p_\delta} \cdot l_n/C - C_{m_1} = C_{p_i} h_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Pentru simplificarea scrierii notăm :

$$h_n = X; \quad C_{p_\delta} \cdot l_n / C = Y; \quad -C_{m_1} = Z.$$

Cu aceste notații sistemul (12) devine

$$C_{p_i} X + \delta_i Y + Z = C_{p_i} h_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{13}$$

Expresia relației de corecție se obține făcînd observații cu privire la compatibilitatea sistemului (13).

Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_{p_1} & \delta_1 & 1 \\ C_{p_2} & \delta_2 & 1 \\ C_{p_3} & \delta_3 & 1 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Dacă $C_{p_1} = C_{p_2} = C_{p_3} = C_p$, atunci

$$\Delta = 0. \tag{15}$$

Pentru ca sistemul (13) să fie compatibil cînd condiția (15) este îndeplinită trebuie ca toți determinanții caracteristici Δ_x, Δ_y, Δ_z să fie nuli (conform teoremei lui Rouché), adică

$$\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

sau

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} C_p h_1 & \delta_1 & 1 \\ C_p h_2 & \delta_2 & 1 \\ C_p h_3 & \delta_3 & 1 \end{vmatrix} = C_p \begin{vmatrix} h_1 & \delta_1 & 1 \\ h_2 & \delta_2 & 1 \\ h_3 & \delta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{16}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} C_p & C_p h_1 & 1 \\ C_p & C_p h_2 & 1 \\ C_p & C_p h_3 & 1 \end{vmatrix} = C_p^2 \begin{vmatrix} 1 & h_1 & 1 \\ 1 & h_2 & 1 \\ 1 & h_3 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{17}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} C_p & \delta_1 & C_p h_1 \\ C_p & \delta_2 & C_p h_2 \\ C_p & \delta_3 & C_p h_3 \end{vmatrix} = C_p^2 \begin{vmatrix} 1 & \delta_1 & h_1 \\ 1 & \delta_2 & h_2 \\ 1 & \delta_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Comparînd relațiile (15) cu (17) și (16) cu (18) se constată că dacă

$$\Delta = 0, \text{ atunci și } \Delta_y = 0, \tag{19}$$

și dacă $\Delta_x = 0$, atunci și $\Delta_z = 0$ (20)

Din relațiile echivalente, (16) și (18), rezultă că δ este funcție numai de h, la C_p = constant

$$h_1\delta_2 + h_2\delta_3 + h_3\delta_1 - h_3\delta_2 - h_1\delta_3 - h_2\delta_1 = 0. \tag{21}$$

Cunoscînd două valori δ_1 și δ_2 ale unghiului de bracare al suprafeței de comandă longitudinală (la aceeași valoare a lui C_p) și valorile corespunzătoare ale poziției centrului de greutate, h_1 și h_2, rezultă din (21) valoarea δ_3 la h_3 (care poate fi impus ca standard, $h_3(t)$ = constant)

$$\delta_3 = -\delta_1\frac{h_3 - h_2}{h_2 - h_1} + \delta_2\frac{h_3 - h_1}{h_2 - h_1}. \tag{22}$$

Algoritmul pentru aducerea valorilor înregistrate ale lui δ, la valori în condiții standard de centraj, se poate elabora urmărind raționamentul lucrării. Pentru aceasta vom considera două seturi de înregistrări (δ, C_p, h) obținute din două zboruri de încercare orizontale rectilinii și uniforme, la care poziția centrului de greutate (variabilă în timp) diferă esențial de la unul la altul. Dacă variabilele sînt discrete fiecare triplet $(\delta, C_p, h)_i$ poate fi reprezentat simbolic printr-un punct pe axa timpului (fig. 2).

Considerăm operația matematică de intersecție, după valorile lui C_p, a înregistrărilor de pe axa t cu a celor de pe axa t', astfel că fiecărui punct $P_i(\delta, C_p, h)_i$ de pe axa t îi corespunde (sau putem face să-i corespundă prin interpolare) un punct $P_j(\delta, C'_p, h')_j$ de pe axa t' care să satisfacă condiția

$$C'_p = C_p, \tag{23}$$

(cerută de relația (22)).

Fig. 2.

Cunoscînd valorile tuturor mărimilor care intră în relația (22) poate fi calculată valoarea unghiului suprafeței de comandă longitudinală (profundorului) δ pentru poziția standard a centrului de greutate, h_s, impusă (care poate fi valoarea medie înregistrată în timpul zborului de încercare).

$$\delta_s = -\delta_i\cdot\frac{h_i - h'_j}{h'_j - h_i} + \delta'_j\cdot\frac{h_s - h_i}{h'_j - h_i}. \tag{24}$$

Relația (24) se scrie pentru toate perechile de puncte (P_i, P_j) care satisfac condiția (23)).

Dacă n este numărul zborurilor de încercare făcute tot la atîtea centraje net diferite, atunci folosirea procedurii de aducere a valorilor lui

δ în condiţii standard, prin luarea tuturor combinaţiilor posibile în (24), este echivalentă cu efectuarea a $n - 1$ zboruri la fiecare din cele n centraje distincte, mărind astfel volumul de date ce urmează a fi prelucrate (devenind necesară prelucrarea statistică).

4. PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE ŞI ESTIMAREA EFECTIVĂ A POZIŢIEI PUNCTULUI NEUTRU

Atunci cînd mărimile C_{m_1}, h, h_n, $C_{p_\delta} l_n/C$ sînt constante, între δ şi C_p există o dependenţă liniară, dată de relaţia (7), de forma

$$\delta = aC_p + b. \tag{25}$$

Dacă h = constant, iar C_{m_1}, h_n, $C_{p_\delta} l_n/C$ sînt funcţii de C_p, atunci legătura $\delta = \delta(C_p)$ numai este liniară, dar poate fi liniarizată pe porţiuni (fig. 3).

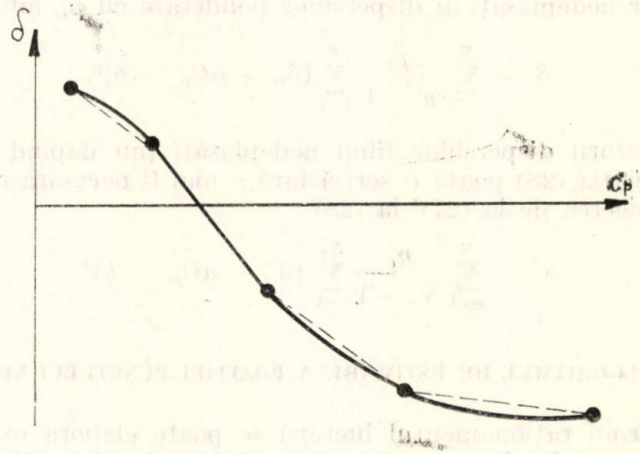


Fig. 3.

Determinarea constantelor a şi b se poate face folosind un criteriu de optimizare [3].

Fie $C_{P_i}(i = 1, 2, \ldots, N)$ cele N valori ale coeficientului de portanţă la care s-au corectat valorile unghiului de bracare al profundorului δ_{ij} cu relaţia (24) şi care urmează a fi aproximate printr-un segment de dreaptă de ecuaţie (25).

Suma pătratelor erorilor este :

$$S = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_i} p_{ij}(\delta_{ij} - \bar{\delta}_i)^2 \tag{26}$$

sau

$$S = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_i} p_{ij}(\delta_{ij} - a C_{p_i} - b)^2, \tag{27}$$

unde p_{ij} sînt ponderile cu care intră pătratul erorii $(\delta_{ij} - \bar{\delta}_i)^2$ în suma S; $\delta_{ij} (j = 1, 2, \ldots, N_i)$, sînt valorile înregistrate (și corectate) ale lui δ_i cînd $C_p = C_{p_i}$, iar $\bar{\delta}_i$ este valoarea medie a lui δ corespunzătoare lui C_{p_i}.

Dacă se presupune că eroarea de măsurare se combină aditiv cu rezultatul măsurătorii și, în plus, este repartizată după legea normală, staționară și necorelată, atunci matricea ponderilor este egală cu inversa matricei de covarianță. În acest caz atît metoda celor mai mici pătrate generalizată cît și cea a verosimilității maxime conduc la același rezultat (estimat), [6], [7], [16], [17].

Din cele arătate mai sus și deoarece δ_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, N_i)$, au aceeași repartiție (cînd i = constant) rezultă că $p_{ij} = p_i$ oricare ar fi valoarea lui j $(j = 1, 2, \ldots, N_i)$, iar relația (27) se poate scrie [8], [21]

$$S = \sum_{i=1}^{N} p_i \sum_{j=1}^{N_i} (\delta_{ij} - aC_{p_i} - b)^2. \tag{27'}$$

Dacă toate cele N selecții au același volum $(N_1 = N_2 = \ldots = N_i = \ldots = n)$, atunci odată cu minimul sumei S se atinge și minimul sumei estimatorilor nedeplasați ai dispersiilor ponderate cu p_i, adică

$$S' = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - aC_{p_i} - b)^2. \tag{28}$$

Estimatorii dispersiilor fiind nedeplasați (nu depind de volumul selecției), relația (28) poate fi scrisă fără a mai fi necesară restricția care a permis trecerea de la (27)′ la (28)

$$S' = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i}{N_i - 1} \sum_{j=1}^{N_i} (\delta_{ij} - aC_{p_i} - b)^2. \tag{28'}$$

5. ALGORITMUL DE ESTIMARE A POZIȚIEI PUNCTULUI NEUTRU

Urmărind raționamentul lucrării se poate elabora ușor algoritmul de prelucrare a datelor experimentale obținut în zborurile de încercare pentru estimarea efectivă a punctului neutru.

Fie pentru aceasta mai multe seturi (cel puțin două) cu înregistrări de date experimentale (presiune statică, presiune dinamică), unghi de bracare profundor, cantitate de combustibil) din zboruri orizontale rectilinii și uniforme. Poziția centrului de greutate diferă semnificativ de la un set de date la altul. Fiecare set este format din datele înregistrate la un șir de N viteze constante și o înălțime constantă.

Durata unei înregistrări la o singură viteză stabilizată fiind de aproximativ un minut (cînd cadența de eșantionare este de cel puțin 4 eșantioane pe secundă). Această durată s-a dovedit a fi suficientă pentru estimarea cu precizie satisfăcătoare a funcției de repartiție a lui δ.

1. Presupunem efectuate corecțiile de presiune statică și dinamică încît dispunem de valorile calculate ale coeficientului de portanță $C_{p_{ij}}$.

2. În cazul în care deviațiile vitezei și ale înălțimii sînt mici față de valorile lor medii, atunci vom putea considera că atît viteza, cît și

înălțimea sînt constante. În această situație nu există nici un motiv care să ne împiedice să considerăm că valorile medii ale C_p și δ reprezintă valorile regimului stabilizat de zbor (avînd înălțimea și viteza egale cu valorile lor medii din timpul zborului de încercare).

Pe durata fiecărui regim stabilizat se calculează mediile aritmetice ale coeficientului de portanță și ale unghiului de bracare al profundorului

$$\delta_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} \delta_{1i}, \qquad \delta_2 = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} \delta_{2i}$$

și

$$C_{p_1} = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} C_{p_{1i}}, \qquad C_{p_2} = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} C_{p_{2i}}.$$

3. Cu relația (24) se calculează valorile standard ale lui δ (după algoritmul din § 3), în care δ_1, δ_2 și δ_s sînt valori medii ($\delta_i = \delta_1$, $\delta'_j = \delta_2$).

4. Se corectează valoarea instantanee ale lui δ

$$\delta'_{1i} = \delta_{1i} + \Delta\delta_1,$$

$$\delta'_{2i} = \delta_{2i} + \Delta\delta_2,$$

unde

$$\Delta\delta_1 = \delta_{s_1} - \delta_1,$$

$$\Delta\delta_2 = \delta_{s_2} - \delta_2.$$

5. Prin metoda celor mai mici pătrate se obține legătura între C_p și δ

$$\hat{\delta} = \hat{a} C_p + \hat{b}.$$

6. Erorile estimate vor fi

$$\hat{e}_{ij} = \delta_{ij} - \hat{a} C_{p_i} - \hat{b}.$$

7. Presupunînd că erorile de măsurare sînt necorelate, matricea ponderilor **P** va fi egală cu inversa matricei de covarianță **C** (ale cărei elemente, în afara celor de pe diagonala principală, sînt nule)

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^{-1}.$$

Elementele matricei **C** sînt date de relația:

$$C(i, k) = 0, \qquad \text{pentru } i \neq k;$$

$$C(i, i) = \frac{1}{N_i - 1} \sum_{j=1}^{N_i} e_{ij}^2.$$

8. Constantele $\hat{a}$ și $\hat{b}$ ale dreptei de regresie se determină din condiția ca suma estimatorilor nedeplasați ai dispersiilor, (28)', să fie minimă, adică :

$$\frac{\partial S'}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i C_{p_i}}{N_i - 1} \sum_{j=1}^{N_i} (\delta_{ij} - aC_{p_i} - b) = 0,$$

$$\frac{\partial S'}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i}{N_i - 1} \sum_{j=1}^{N_i} (\delta_{ij} - aC_{p_i} - b) = 0.$$

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile de mai sus, pentru fiecare valoare a centrajului, rezultă coeficienții $\hat{a}$ și $\hat{b}$.

9. Valoarea medie a lui δ la un regim stabilizat, căruia îi corespunde valoarea C_p a coeficientului de portanță, va fi dată acum de ecuația dreptei de regresie

$$\hat{\delta} = \hat{a}C_p + \hat{b}.$$

10. Noile valori estimate ale erorilor vor fi

$$\hat{e}_{ij} = \delta_{ij} - \hat{\delta}.$$

Cu valorile recalculate la punctul 10 se reia algoritmul, începînd cu punctul 7, pînă cînd se ating preciziile dorite pentru $\hat{a}$, $\hat{b}$ și ponderea p_i.

11. Scriind relația (9) pentru cele r valori ale lui h

$$\frac{h_1 - h_n}{C_{p_\delta} l_n / C} = \hat{a}_1,$$

$$\frac{h_2 - h_n}{C_{p_\delta} l_n / C} = \hat{a}_2,$$

. . . . . .

$$\frac{h_r - h_n}{C_{p_\delta} l_n / C} = \hat{a}_r,$$

și rezolvînd în sensul celor mai mici pătrate, sistemul de ecuații astfel format, rezultă valoarea estimată a poziției punctului neutru

$$h_n = \frac{\sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i^2 \sum_{i=1}^{r} h_i - \sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i \sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i h_i}{r \sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{r} \hat{a}_i \right)^2}.$$

De notat faptul că dacă se aproximează mai multe distribuții de puncte — fiecare corespunde unei alte poziții a centrului de greutate — prin funcții de regresie, atunci la fiecare valoare dată a lui C_p, oricare trei valori $\delta_1(h_1)$, $\delta_2(h_2)$, $\delta_3(h_3)$ luate la întîmplare trebuie să îndeplinească condiția (22). Din această observație rezultă că parametrii a numai două funcții de regresie sînt independenți, parametrii celorlalte funcții fiind

dependenți prin relația (22). Dacă la determinarea parametrilor funcțiilor de regresie se ia în considerare și legătura (22), atunci h_n estimat rezultă din oricare două distribuții din cele r aproximate

$$h_n = \frac{a_2 h_1 - a_1 h_2}{a_2 - a_1}.$$

6. EXEMPLU NUMERIC

În cazul cel mai general, legătura dintre δ, C_p și h

$$f(\delta, C_p, h) = 0, \tag{a}$$

este o funcție implicită.

Pentru calculele ce urmează presupunem că

$$\delta = f(C_p, h) \tag{b}$$

este reprezentată printr-un polinom de gradul trei în C_p, cînd h este constant.

Fie (în grade sexagesimale)

$$\delta_1 = 14{,}716\ C_p^3 - 20{,}503\ C_p^2 - 7{,}996\ C_p + 5, \text{ la } h = 20\ \%\ C, \tag{c}$$

$$\delta_2 = -4{,}717\ C_p^3 + 13{,}601\ C_p^2 - 14{,}796\ C_p + 5, \text{ la } H = 25\ \%\ C. \tag{d}$$

Prin derivare directă rezultă

$$\frac{\mathrm{d}\delta_1}{\mathrm{d}C_p} = 44{,}148\ C_p^2 - 41{,}006\ C_p - 7{,}996, \tag{e}$$

$$\frac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}C_p} = -14{,}151\ C_p^2 + 27{,}202\ C_p - 14{,}796. \tag{f}$$

Ținînd seama că $\dfrac{\mathrm{d}\delta_1}{\mathrm{d}C_p}$ și $\dfrac{\mathrm{d}\delta_2}{\mathrm{d}C_p}$ trebuie să verifice relația (9), se obține un sistem de două ecuații liniare

$$\frac{20 - h_n}{C_{p_\delta} l_n / C} = 44{,}148\ C_p^2 - 41{,}006\ C_p - 7{,}996, \tag{g}$$

$$\frac{25 - h_n}{C_{p_\delta} l_n / C} = -14{,}151\ C_p^2 + 27{,}202\ C_p - 14{,}796, \tag{h}$$

din rezolvarea căruia rezultă valoarea teoretică h_n,

$$h_n = \frac{1386{,}720\ C_p^2 - 1569{,}190\ C_p + 96{,}020}{58{,}299\ C_p^2 - 68{,}208\ C_p + 6{,}800},$$

valoarea cu care va fi comparat rezultatul estimării h_n.

Pentru estimarea poziției punctului neutru au fost simulate patru seturi de valori ale unghiului de bracare al profundorului pentru echilibru la patru centraje diferite :

$$\delta'_1(C_p) = \delta_1(C_p) + K_1(X_1 - 0{,}5), \qquad h_1 = 20\,\%\,C;$$

$$\delta'_2(C_p) = \delta_2(C_p) + K_2(X_2 - 0{,}5), \qquad h_2 = 25\,\%\,C;$$

$$\delta'_3(C_p) = \delta_3(C_p) + K_3(X_3 - 0{,}5), \qquad h_3 = 23\,\%\,C;$$

$$\delta'_4(C_p) = \delta_4(C_p) + K_4(X_4 - 0{,}5), \qquad h_4 = 28\,\%\,C;$$

δ_1 și δ_2 sînt date de relațiile (c) și (d) iar δ_3 și δ_4 de relația (22), în care s-a înlocuit pe rînd h_3 cu 23 și 28 %C,

$$\delta_3 = -\,\delta_1 \frac{h_3 - h_2}{h_1 - h_2} + \delta_2 \frac{h_3 - h_1}{h_2 - h_1},$$

$$\delta_4 = -\,\delta_1 \frac{h_4 - h_2}{h_2 - h_1} + \delta_2 \frac{h_4 - h_1}{h_2 - h_1},$$

X_1, X_2, X_3, X_4 sînt variabile pseudoaleatoare cu valori cuprinse între 0 și 1, generate cu calculatorul de birou HP 9845B ;

K_1, K_2, K_3, K_4 sînt constante de care depinde nivelul de zgomot. Nivelele de zgomot (K_1, K_2, K_3, K_4) au fost modificate pentru fiecare pereche de valori (h, C_p). La fiecare regim stabilizat (de valoare dată a lui C_p) s-au considerat aproximativ 100 de valori simulate pentru δ.

Rezultatele prelucrării acestor date „înregistrate" (la care zgomotul de măsurare simulat a depășit, uneori, 30 % din valoarea adevărată a lui δ) după algoritmul prezentat în lucrare, sînt sintetizate în tabelul 1.

Tabelul 1

	h										
	20 % C		23 % C		25 % C		28 % C				
C_p	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	h_n estimat	h_n calculat	ε(%)
0,30	−15,920	5,892	−11,170	4,805	−8,239	4,121	−3,484	3,057	30,26	29,70	−1,89
0,35	−16,896	6,232	−10,987	4,747	−7,137	3,775	−1,592	2,443	28,78	28,53	−0,88
0,40	−17,089	6,291	−10,393	4,526	−5,703	3,230	0,953	1,490	27,56	27,77	+0,76
0,45	−17,844	6,620	−10,360	4,505	−5,376	3,091	1,575	1,206	27,29	27,24	−0,18
0,50	−17,387	6,404	− 9,768	4,235	−5,067	2,945	2,401	0,836	27,02	26,86	−0,60
0,55	−17,218	6,312	− 9,272	3,962	−4,055	2,419	4,050	−0,046	26,49	26,36	−0,49
0,60	−16,738	6,042	− 8,737	3,667	−3,044	1,833	4,372	−0,228	26,28	26,20	−0,31
0,65	−16,009	5,581	− 8,164	3,297	−3,327	2,006	4,573	−0,357	26,24	26,09	−0,57
0,70	−14,576	4,625	− 8,299	3,393	−2,820	1,673	4,315	−0,183	26,24	26,02	−0,85
0,75	−13,528	3,851	− 7,158	2,569	−2,284	1,274	4,738	−0,484	25,99	26,00	+0,04

În figura 4 sînt reprezentate mediile estimate ale lui δ în funcție de C_p, la cele patru poziții ale centrului de greutate.

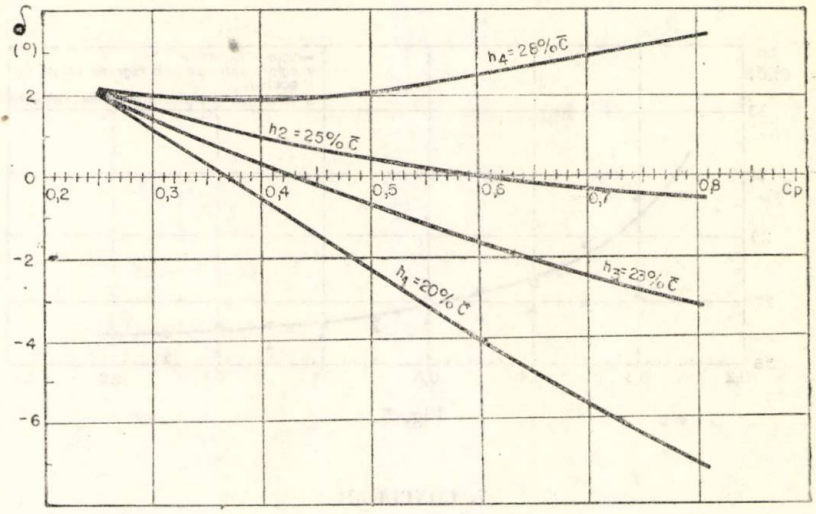


Fig. 4.

Tabelul 2 conține rezultatele aproximării prin polinoame de gradul trei a acelorași date „înregistrate".

Tabelul 2

h (% C)	a_3	a_2	a_1	a_0
20	13,125	−17,727	− 9,486	5,245
25	−6,523	16,230	−15,942	5,144
23	−2,361	8,872	−16,890	5,872
28	5,874	−2,015	− 2,251	2,949

$$\delta = a_3 C_p^3 + a_2 C_p^2 + a_1 C_p + a_0$$

C_p	h_a(% C)		ε(%)
	calculat	estimat	
0,30	29,70	27,20	8,42
0,35	28,53	27,00	5,36
0,40	27,77	26,78	3,56
0,45	27,24	26,55	2,53
0,50	26,86	26,33	1,97
0,55	26,36	26,10	0,99
0,60	26,20	25,88	1,22
0,65	26,09	25,65	1,69
0,70	26,02	25,42	2,31
0,75	26,00	25,17	2,30

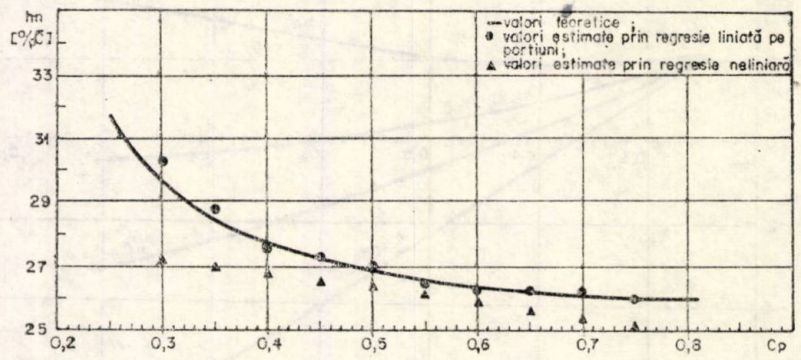


Fig. 5.

7. CONCLUZII

Analiza comparativă a valorilor estimate, h_n, din tabelele 1 și 2 și ale celor calculate (exact) precum și a graficului din figura 5 indică o bună concordanță între rezultatele teoretice și cele estimate după algoritmul din lucrare. Prelucrarea acelorași date „înregistrate" a scos în evidență că estimarea folosind regresia liniară pe porțiuni conduce la rezultate mult mai bune decît în cazul în care se folosește regresia neliniară pe întreg domeniu ; în exemplul dat, în primul caz eroarea maximă a fost sub 2 % iar în celălalt depășește 8 %.

Primită la redacție la 10 mai 1985

BIBLIOGRAFIE

1. B. ETKIN, *Dynamics of flight : Stability and control*, John Wiley & Sons, New York, 1959.
2. B. ETKIN, *Dynamics of atmospheric flight*, John Wiley & Sons, New York, 1972.
3. P. EYKHOFF, *Identificarea sistemelor : Estimarea parametrilor și stărilor pentru sistemele tehnice, economice, biologice* (traducere din limba engleză). Editura tehnică, București, 1976.
4. ȘT. GÂRLAȘU, *Prelucrarea în timp real a semnalelor fizice : Metodologie și aplicații*, Editura Scrisul românesc, Craiova, 1978.
5. I. GRIGORE, *Mecanica zborului avionului*, Editată în Academia militară, București, 1975.
6. R. E. MAINE, K. W. ILIFF, *A FORTRAIN program for determining aircraft stability and control derivatives from flight data*, NASA TN D-7831, April 1975.
7. GH. MIHOC, V. VRSEANU, E. URSIANU, *Modele de analiză statistică*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1982.
8. GH. MIHOC, V. CRAIU, *Tratat de statistică matematică, Vol. I, Selecție și estimație*, Editura Academiei R. S. România, București, 1976.
9. GH. MUNTEANU, *Determinarea experimentală a poziției punctului neutru — problemă de estimare a parametrilor aerodinamici a avionului în zbor orizontal rectiliniu și uniform*, Sesiunea de comunicări științifice AVIA '82 a INCREST, București, Octombrie 1982.
10. GH. MUNTEANU, *Determinarea influenței condițiilor de test asupra valorii unghiului de bracare al profundorului pentru zborul în planul de simetrie al avionului*, Sesiunea de comunicări omagiale a INCREST, București, octombrie 1983.

11. C. PERKINS, *AGARD -- Flight test manual, volume I, Performance*, Pergamon Press, New York, 1959.
12. C. PERKINS, *AGARD — Flight test manual, volume II, Stability and control*, Pergamon Press, New York, 1959.
13. J. RENAUDIE, *Essais en vol., tome I Etalonnages — performances*, Dunod, Paris, 1960.
14. J. RENAUDIE, *Essais en vol. tome II, Qualités de vol*, Dunod, Paris, 1960.
15. Z. L. RUMSISKI, *Prelucrarea matematică a datelor experimentale* (traducere din limba rusă), Editura tehnică, București, 1974.
16. M. TIRON, *Prelucrarea statistică și informațională a datelor de măsurare*, Editura tehnică, București, 1976.
17. M. TIRON, *Analiza preciziei de estimare a funcțiilor aleatoare*, Editura tehnică, București, 1981.
18. I. TODORAN, *Tratarea matematică a datelor experimentale*, Editura Academiei R.S. România, București, 1976.
19. L. TÖVISSI, V. GH. VODA, *Metode statistice: Aplicații în producție*, Editura științifică și enciclopedică, București, 1982.
20. R. TRANDAFIR, *Matematici pentru ingineri: Culegere de probleme*, Editura tehnică, București, 1969.
21. R. TRANDAFIR, *Introducere în teoria probabilităților*, Editura Albatros, 1979.
22. * * * *System 45 Operating and Programming for the HP 9845 B|C, 1980.*

CERCETĂRI TEORETICE PRIVIND DETERMINAREA CARACTERISTICILOR FUNCȚIONALE ALE LAGĂRELOR AEROSTATICE

de FL. DIMOFTE
Institutul Politehnic, București
ST. NEDELCU
ICSITMUA – filiala Brașov
GH. BUCȘĂ
Oficiul de Stat pentru Invenții și Mărci

Lagărele aerostatice impun o proiectare foarte atentă și laborioasă pentru a-și realiza performanțele în condiții de precizie de rotație ridicată sau turații foarte mari.
Avînd în vedere faptul că orice proces tehnologic de prelucrare și de montaj a elementelor componente ale unui lagăr circular determină abateri micro și macrogeometrice ale suprafețelor prelucrate care în mod obișnuit nu sînt luate în calcul, lucrarea își propune să stabilească influența abaterilor macrogeometrice asupra caracteristicilor funcționale ale lagărelor circulare aerostatice.

Lagărele cu gaze necesită condiții deosebite de prelucrare și montaj pentru a-și realiza performanțele impuse de utilizarea lor în condiții de turații mari sau de precizie de rotație ridicată.

Orice proces tehnologic de prelucrare a elementelor componente ale unui lagăr circular cu gaze determină abateri macrogeometrice ale suprafețelor prelucrate, care în mod obișnuit nu sînt luate în calculul caracteristicilor lagărului, fiind considerate ca nedepășind 10 % din jocul radial.

Sursele principale ale erorilor de prelucrare, respectiv ale abaterilor micro și macrogeometrice ale suprafețelor se datoresc : preciziei mașinii-unelte, rigidității și preciziei sistemului mașină-unealtă-dispozitiv-piesă-sculă, regimului de prelucrare ales, condițiilor atmosferei de lucru (temperatura camerei, praful din atmosferă) caracteristicilor materialului lagărului (duritate, plasticitate, relaxarea tensiunilor remanente, etc.). De asemenea, unele abateri ale geometriei suprafețelor se datoresc și particularităților operațiunilor de montaj, precum și factorilor de exploatare.

Aceste abateri macrogeometrice influențează negativ asupra performanțelor lagărului respectiv cu excepția cazului cînd jocul este foarte mare în raport cu aceste abateri. Influența unor abateri macrogeometrice ale suprafețelor lagărelor cu gaze asupra caracteristicilor statice și dinamice ale acestuia au fost studiate și în lucrări anterioare, astfel :

V. N. Constantinescu și colectivul [4] a analizat influența abaterilor macrogeometrice ale unui lagăr axial alimentat sub presiune considerînd aceste abateri de formă sinusoidală.

Rezultatele teoretice au fost confirmate practic pe standul de probă în sensul că abaterile geometrice reduc capacitatea de încărcare a lagărului.

Shelly și Ettles [7] au considerat abaterile de la geometria suprafețelor ca un tren de unde, iar Tzend, Siabel [8] și Cristensen, Tonder [9] au utilizat metode stohastice, pentru a reprezenta rugozitățile, confirmîndu-se din nou influența negativă a acestor abateri asupra comportării lagărelor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 1, 1986, P. 68–82

Pande și Somasundaram [10] prezintă o metodă de calcul teoretic a influenței abaterilor geometrice ale suprafețelor, considerînd grosimea filmului de lubrifiant ca sursă a variației jocului într-un lagăr ideal incluzînd iregularitățile de unde lungi (ondulații) și partea aleatoare din grosimea filmului ce reprezintă rugozitatea. Din studiile efectuate se precizează că abateri geometrice ale suprafețelor de 10 % din joc determină scăderea capacității de încărcare cu 10 — 12 % și cresc debitul cu 6 — 7 %.

Prezenta lucrare își propune să extindă cercetările în această direcție în domeniul de abateri macrogeometrice ale suprafețelor cuprins între 10 % și 30 % din jocul lagărului.

1. STUDIU TEORETIC PRIVIND CALCULUL LAGĂRELOR AEROSTATICE RADIALE

1.1. METODA DE CALCUL UTILIZATĂ

Pentru aprecierea comportării statice și dinamice a lagărelor aerostatice radiale este necesar un calcul complex, pentru determinarea caracteristicilor funcționale, care nu se poate realiza decît cu ajutorul calculatoarelor electronice de mare capacitate, pentru integrarea ecuației diferențiale a presiunilor din lagăr în regim static și dinamic.

Vom considera un lagăr circular (fig. 1) la care portanța este produsă atît de efectul vitezei relative dintre suprafețe, cît și de alimentarea cu gaz sub presiune, sistemul de alimentare fiind prin orificiu restrictor.

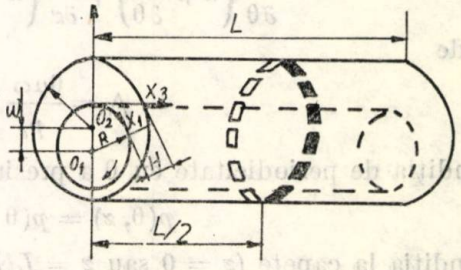


Fig. 1. — Prezentarea schematică a unui lagăr circular alimentat printr-un șir de orificii plasate în zona mediană.

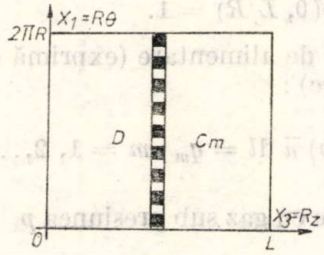


Fig. 2 — Desfășurarea suprafeței *1* cu proiectarea orificiilor de pe suprafața *2* a lagărului.

Se cere rezolvarea ecuației presiunilor referitoare la domeniul D (fig. 2) cu condițiile la limită corespunzătoare :

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho H^3 \frac{\partial P}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho H^3 \frac{\partial P}{\partial x_3}\right)=6\mu V \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho H), \tag{1}$$

unde

$$H = C + \varepsilon\cos\theta,$$

$$P(x_1\, x_3) = P(x_1 + 2\pi R,\, x_3), \tag{2}$$

$$P(x_1, 0) = P(x_1, L) = P_a,$$

$$\oint_{c_m} \rho\left(\frac{V\vec{H}}{2} - \frac{H^3}{12\mu}\,\text{grad}\; P\right)\vec{n}\,dl = q_m, \tag{3}$$

unde membrul stîng al relaţiei reprezintă debitul ce intră prin conturul C_m în lagăr, iar membrul drept, debitul de alimentare prin orificiul restrictor.

Considerînd ecuaţia de stare a gazului corespunzătoare unui proces izoterm, transformăm relaţiile 1 — 3 în formă adimensională, utilizînd variabilele :

$$\rho = \frac{P}{RT};\quad \theta = \frac{x_1}{R};\quad p = \frac{P}{p_a};\quad z = \frac{x_1}{R};\quad \omega = \frac{V}{R},$$

$$h = \frac{H}{C} = 1 + e\cos\theta. \tag{4}$$

Obţinem ecuaţia :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3 p\,\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 p\,\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \wedge\,\frac{\partial(ph)}{\partial\theta}, \tag{5}$$

unde

$$\wedge = \frac{6\mu\omega}{p_s}\left(\frac{R}{C}\right)^2,$$

condiţia de periodicitate cu θ a presiunii este :

$$p(\theta, z) = p(\theta + 2\pi, z). \tag{6}$$

Condiţia la capete ($z = 0$ sau $z = L/R$)

$$p(\theta, 0) = p(\theta, L/R) = 1.$$

Condiţiile de pe conturul locaşurilor de alimentare (exprimă continuitatea debitului prin orificiile de alimentare) :

$$\oint_{c_m} (\wedge ph\,\vec{i}_1 - Rh^3 p\,\text{grad}\,p)\,\vec{n}\,dl = q_m;\; m = 1, 2, \ldots, n,$$

unde expresia debitului de alimentare cu gaz sub presiunea p_s prin orificiu restrictor este :

$$q_m = \frac{2\pi\,\lambda_s p_s^2}{n}\sqrt{\frac{1+\delta^2}{h_m^2+\delta^2}}\,h_m G_m, \tag{7}$$

$$\lambda_s = \frac{6\mu\, na^2}{p_s C^3}\sqrt{\frac{RT}{1+\delta^2}}, \tag{8}$$

$$G_m = C_D \begin{cases} \gamma^{1/2} \left(\dfrac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, & \dfrac{p_m}{p_s} \leqslant \left(\dfrac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \\ \left\{ \dfrac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\dfrac{p_m}{p_s} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\dfrac{p_m}{p_s} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}; & \left(\dfrac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} < \dfrac{p_m}{p_s} \leqslant 1, \end{cases} \tag{9}$$

cu $\gamma = 1{,}405$ (constanta adiabatică a gazelor)

Locașurile de alimentare sînt dispuse la distanțe egale în plane perpendiculare pe axul lagărului. De asemenea s-a luat în considerație cazul unui plan de alimentare situat pe mijlocul lagărului și cazul a două plane dispuse la distanțe egale de capetele lagărului. Deoarece coeficienții ecuației presiunii și condițiile asociate acestei ecuații sînt simetrice față de planul median și soluția va avea această proprietate.

Condiția de simetrie :

$$\frac{\partial p}{\partial z}(\theta, Z = L/D) = 0.$$

Această condiție permite considerarea problemei numai pentru jumătate din domeniu.

Deoarece ecuația presiunii este neliniară, s-a utilizat metoda de liniarizare cunoscută sub numele de liniarizare naturală. Introducem în ecuația presiunii și condițiile aferente, variabila $Q = (ph)^2$. În noua variabil vom avea de rezolvat următoarea problemă :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - \frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{ph} \right) \frac{\partial Q}{\partial \theta} - \frac{2}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} Q = 0, \tag{10}$$

$$Q_{(\theta,z)} = Q_{(\theta+2\pi,z)}\,; \; Q_{(\theta,0)} = h^2\,; \quad \frac{\partial Q}{\partial z}(\theta, L/D) = 0\,; \quad (\theta, z) \notin U_m C_m.$$

Pentru transcrierea în noua variabilă a condițiilor de debit considerăm locașul de alimentare conform figurii 3.

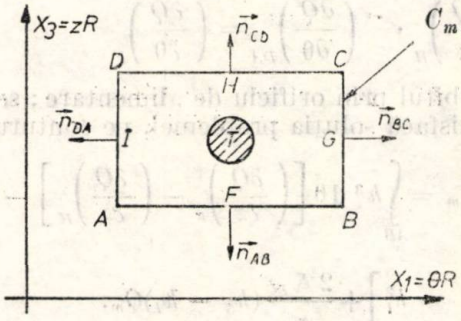


Fig. 3. — Schema unui locaș de alimentare.

Considerăm că

$$p\,|_{(\theta,z)\in C_m} = p_m = \text{const.}$$

Cu această ipoteză, utilizată în mod frecvent în lucrările de specialitate, similare, vom introduce o grosime medie h_m, referitoare la conturul C_m pentru a putea avea :

$$Q\,|_{(\theta,z)\in C_m} = Q_m = (p_m\,\bar{h}_m)^2 = \text{const.} \tag{11}$$

Debitul din locașul de alimentare spre lagăr va putea fi exprimat în aceste ipoteze :

$$\bar{q}_m = \oint (\wedge ph\,\vec{i}_1 - Rh^3\,p\,\text{grad}\,p)\,\vec{n}\,\mathrm{d}l = \iint_{AB}\Big[\wedge ph\vec{i}_1 - h^3p\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\,\vec{i}_1 + \frac{\partial p}{\partial z}\right)\Big]\vec{n}_{AB}\,\overline{\mathrm{d}l} + \int_{BC}\Big[\wedge ph\,\vec{i}_1 - h^3p\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\,\vec{i}_1 + \frac{\partial p}{\partial z}\,\vec{i}_3\right)\Big]\vec{n}_{BC}\,\overline{\mathrm{d}l} + \int_{CD}\Big[\wedge ph\,\vec{i}_1 - h^3p\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\,\vec{i}_1 + \frac{\partial p}{\partial z}\,\vec{i}_3\right)\Big]\vec{n}_{CD}\,\overline{\mathrm{d}l} + \int_{DA}\Big[\wedge ph\,\vec{i}_1 - h^3p\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\,\vec{i}_1 + \frac{\partial p}{\partial z}\,\vec{i}_3\right)\Big]\vec{n}_{DA}\,\overline{\mathrm{d}l}. \tag{12}$$

Se observă că :

$$\begin{aligned} &\vec{n}_{AB} = -\vec{i}_3; && \overline{\mathrm{d}l}_{AB} = \mathrm{d}\theta,\\ &\vec{n}_{BC} = \vec{i}_1; && \overline{\mathrm{d}l}_{BC} = \mathrm{d}z,\\ &\vec{n}_{CD} = \vec{i}_3; && \overline{\mathrm{d}l}_{CD} = -\mathrm{d}\theta,\\ &\vec{n}_{DA} = -\vec{i}_1; && \overline{\mathrm{d}l}_{DA} = -\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{13}$$

facem aproximările :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{AB} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_F;\quad \left(\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right)_{BC} = \left(\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right)_G,$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_{CD} = \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_H,\quad \left(\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right)_{DA} = \left(\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right)_I$$

și introducem în locul lui $\bar{q}_m$ debitul prin orificiu de alimentare ; se obține ecuația pe care trebuie să o satisfacă soluția problemei, pe conturul C_m

$$\frac{4\pi\,\lambda_s\,p_s^2}{r}\sqrt{\frac{1+\delta^2}{\bar{h}_m+\delta^2}}\,\tilde{h}_m^3\,G_m = \int_{AB} h^3\,\mathrm{d}\theta\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_F - \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right)_H\right] - \overline{BC}\left[h_G^3\left(\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right)_G - h_I^3\right] + \frac{2\wedge\overline{BC}}{p_m}(h_G - h_I)Q_m. \tag{15}$$

Pentru rezolvarea numerică a sistemului (10) și (15) folosim metoda diferențelor finite.

Pentru metoda de rezolvare este necesară o rețea care să conțină printre nodurile ei punctele F, G, H, I ale locașului de alimentare și pe celelalte similare de la alte locașuri, deoarece punctele respective intervin

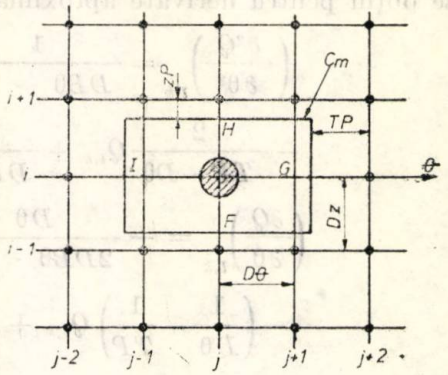


Fig. 4. — Amplasarea locașului de alimentare în nodul unei rețele.

în relația (15). Prezența locașului de alimentare determină modificarea elementelor rețelei $D\theta$, Dz și a aproximării derivatelor cu diferențe (vezi fig. 4).

După aproximarea derivatelor și dezvoltarea funcției R în serie Taylor, putem scrie :

$$AG_m(x) - Bx^2 + C = 0, \tag{16}$$

unde $x = \dfrac{p_m^{(\Upsilon+1)}}{p_s}$,

$$A = \frac{4\pi \wedge_s p_s^2 \tilde{h}_m^3}{n} \sqrt{\frac{1+\delta^2}{\tilde{h}_m^2+\delta^2}}, \tag{17}$$

$$B = \left[\frac{2\int_{AB} h^3 \,\mathrm{d}\theta}{zP} + \frac{\overline{BC}\,(h^3 G + h^3 I)}{TP} + \frac{2\wedge BC}{p_m^{(T)}}(h_G - h_I)\right] \cdot p_s^2 \tilde{h}_m^2,$$

$$C = \frac{\int_{AB} h^3 \,\mathrm{d}\theta}{zP}(Q_{j,i-1}^{(T)} + Q_{j,i+1}^{(T)}) + \frac{\overline{BC}}{TP}(h_G^3 Q_{j+2,i}^{(\Upsilon)} + h_I^3 Q_{j-2,i}^{(\Upsilon)}).$$

Rezolvarea ecuației (16) s-a făcut cu metoda coardei deoarece forma funcției $G_m(x)$ sugera domeniul în care să se caute soluția $x \in (0, 1)$. Dacă $x > 1$ se modifică ecuația (16) ca să cuprindă și acest caz. După aflarea soluției, se determină Q_m cu relațiile :

$$Q_m \begin{cases} (p_s x h_m)^2 & \text{dacă } x \leqslant 1, \\ \left(p_s \dfrac{1}{x} h_m\right)^2 & \text{dacă } x > 1. \end{cases} \tag{18}$$

Pentru discretizarea ecuațiilor (10) în punctele rețelei este necesară găsirea unor formule de aproximare. Considerăm îndeplinite condițiile necesare dezvoltării funcției Q în seria Taylor în aceste puncte și dacă neglijăm termenii de gradul trei sau mai mare în raport cu creșterile TP și $D\theta$ se obțin pentru derivate aproximările :

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2}\right)_{i,k} = \frac{1}{DB\theta - TP} Q_{i-1,k} -$$

$$- \frac{2}{TP \cdot D\theta} Q_{i,k} + \frac{1}{DB\theta \cdot D\theta} Q_{iH,K}, \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)_{i,k} = - \frac{D\theta}{2DB\theta \cdot TP} Q_{i-1,K} -$$

$$- \left(\frac{1}{D\theta} - \frac{1}{TP}\right) Q_{i,k} + \frac{TP}{2DB\theta} Q_{iH,K}, \tag{20}$$

unde $DB\theta = \dfrac{D\theta + TP}{2}$.

Asemănător se obțin expresiile aproximative și pentru derivatele în raport cu Z.

Rezolvarea problemei discrete va începe prin considerarea unui set de valori pentru necunoscutele $p_{j,i}$ în toate punctele rețelei, inclusiv cele de pe frontiere. Pe frontierele exterioare se dau valorile impuse de condițiile problemei. Se calculează apoi coeficienții (17) și cu ecuațiile (16) sau (17) valoarea presiunii pe frontierele interioare. În continuare se rezolvă o problemă cu datele pe contur cunoscute. Este necesar ca la fiecare iterație să se calculeze întîi valoarea presiunii pe frontierele interioare.

Calculul caracteristicilor dinamice ale lagărului se poate face în jurul poziției de echilibru static folosind metoda perturbațiilor mici. Cu această metodă se pot calcula coeficienți dinamici de rigiditate și amortizare a lagărului ($Kxx\ Kxy\ Kyx\ Kyy$, Bxx, Bxy, Byx, Byy) Stabilitatea dinamică a fusului în lagăr se poate preciza prin cunoașterea valorii critice a masei rotorului aferentă lagărului respectiv. Această masă critică se calculează pe baza ecuațiilor de echilibru dinamic al fusului în lagăr.

$$(-M_\nu^2 + Z_{xx})x + Z_{xy}\, y = 0, \tag{21}$$

$$Z_{yx}\, x + (-M_\nu^2 + Z_{yy})\, y = 0, \tag{22}$$

în care prin Z_{ii} s-a notat :

$$Z_{ii} = K_{ii} + i\nu\, B_{ii} \tag{22}$$

ν fiind frecvența critică asociată.

Dacă se atinge valoarea masei critice, atunci mișcarea fusului se face la frecvența critică asociată.

Adimensionalizînd ecuațiile 21 și punînd condiția ca sistemul omogen obținut să admită o soluție nebanală, rezultă valorile pentru masa critică și frecvența critică asociată.

Etapele principale ale procedeului de rezolvare sînt prezentate în schema din figura 5.

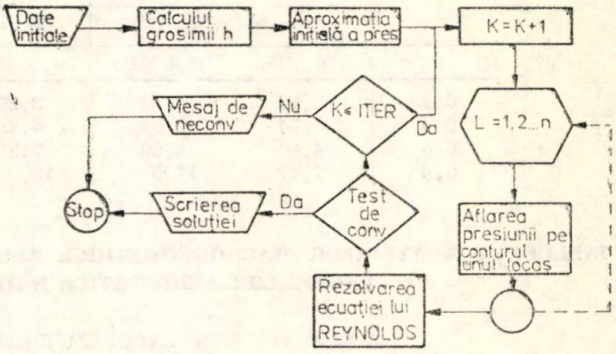


Fig. 5. — Etapele principale ale procedeului de rezolvare.

1.2. PROGRAMUL DE CALCUL

Pentru obținerea caracteristicilor statice și dinamice ale lagărelor aerostatice studiate, s-a elaborat un program complet de calcul pe calculatoarele electronice de mare putere.

Programul de calcul cuprinde mai multe subrutine, ca, de exemplu, subrutina pentru calculul numeric al integralelor, subrutina pentru calculul ecuației de debit pe linia de alimentare, fiind prevăzut cu două subprograme : unul pentru caracteristici statice și al doilea pentru caracteristici dinamice. Datele de intrare pentru programul de calcul sînt :

D este diametrul fusului; L/D — alungirea lagărului; C — jocul radial; n — numărul de orificii de alimentare; p_s — presiunea de alimentare; d — diametrul orificiului de alimentare adimensional; $\delta = \frac{a^2}{c \cdot d}$ parametru referitor la orificiu de alimentare; Λ_s — parametrul sistemului de alimentare; Λ — parametrul de compresibilitate; ω — viteza unghiulară.

1.3. REZULTATELE OBȚINUTE CU AJUTORUL PROGRAMULUI DE CALCUL NUMERIC

Particularizînd datele de intrare ale programului de calcul numeric pentru broșa aerostatică studiată, respectiv $L = 100$ mm, $D = 50$ mm, $C = 0{,}020$ mm, $d_r = 0{,}2$ mm, s-au obținut următoarele rezultate :

a. *Capacitatea de încărcare* (N)

ε	$W(p_s = 0{,}4$ MPa$)$	$W(p_s = 0{,}6$ MPa$)$
0,2	155	213,5
0,4	284	390,5
0,6	301,5	510
0,8	413,5	555

b. *Rigiditatea statică* (N/μm)

ε	$K(p_s = 0{,}4$ MPa$)$	$K(p_s = 0{,}6$ MPa$)$
0,2	38,7	53,3
0,4	35,5	48,8
0,6	31,8	42,5
0,8	25,8	34,6

c. *Masa critică*

	10.000 rot/min		30.000 rot/min	
	$\overline{M} = MC\omega^2/p_a\ LD$		$\overline{M} = MC\omega^2/p_a\ LD$	
ε	0,6 MPa	0,4 MPa	0,6 MPa	0,4 MPa
0,2	2,65	2,64	3,29	2,20
0,4	3,74	3,08	4,45	4,03
0,6	4,80	4,50	7,25	7,88
0,8	7,37	11,9	15,9	19,8

2. INFLUENŢA ABATERILOR MACROGEOMETRICE ASUPRA CARACTERISTICILOR LAGĂRELOR AEROSTATICE RADIALE

2.1. METODA DE CALCUL UTILIZATĂ

Pentru analiza influenţei abaterilor macrogeometrice asupra caracteristicilor lagărelor aerostatice radiale, aceste abateri macrogeometrice sînt luate în consideraţie prin forma de evoluţie a grosimii filmului în diferite puncte ale suprafeţei lagărului. Într-o primă variantă, se consideră lagărul deformat ca fiind un lagăr cu doi, trei ... n lobi, fiecare dintre aceşti lobi făcînd parte din cercuri cu o rază mai mare decît raza unui cuzinet perfect circular şi cu centrele aşezate excentric faţă de centrul lagărului. Considerăm un lagăr cu gaze circular alimentat sub presiune printr-un număr de orificii dispuse în plane perpendiculare pe axa de rotire. O secţiune prin lagăr normală axei de rotaţie este schematizată în figura 6.

Se ştie că $H = C + E\cos\theta$ sau prin adimensionalizare în raport cu jocul radial, C, $h = 1 + e\cos\theta$, unde $h = H/C$; $e = E/C$.

Realizarea fizică a unui lagăr poate să conducă la anumite abateri a valorii parametrilor geometrici prezentaţi în figura 6. Acelaşi lucru se poate întîmpla şi datorită unei funcţionări îndelungate sau accidentale. Problema care interesează şi asupra căruia ne oprim este: în ce limite se pot modifica parametrii geometrici ai lagărului pentru ca funcţionarea să continue a fi satisfăcătoare. Am considerat cazul în care imperfecţiunea de prelucrare este specifică numai cuzinetului. Presupunem că maximul abaterii de la prelucrarea circulară se află într-un plan ce trece prin axa longitudinală a lagărului. Cu această presupunere cuzinetul poate fi aproximat prin 2 lobi. Astfel, secţiunea din figura 6 devine cea prezentată în figura 7.

Vom încerca să exprimăm parametrii geometrici ai lagărului din figura 7 în funcţie de elementele geometrice ale lagărului nedeformat şi de raportul $C'/C = k$.

Conform ipotezei făcute asupra defectului de prelucrare

$$OB = R + C = R + C' - d \Rightarrow d = c' - c$$

sau $\delta = \dfrac{d}{c'} = \dfrac{k-1}{k}$.

Grosimea filmului de lubrifiant h va fi o funcție multiformă de tipul:

$$h = \begin{cases} 1 + e_1 \cos\theta_1, & \theta_1 A < \theta_1 < \theta_{1A'}, \\ 1 + e_2 \cos\theta_2 & \theta_{2A'} < \theta_2 < \theta_{2A}, \end{cases} \quad \text{unde } e_1 = \frac{E_1}{c}; e_2 = \frac{E_2}{c'}.$$

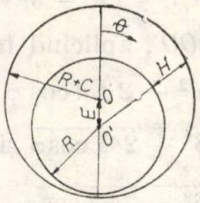


Fig. 6. — Schema unei secțiuni transversale prin lagăr.

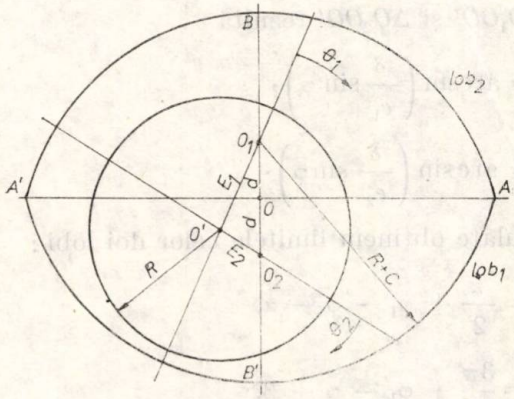


Fig. 7. — Schema unei secțiuni transversale printr-un lagăr cu cuzinet oval.

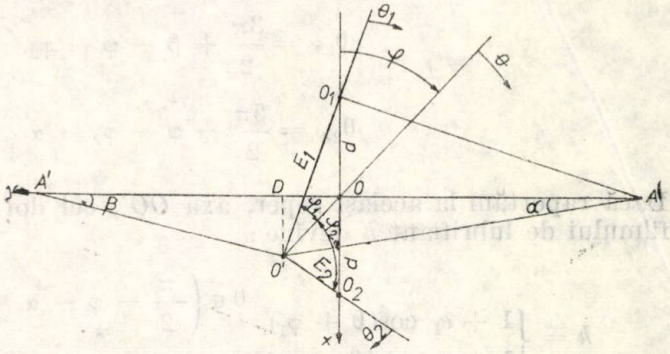


Fig. 8. — Elementele geometrice implicate în calculul grosimii filmului de lubrifiant.

Pentru determinarea limitelor fiecărui lob, θ_{1A}, $\theta_{1A'}$ și θ_{2A}, $\theta_{2A'}$, considerăm în figura 8 ca date inițiale unghiul φ și excentricitatea E.

Din triunghiul $O_1OA \Rightarrow OA = \sqrt{(R + C')^2 - d^2}$,

din triunghiul $AO'D \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{E \cos \varphi}{\sqrt{(R + C')^2 - d^2 + E \sin\varphi}} =$

$$= \operatorname{arctg} \frac{e \cos \varphi}{\sqrt{\left(\frac{R}{C'} + 1\right)^2 - \left(\frac{d}{c'}\right)^2} + e \sin \varphi},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{e \cos\varphi}{\sqrt{(1/k \cdot R/c + 1)^2 - \delta^2 + e \sin\varphi}},$$

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{e \cos\varphi}{\sqrt{(1/k \cdot R/C + 1)^2 - \delta^2 - e \sin\varphi}}.$$

Din triunghiul O_1OO', aplicînd teorema cosinusului, rezultă

$$E_1^2 = E^2 + d^2 + 2Ed\cos\varphi \text{ sau}$$

$$e_1 = \sqrt{e^2 + \delta^2 + 2e\delta\cos\varphi} \text{ şi}$$

$$e_2 = \sqrt{e^2 + \delta^2 - 2e\,\delta\cos\varphi}.$$

Cu teorema cosinusului în $\Delta O_1OO'$ şi $\Delta O_2OO'$ rezultă

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{\delta}{e_1}\sin\varphi\right),$$

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{\delta}{e_2}\sin\varphi\right).$$

În funcţie de elementele calculate obţinem limitele celor doi lobi :

$$\theta_{1A} = \frac{\pi}{2} + \varphi_1 - \varphi - \alpha,$$

$$\theta_{1A'} = \frac{3\pi}{2} + \varphi_1 - \varphi + \beta,$$

$$\theta_{2A'} = \frac{3\pi}{2} + \beta - \varphi - \varphi_2,$$

$$\theta_{2A} = \frac{5\pi}{2} - \varphi - \varphi_2 - \alpha.$$

Dacă raportăm la acelaşi reper, axa OO', cei doi lobi, atunci grosimea filmului de lubrifiant h devine :

$$h = \begin{cases} 1 + e_1 \cos(\theta + \varphi_1), & \theta \in \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha, \frac{3\pi}{2} - \varphi + \beta\right), \\ 1 + e_2 \cos(\theta - \varphi_2), & \theta \in \left(3\frac{\pi}{2} - \varphi + \beta, 5\frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha\right). \end{cases} \tag{23}$$

Pentru un lagăr cu doi lobi („lămîie") geomtria cuzinetului acestuia este prezentată în figura 9.

Cu notaţiile din figură se pot scrie relaţiile :

$$(R + C)^2 = (a + \varepsilon^*)^2 + \delta^2, \tag{24}$$

$$R + C = a + \delta, \tag{25}$$

unde R este raza fusului; C — jocul radial; a — raza cuzinetului; ε^* — abaterea de la circularitate; δ — distanța dintre centrul O_1 și O; din ecuațiile (24) și (25) se deduce că

$$\delta \cong \varepsilon^*.$$

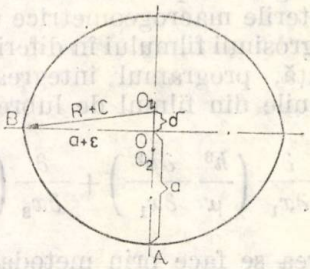


Fig. 9. — Elementele geometrice ale unui cuzinet cu 2 lobi.

Se consideră abaterile de circularitate, respectiv ovalități în trei variante: 1 — ovalitate egală cu 10 % din jocul radial,
2 — ovalitate egală cu 20 % din jocul radial,
3 — ovalitate egală cu 30 % din jocul radial.

Considerînd ε^* abaterea de la circularitate avem:

$$(R + c)^2 = (a + \varepsilon^*)^2 + \delta^2,$$

$$R + c = a + \delta,$$

$$(a + \delta)^2 = (a + \varepsilon^*)^2 + \delta^2,$$

deci

$$\delta = \varepsilon^*.$$

Cu notațiile:

$$\varepsilon_1^* = 0{,}1.C\,;\quad \varepsilon_2^* = 0{,}2.C\,;\quad \varepsilon_3^* = 0{,}3.C,$$

avem

pentru lagărul ideal $\delta = 0$, $\varepsilon^* = 0$; $R + C = a$; $R/C = 1000$,

pentru cazul 1 $\varepsilon_1^* = 0{,}1C$; $\delta_1 = 0{,}1C$; $C_1 = 1{,}1C$; $\dfrac{\delta_1}{C_1} \cong 0{,}91.10^{-1}$; $\dfrac{R}{C_1} =$

$$= \frac{R}{1{,}1C} = 910,$$

pentru cazul 2 $\varepsilon_2^* = 0{,}2C$; $\delta_2 = 0{,}2C$; $C_2 = 1{,}2C$; $\dfrac{\delta_2}{C_2} \cong 0{,}167$; $\dfrac{R}{C_2} =$

$$= \frac{R}{1{,}2C} = 833,$$

pentru cazul 3 $\varepsilon_3^* = 0{,}3\,C$; $\delta_3 = 0{,}3C$; $C_3 = 1{,}3C$; $\dfrac{\delta_3}{C_3} \cong 0{,}231$; $\dfrac{R}{C_3} =$

$$= \frac{R}{1{,}3C} = 767.$$

Acestea constituie date de intrare pentru programul de calcul.

2.2. PROGRAMUL DE CALCUL

Pentru studierea influenţei abaterilor macrogeometrice asupra lagărelor aerostatice, radiale s-a elaborat un program complet de calcul pe calculatoare electronice care permit obţinerea caracteristicilor statice şi dinamice ale lagărului pornind de la diferite geometrii ale suprafeţelor acestuia. Abaterile macrogeometrice sînt luate în consideraţie prin forma de evoluţie a grosimii filmului în diferite puncte ale suprafeţelor lagărului.

În esenţă, programul integrează numeric ecuaţia lui Reynolds pentru presiunile din filmul de lubrefiant compresibil:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p^2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p^2}{\partial x_3}\right)=12V\frac{\partial(ph)}{\partial x_1}.$$

Integrarea se face prin metoda diferenţelor finite, plecînd de la o valoare iniţială a presiunilor atît pe contur cît şi în interiorul filmului.

După obţinerea distribuţiei de presiuni se calculează caracteristicile globale ale lagărului prin însumarea acestora pe fiecare lob în parte.

2.3. REZULTATE OBŢINUTE

Cu ajutorul programului de calcul s-a obţinut ca prim rezultat, portanţa lagărului funcţie de raportul dintre grosimea minimă a filmului şi jocul radial (h_{min}/C), prezentată în tabelul d, e şi în figura 10.

Din analiza acestora se evidenţiază faptul că abaterile de la circularitate reduc capacitatea de încărcare a lagărului ideal pentru orice grosime a filmului de lubrefiant h, iar după valoarea $h_{min}/C = 0{,}5$ curbele se apropie foarte mult, atît pentru cele trei cazuri studiate cît şi pentru lagărul ideal.

Se constată că abaterile de la circularitate reduc capacitatea de încărcare astfel:

— cu circa 5 % în cazul în care ovalităţile reprezintă 10 % din jocul radial;

— cu circa 8 — 10 % în cazul în care ovalităţile reprezintă 20 % din jocul radial;

— cu circa 12 — 19 % în cazul în care ovalităţile reprezintă 30 % din jocul radial;

Tabelul d

Date de intrare	Nr. caz	ε	φ	h_{min}/C	$\overline{W}$
$\delta=0$	1	0,4	50°	0,6	0,9
$R/c = 1000$	2	0,65	50°	0,35	1,5
$\lambda = 1{,}82$;					
$\lambda_s = 0{,}666$	3	0,7	50°	0,3	1,75
$d = 0{,}125$	4	0,75	50°	0,25	2,75

Tabelul e

Date de intrare	Nr. caz	ε	φ	ε_1	h_{min}/c_i	h_{min}/c	$\overline{W}$
$c_1=1{,}1c$; $\delta_1/c_1=0{,}91\cdot10^{-1}$	1	0,6	30°	0,68	0,32	0,352	1,69
$R/c_1=0{,}909\cdot10^3$	2	0,6	50°	0,662	0,338	0,372	1,65
$\lambda=1{,}504$; $\lambda_s=0{,}501$	3	0,6	70°	0,637	0,363	0,399	1,64
$d=0{,}114$	4	0,7	30°	0,78	0,22	0,242	2,58
$c_2=1{,}2c$; $\delta_2/c_2=0{,}167$	1	0,6	30°	0,749	0,251	0,301	1,83
$R/c_2=0{,}833\cdot10^3$	2	0,6	50°	0,719	0,281	0,337	1,73
$\lambda=1{,}263$; $\lambda_s=0{,}386$	3	0,6	70°	0,676	0,324	0,389	1,69
$d=0{,}104$	4	0,7	50°	0,817	0,183	0,22	2,79
$c_3=1{,}3c$							
$\delta_3/c_3=0{,}231$							
$R/c_3=0{,}767\cdot10^5$	1	0,6	30°	0,808	0,192	0,25	2,03
$\lambda=1{,}071$	2	0,6	50°	0,769	0,231	0,3	1,84
$\lambda_s=0{,}304$	3	0,6	70°	0,713	0,287	0,373	1,75
$d=0{,}096$	4	0,5	50°	0,672	0,328	0,426	1,16

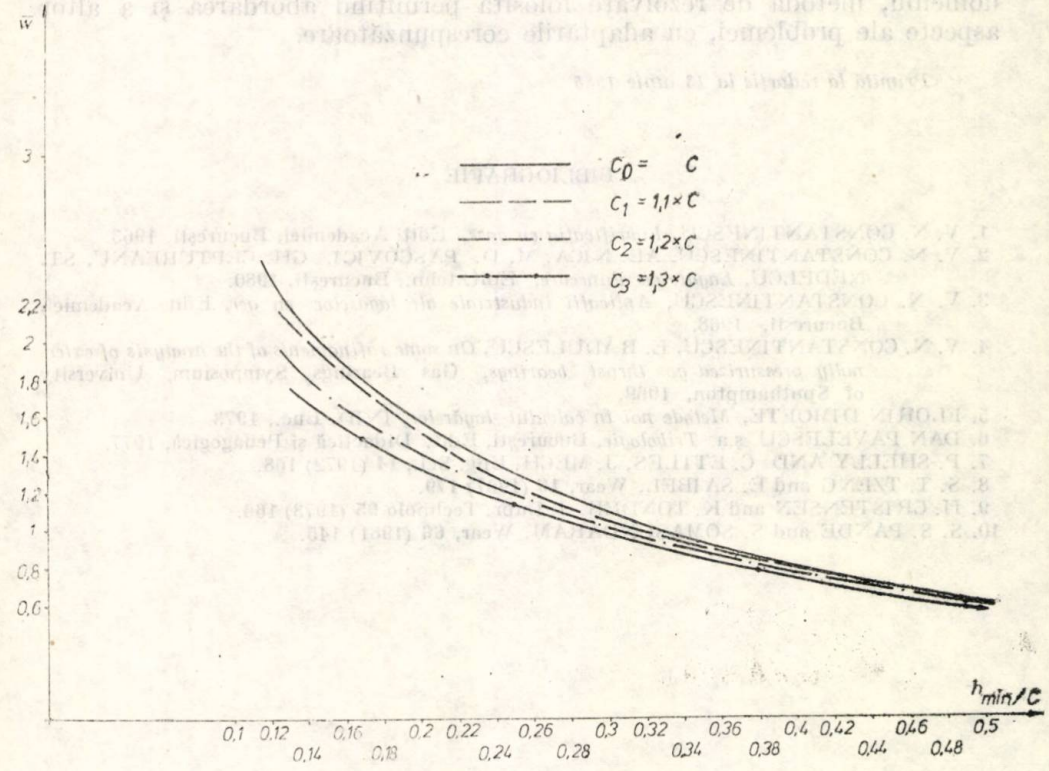


Fig. 10. — Diagramele capacității portante (adimensionalizate) a broșei aerostatice avînd cuzinetul oval.

CONCLUZII

Prezenta lucrare prezintă geometria reală a lagărelor radiale alimentate prin două rînduri de orificii (caz frecvent întîlnit în practică) şi nu printr-un singur rînd, luînd în consideraţie geometria filmului de lubrifiant exprimabilă prin funcţii multiforme sugerată de exemplul lagărelor cu lobi. Această geometrie prezintă în punctele de separaţie discontinuităţi ale derivatei $dh / d\theta$ care afectează domeniul de aplicabilitate a ecuaţiei lui Reynolds. Am evitat această situaţie considerînd ca argumentat din punct de vedere fizic (de prelucrare) o racordare prin arce de cerc. Deoarece raza de racordare este mică în comparaţie cu pasul reţelei utilizate la discretizarea ecuaţiilor rezolvate prin metode numerice, nu apare în calcul.

Considerarea acestei geometrii a filmului de lubrifiant a permis analiza influenţei abaterilor macrogeometrice asupra caracteristicilor lagărelor aerostatice circulare, rezultînd că aceste abateri, respectiv ovalităţile, reduc capacitatea de încărcare a lagărelor pentru orice grosime a filmului de lubrifiant, valorile variind direct cu excentricitatea şi mărimea jocului radial. Valorile obţinute se încadrează în limitele obţinute şi de ceilalţi cercetători.

Lucrarea de faţă este de fapt o primă etapă de cercetare în acest domeniu, metoda de rezolvare folosită permiţînd abordarea şi a altor aspecte ale problemei, cu adaptările corespunzătoare.

Primită la redacţie la 13 iunie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Lubrificaţia cu gaze*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1963.
2. V. N. CONSTANTINESCU, AL. NICA, M. D. PASCOVICI, GH. CEPTUREANU, ST. NEDELCU, *Lagăre cu alunecare*, Edit. tehn., Bucureşti, 1980.
3. V. N. CONSTANTINESCU, *Aplicaţii industriale ale lagărelor cu aer*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1968.
4. V. N. CONSTANTINESCU, E. RĂDULESCU, *On some rafinaments of the analysis of externally pressurized gas thrust bearings*, Gas Bearings Symposium, University of Sputhampton, 1969.
5. FLORIN DIMOFTE, *Metode noi în calculul lagărelor*, INID, Buc., 1973.
6. DAN PAVELESCU ş.a. *Tribologie*, Bucureşti, Edit. Didactică şi Pedagogică, 1977.
7. P. SHELLY AND C. ETTLES, J. MECH. Eng. Sci., **14** (1972) 168.
8. S. T. TZENG and E. SAIBEL, Wear, **10** (1967) 179.
9. H. CRISTENSEN and K. TONDER, J. Lubr. Technolo **95** (1973) 166.
10. S. S. PANDE and S. SOMASUNDARAM, Wear, **66** (1981) 145.

ÎNCERCAREA DE ANDURANȚĂ A ALTERNATOARELOR ȘI A REGULATOARELOR DE TENSIUNE AUTO

de LUCIAN CĂPITANU, GHEORGHE ȘERBAN

Institutul de fizica și tehnologia materialelor

Lucrarea prezintă rezultatele cercetărilor privind încercarea de anduranță a alternatoarelor și a regulatoarelor de tensiune pentru autoturisme, autocamioane și tractoare, materializate prin programe de încercări și standuri de încercare cu destinație uzinală.

1. INTRODUCERE

Calitatea unui produs este pusă în evidență în primul rînd prin rezistența sa în timp, în regim de lucru.

Încercarea de anduranță a alternatoarelor și a regulatoarelor de tensiune auto supune aceste produse unui program de testare, la turații și sarcini diferite. Încercările au scopul de a urmări evoluția caracteristicii de debit, în condiții de sarcină și turație variabilă și de funcționare perfectă a tuturor elementelor acestor produse.

Cercetările întreprinse au condus la stabilirea a trei programe de încercări, specifice alternatoarelor pentru autoturisme, autocamioane și tractoare. Pentru materializarea acestor programe, s-au proiectat și realizat trei tipuri corespunzătoare de standuri. Standurile, identice din punct de vedere mecanic, realizează prin mijloace electronice cele trei programe de încercare, în regim manual și automat.

2. ÎNCERCAREA LA DURATĂ A ALTERNATOARELOR ȘI A REGULATOARELOR PENTRU AUTOTURISME

Programul de încercare a alternatoarelor și a regulatoarelor de tensiune pentru autoturisme Oltcit cuprinde zece trepte de turație la patru valori ale curentului debitat de alternator (sarcină), conform tabelului următor :

Nr. crt.	Timp (min)	Turație (rot/min)	Curent debitat (A)			
			Perioada I	Perioada II	Perioada III	Perioada IV
1	60	6 000	32	22	16	8
2	60	8 500	32	22	16	8
3	60	6 000	32	22	16	8
4	60	9 500	32	22	16	8
5	60	6 000	32	22	16	8
6	60	10 500	32	22	16	8
7	60	6 000	32	22	16	8
8	60	9 500	32	22	16	8
9	60	6 000	32	22	16	8
10	60	8 500	32	22	16	8

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 1, 1986, P. 83–87

După fiecare zece ore de funcționare la turația și sarcina indicată, alternatorul trebuie rotit timp de un minut, fără modificarea sarcinii, la turația 14 500 rot/min.

Un ciclu de încercare se consideră complet după patruzeci de ore de funcționare, cîte zece ore la fiecare dintre sarcinile prescrise. După fiecare ciclu de 40 ore + 4 min., alternatorul va face o pauză de minimum două ore.

Curenții de debit pe fiecare treaptă trebuie să poată fi prestabiliți cu o precizie de ± 3A față de valorile din program.

Pentru aplicarea programului, a fost proiectat și realizat standul din figura 1. Standul asigură realizarea programului de încercare, la sarcină și turație variabilă, atît în regim de lucru automat, cît și în regim manual. Standul este conceput cu două posturi de lucru.

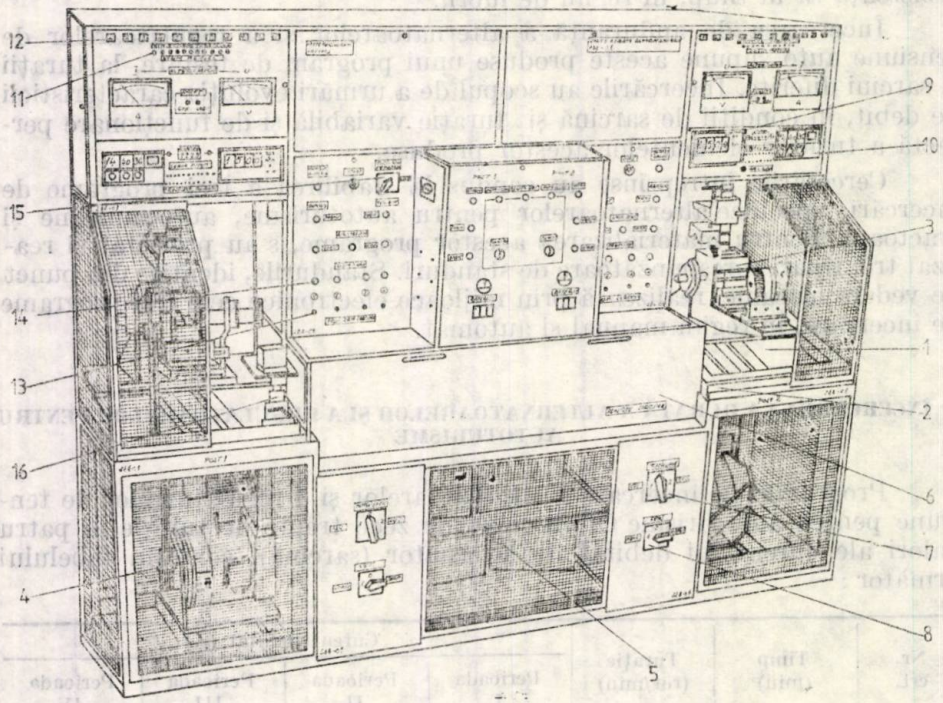


Fig. 1.

Dispozitivul de prindere a alternatorului, *3*, permite prinderea acestuia atît în varianta cu urechi de prindere, cît și în varianta cu strîngere pe exteriorul carcasei cilindrice. Dispozitivul permite reglarea poziției alternatorului în plan orizontal și vertical, precum și blocarea în poziția dorită.

Antrenarea alternatorului este realizată prin intermediul a două transmisii prin curele trapezoidale de către un motor electric de curent continuu Ce 132 M—VF, IMB 3/5,5 kW × 3000 r.p.m. (4), cu ventilator propriu.

Compartimentul acumulatorilor, *5*, cuprinde un cărucior etajat care susține patru acumulatori de 12 V/70 Ah.

Sertarul, *6*, cuprinde ansamblul reostaților de 0,6 — 14 — 60 ohmi, destinat asigurării posibilității de variere a sarcinii în limitele dorite.

Compartimentul reostaților și cel al acumulatorilor sînt ventilate prin două ventilatoare plasate în spatele standului.

Standul asigură condițiile necesare pentru încercarea alternatoarelor și a regulatoarelor de tensiune cu puteri între 0,5 și 1,5 kW, la 12 V și 24 V, la curenți de excitație de maximum 5A. Schimbarea tensiunii 12/24 V se realizează prin comutatoarele *7*, iar inversarea sensului motoarelor de antrenare se face prin inversoarele de sens, *8*.

Măsurarea turației alternatorului se realizează prin intermediul unor traductoare cuplate la tahometrele electronice, *9*, de tip AMTRD-1.

Variația turației motoarelor de curent continuu se realizează prin două tahogeneratoare și două convertizoare miniaturale trifazate, cu tiristori — CMT 380.

Ceasul de bord, *10*, cu contor orar — CIME 1, asigură contorizarea orelor de încercare, simultan cu afișarea orei exacte. De asemenea, el furnizează semnalele de ceas utilizate în schema electronică de automatizare.

Pentru verificarea funcționării programului în regim automat este prevăzută posibilitatea realizării operației TEST. Aceasta permite condensarea întregului program, minutul devenind etapă orară, întregul ciclu de testare durînd 44 minute.

Reglarea turațiilor se face prin potențiometrele elicoidale de 4.7 K.

Vizualizarea treptelor de turație și sarcină în regim automat se realizează prin diode electroluminiscente.

3. ÎNCERCAREA LA DURATĂ A ALTERNATOARELOR ȘI A REGULATOARELOR PENTRU AUTOCAMIOANE

Alternatoarele și regulatoarele de tensiune pentru autocamioane necesită încercarea la sarcină constantă și turație variabilă după următorul program :

Standul realizat pentru acest program (fig. 2) asigură o turație inferioară de lucru de 500 rot/min și o sarcină inferioară de lucru de 3A. Turația maximă de lucru a alternatoarelor poate crește pînă la 14 500 rot/min.

Nr. crt.	Timp (min)	Turație (rot/min)	Curent debitat (A)
1	10	2 000	16
2	10	5 000	16

Din punct de vedere mecanic, standul este identic cu cel prezentat anterior.

Reglarea turațiilor de lucru se realizează prin potențiometrii elicoidali, *11*, iar reglarea duratei etapelor programului se face prin releele de timp *13*.

Comutatoarele, *15*, asigură încercarea alternatoarelor în varianta cu excitație proprie sau prin releul regulator, 14.

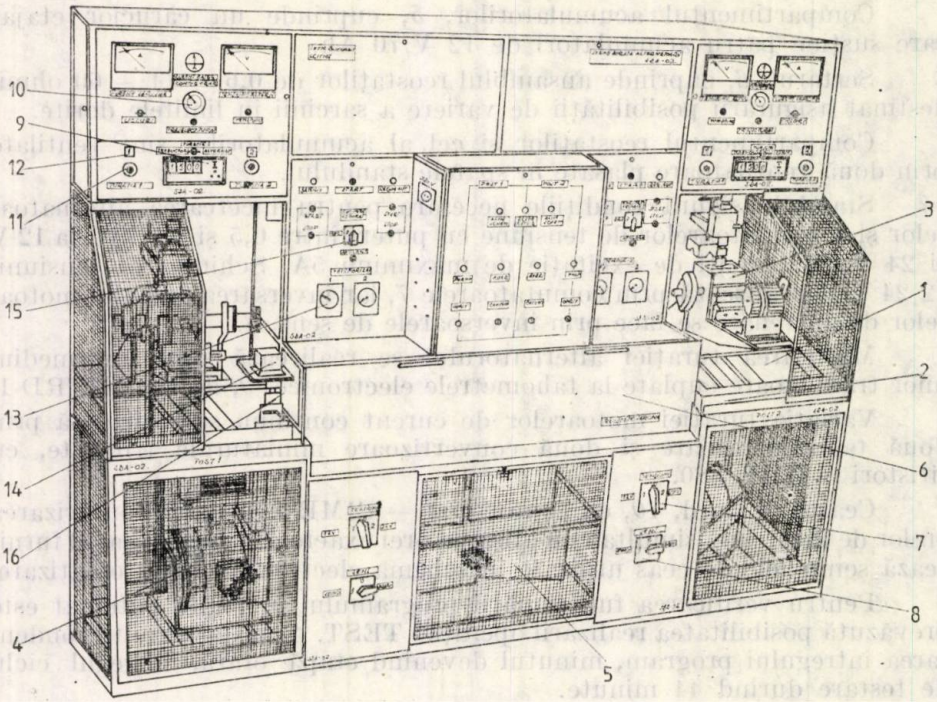


Fig. 2.

4. ÎNCERCAREA LA DURATĂ A ALTERNATOARELOR ȘI A REGULATOARELOR PENTRU TRACTOARE

Încercarea la durată a alternatoarelor și regulatoarelor de tensiune pentru tractoare, se realizează la o turație constantă a alternatoarelor de 10 500 rot/min. Ciclul de variație a sarcinii alternatorului este zece minute debitare în gol; zece minute la sarcina de 16 A; zece minute la sarcina de 24A; zece minute la sarcina de 8A; zece minute la sarcina de 32A.

După fiecare etapă de zece minute, alternatorul va debita timp de zece secunde numai pe baterie, sarcina fiind deconectată. După fiecare ciclu alternatorul face o pauză de două ore.

Din punct de vedere mecanic, standul realizat (fig. 3) este identic cu cele prezentate anterior.

Temporizările necesare (10 s, 10 min, 2 ore) se realizează prin releele de timp, *13*.

În regim manual, schimbarea treptelor de sarcină se realizează prin butoanele *17*. În regim automat, treptele de sarcină se schimbă automat, la duratele fixate pe releele de timp, *17*. Treptele de sarcină sînt semnalizate optic prin lămpile de panou, *12*, corespunzătoare.

5. CONCLUZII

Standurile prezentate sînt realizate integral cu materiale, componente și aparatură indigene.

Toate standurile sînt prevăzute cu sisteme de protecție la avarii specifice :

— protecție la ambalarea motorului de curent continuu ;
— protecție la ruperea curelelor de transmisie ;
— protecție la deschiderea apărătorilor de protecție ale posturilor.

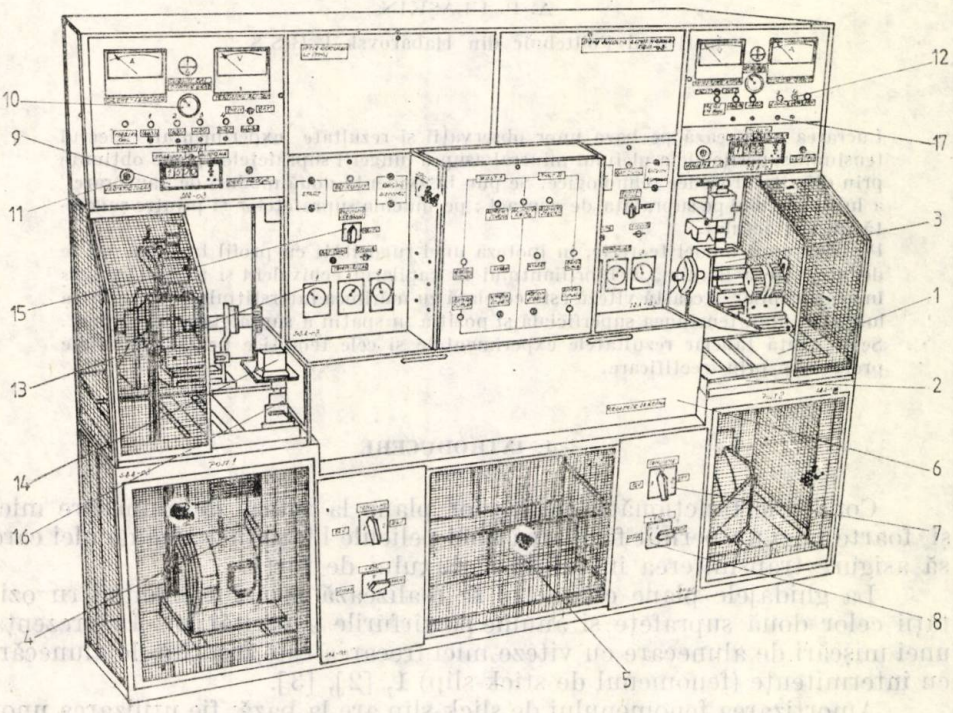


Fig. 3.

Toate avariile sînt semnalizate optic și acustic, simultan cu decuplarea motorului de curent continuu corespunzător.

Posturile de lucru pot funcționa simultan sau independent.

Programele de încercări pot fi modificate ca urmare a domeniilor largi de sarcini și turații la care pot funcționa standurile.

Primită la redacție la 31 iulie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. L. CĂPITANU, *Standuri de încercări de anduranță*, Tribotehnica, Iași, 1984.

CÎTEVA ASPECTE PRIVIND INFLUENȚA CAPILARITĂȚII ASUPRA UNGERII SUPRAFEȚELOR PLANE RUGOASE CU VITEZE MICI DE ALUNECARE

de A. TUDOR

Institutul Politehnic, București

A. P. ULAȘKIN

Institutul Politehnic din Habarovsk U.R.S.S.

Lucrarea analizează pe baza unor observații și rezultate experimentale efectul tensiunii superficiale a uleiului mineral asupra ungerii suprafețelor plane obținute prin diferite procedee tehnologice. Se pun în evidență două moduri de „ancorare" a lubrifiantului pe suprafața de contact : pe muchia suprafețelor și printre rugozitățile contactului.

Pe baza unui model teoretic, în ipoteza unei rugozități cu profil triunghiular se deduce viteza maximă a lubrifiantului în capilarul echivalent și spațiul parcurs în acest capilar. Această viteză este corelată cu mărimea interstițiului, vîscozitatea lubrifiantului, tensiunea superficială și poziția în spațiu a suprafețelor de contact. Se prezintă tabelar rezultatele experimentale și cele teoretice pentru suprafețe prelucrate prin rectificare.

1. INTRODUCERE

Condițiile funcționării ghidajelor plane la viteze de alunecare mici și foarte mici nu permit formarea unei pelicule hidrodinamice de ulei care să asigure transmiterea integrală a fluxului de forță.

La ghidajele plane contactul se realizează prin intermediul rugozității celor două suprafețe și anume pe vîrfurile asperităților. În prezența unei mișcări de alunecare cu viteze mici frecarea este însoțită de alunecări cu intermitențe (fenomenul de stick-slip) 1, [2], [3].

Amortizarea fenomenului de slick-slip are la bază, fie utilizarea unor lubrifianți aditivați corespunzător, fie realizarea pe suprafețele de frecare a unor canale și microcanale speciale pentru ungere și mai ales pentru menținerea în zona de contact a lubrifiantului, care de regulă este ulei mineral.

Lucrarea de față își propune să pună în evidență, pe baza observațiilor experimentale și investigațiilor teoretice, efectele tensiunii superficiale a uleiului mineral asupra ungerii suprafețelor plane rugoase în domeniul vitezelor mici și foarte mici ($0{,}1 \cdot 10^{-3}$ — $3 \cdot 10^{-3}$ m/s).

Este cunoscut efectul capilarității uleiului asupra ungerii lagărelor de dimensiuni mici [4], [5], [6], punîndu-se în evidență atît cantitatea de ulei necesară ungerii, cît și forma interstițiului pentru a avea o frecare și uzare minime.

2. INVESTIGAȚII EXPERIMENTALE

Analiza modului de curgere a uleiului pe suprafețele plane cu diferite tipuri de prelucrări mecanice și direcții de prelucrare se pune în evidență prin observarea frontului de ulei pe epruvetele metalice. Aceste epruvete se

găsesc în contact cu o cală plan paralelă din sticlă specială (înălțimea maximă a rugozității nu depășește 0,1 μm).

Epruvetele metalice sînt executate din oțel cu conținut redus de carbon și au formă prismatică (dimensiuni $20 \times 20 \times 85$ mm). În tabelul 1 sînt prezentate caracteristicile principale ale rugozității celor 16 epruvete obținute prin patru procedee tehnologice. Caracteristicile rugozității s-au determinat pe baza profilogramelor indicate pe profilograful „Perth-O-Metr".

Tabelul 1

Procedeul tehnologic de prelucrare asupra feței	Caracteristicile rugozității				
	Paralelă cu direcția de mișcare			Perpendiculară pe direcția de mișcare	
	R_p μm	W_p μm	γ 0	R'_p μm	W'_p μm
Rectificare					
rizurile paralele	5	6,2	3	9	2
rizurile perpendiculare	8	3,3	24,4	8	3
rizurile cu unghiul 45°	12	3,2	16	3,5	3,2
rizurile cu unghiul 30°	8	2	12,2	10	2
Rabotare					
rizurile paralele	14	5,6	4,5	21	4,7
rizurile perpendiculare	12	14,5	5,1	22,5	7
rizurile cu unghiul 45°	15	5,5	5,2	15	7
rizurile cu unghiul 30°	15	5	6,9	13	3,7
Frezare frontală					
rizurile paralele	22	13	3,4	20	6,2
rizurile perpendiculare	17	8,7	10,7	5	6
rizurile cu unghiul 45°	11	3,7	11,4	17	4,3
rizurile cu unghiul 30°	12	2,2	5,4	7,5	16
Frezare cilindrică					
rizurile paralele	12	20,5	4,4	21	22,5
rizurile perpendiculare	30	13	10,3	32	18
rizurile cu unghiul 45°	22	32,5	4,3	35	10
rizurile cu unghiul 30°	30	23	7,8	31	14

Pentru observarea efectelor capilare, epruvetele metalice s-au fixat pe rînd în poziție verticală, împreună cu cala plan-paralelă de sticlă într-un dispozitiv special plasat într-o cuvă cu ulei în strat foarte subțire. Experiențele au arătat că se disting două efecte capilare cu acțiune reciprocă: ridicarea uleiului printre asperitățile suprafețelor și ridicarea uleiului pe muchia epruvetei. În toate experiențele s-a constatat că viteza de ridicare a uleiului pe muchie este mai mare decît aceea pe rugozități, indiferent de orientarea rizurilor rugozității. Totodată se constată că uleiul de pe muchia suprafețelor începe să se ancoreze în direcție perpendiculară către interiorul suprafețelor „escaladînd" rînd pe rînd rugozitățile.

A doua categorie de experiențe se referă la stabilirea vitezei de ancorare a uleiului pe suprafața de contact ca urmare a tensiunii superficiale, în timp ce epruvetele au o mișcare de alunecare. Aceste experiențe s-au

efectuat pe standul special din dotarea catedrei Organe de mașini din I. P. București cu epruvetele indicate schematic în figura 1 a căror microgeometrie este sintetizată în tabelul 1. Înaintea fiecărei experiențe epruvetele au fost curățate cu benzină, alcool și uscate cu aer cald. Încercările au fost efectuate la sarcină normală constantă ($F_n = 50$ N) și la viteze de alunecare diferite. Picăturile de ulei au fost puse pe fața epruvetei opusă sensului de mișcare la timpul imediat anterior începutului mișcării. Pentru un spațiu de mișcare impus s-a măsurat distanța pe care s-a deplasat uleiul ca urmare a efectului capilar, determinîndu-se viteza critică de alunecare pînă la care efectul capilar are eficiență.

A treia categorie de experiențe are în vedere determinarea vitezei medii a uleiului numai ca urmare a tensiunii superficiale. Aceste experiențe s-au efectuat pentru toate epruvetele din tabelul 1 în contact cu o epruvetă etalon (epruveta 2 din figura 2) prelucrată prin lustruire electromecanică la care înălțimea maximă a rugozității nu depășește 1,5 μm. În centrul epruvetei 2 se găsește un orificiu în care s-a pus o picătură de ulei ce nu a depășit 1,5 mm. După 5 minute sub sarcina normală de 10 N, se măsoară parcursul uleiului în zona de contact.

Uleiul cercetat este uleiul mineral T 90 STAS 8960-7 9 și se caracterizează prin; vîscozitatea cinematică la 100° C-15,5 cSt, densitatea relativă —0,915, tensiunea superficială $\sigma = 0{,}029$ N/m la 9°C și $\sigma = 0{,}027$ N/m la 14°C. Tensiunea superficială s-a determinat pe baza metodei cu inel (diametrul inelului 10 mm, materialul sîrmei—cupru, diametrul sîrmei —0,35 mm) cu ajutorul balanței de precizie.

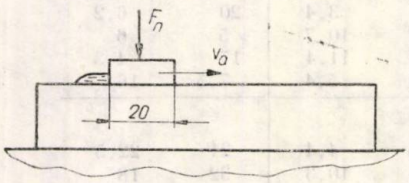


Fig. 1.

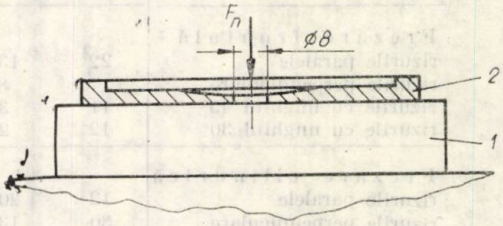


Fig. 2.

Unghiul de contact al uleiului cu o suprafață solidă s-a determinat pe baza scufundării unei suprafețe înclinate în ulei. Valoarea acestui unghi pentru uleiul T 90, în prezența unei suprafețe metalice uscate, este $\theta = 15°$.

3. MODELUL TEORETIC

a) *Suprafețe fără mișcare relativă.* Din punctul de vedere al frecării și uzării suprafețelor plane cazul cel mai defavorabil îl constituie acela în care nu există sau nu poate fi menținut lubrifiant în zona de contact. Pentru a urmări accesul uleiului în zona de contact, se pune o picătură de ulei pe partea frontală a epruvetei opusă sensului de mișcare (fig. 3).

Direcția de alunecare a epruvetelor coincide cu direcția de deplasare a uleiului. În toate celelalte cazuri, condițiile de ungere sînt mai bune.

Se fixează axa $O-x$ pe muchia suprafețelor de contact, muchie ce face cu orizontala unghiul β.

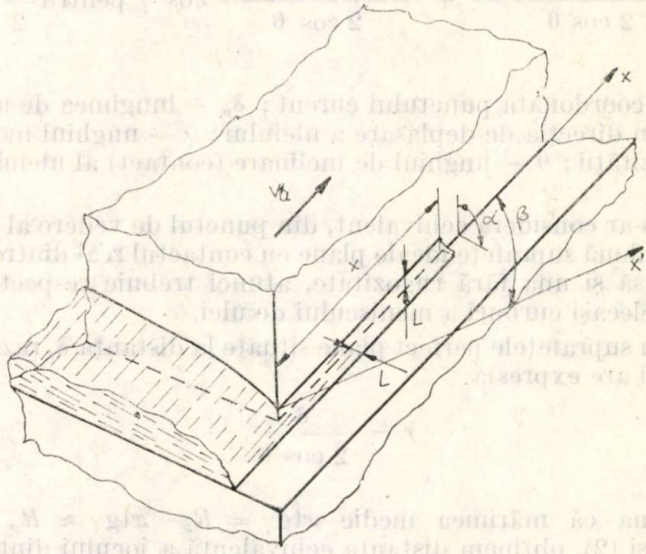


Fig. 3.

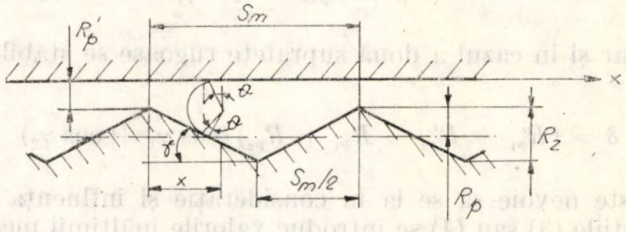


Fig. 4.

Se modelează rugozitatea de pe suprafața de contact sub forma unor triunghiuri (fig. 4), model ce permite, într-o primă aproximare, tratarea analitică a efectului capilarității. Distanța dintre vîrfurile rugozității și suprafața ideală cu care vine în contact (suprafața plană fără rugozități) variază între zero și R_z' (înălțimea medie a rugozității măsurată în direcție perpendiculară pe direcția de deplasare a uleiului). Se poate aproxima că înălțimea medie $R_z' \approx R_p'$ (înălțimea vîrfurilor pînă la linia medie a profilului).

În aceste considerente, jocul capilar se schimbă de la R_p' la $R_p' + R_z$ unde R_z reprezintă înălțimea medie a rugozității în direcția de deplasare a uleiului. Raza de curbură a uleiului în jocul capilar va avea expre-

siile :

$$r = \begin{cases} \dfrac{R'_p + x\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\cos\theta} + \dfrac{R_p + x\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\cos\theta}\cos\gamma & \text{pentru } 0 \leqslant x \leqslant \delta_m/2, \\ \dfrac{R'_p + R_z - x\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\cos\theta} + \dfrac{R'_p + R_z - x\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\cos\theta}\cos\gamma & \text{pentru } \dfrac{\delta_m}{2} < x \leqslant \delta_m, \end{cases} \tag{1}$$

unde x este coordonata punctului curent; δ_m — lungimea de undă medie a rugozității în direcția de deplasare a uleiului; γ — unghiul mediu de înclinare a rugozității; θ — unghiul de înclinare (contact) al uleiului cu suprafața solidă.

Dacă s-ar considera echivalent, din punctul de vedere al capilarității, jocul dintre două suprafețe ideale plane cu contactul real dintre o suprafață plană rugoasă și una fără rugozitate, atunci trebuie respectată condiția obținerii aceleeași curburi a meniscului de ulei.

Pentru suprafețele perfect plane situate la distanța δ, raza de curbură a meniscului are expresia

$$r = \frac{\delta}{2\cos\theta}. \tag{2}$$

Ținînd seama că mărimea medie $x\mathrm{tg}\gamma = R_z - x\mathrm{tg}\gamma \approx R_p$ și utilizînd relațiile (1) și (2), obținem distanța echivalentă a jocului dintre suprafața ideală și suprafața cu rugozități de formă triunghulară

$$\delta = (R'_p + R_p)(1 + \cos\gamma) \tag{3}$$

În mod similar și în cazul a două suprafețe rugoase se stabilește distanța echivalentă

$$\delta = (R'_{p_1} + R'_{p_2} + R_{p_1} + R_{p_2})(\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2) \tag{4}$$

Dacă este nevoie să se ia în considerație și influența ondulațiilor, atunci în relațiile (3) sau (4) se introduc valorile înălțimii medii ale ondulațiilor (W_{p_1}, W_{p_2}). În prezența sarcinii normale ridicate este necesar să se determine deformația locală, deformație care trebuie să se scadă din distanța echivalentă (3) sau (4).

Se analizează mișcarea fluidului în jocul echivalent : pe baza simetriei geometrice (fig. 5), pentru stratul elementar de grosime dy se poate scrie condiția de echilibru mecanic al forțelor :

$$-(p_2 - p_1)\,S = F_1 - F_2\,, \tag{5}$$

unde p_1 și p_2 sînt presiunile din stratul de ulei; S este aria secțiunii transversale a stratului de ulei; F_1 și F_2 forțele de frecare de pe fețele stratului elementar de ulei.

Dar, conform relației lui Laplace aplicată suprafețelor plane,

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\sigma}{r} - \rho g x \sin \beta, \tag{6}$$

unde σ este tensiunea superficială; ρ — densitatea uleiului; g — accelerația gravitațională.

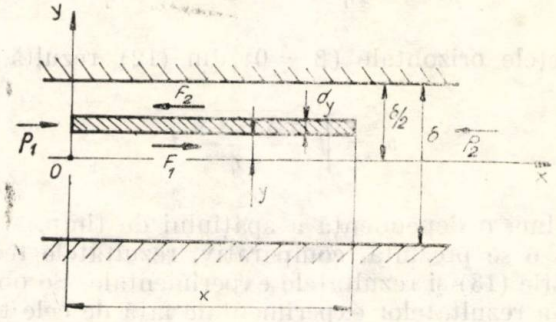


Fig. 5.

Ținînd seama că $S = B \cdot dy$ (B — lățimea suprafețelor de contact) și că forțele de frecare sînt de natură newtoniană,

$$F_1 = \eta x B \frac{dv}{dy}, \tag{7}$$

$$F_2 = \eta x B \frac{d}{dy}\left(v + \frac{dv}{dy} dy\right), \tag{8}$$

η fiind vîscozitatea dinamică a uleiului, din (5) se obține ecuația diferențială a vitezei v,

$$\frac{d^2v}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{\eta x} \tag{9}$$

Rezolvarea acestei ecuații diferențiale, în condițiile la limită $dv/dy = 0$ pentru $y = 0$ și $v = 0$ pentru $y = \delta/2$, conduce la soluția

$$v = \frac{\Delta p}{2 \eta x}\left(\frac{\delta^2}{4} - y^2\right). \tag{10}$$

Viteza este maximă atunci cînd $dv/dy = 0$, iar prin luarea în considerație a expresiei (6) deducem

$$v_{max} = \frac{\delta \sigma \cos \theta}{8 \eta x} - \frac{\delta^2 Sy \sin \beta}{8\eta}. \tag{11}$$

Prin integrarea ecuației (11) în raport cu timpul, se obține expresia spațiului maxim parcurs de ulei ca urmare a tensiunii superficiale în capilarul echivalent :

$$A \ln |A| - Bx - A \ln |A - Bx| = B^2 t, \tag{12}$$

unde

$$A = \frac{\sigma\delta \cos \theta}{4\eta}; \quad B = \frac{\delta^2 \rho y \sin \beta}{8\eta}.$$

Pentru suprafețele orizontale ($\beta = 0$) din (12) rezultă :

$$x = \sqrt{\frac{\sigma \delta \cos \theta}{4\eta} t} \tag{13}$$

relație ce exprimă o dependență a spațiului de timp.

În figura 6 se prezintă, comparativ, rezultatele teoretice calculate cu această relație (13) și rezultatele experimentale. Se observă în special, dispersie mare a rezultatelor experimentale față de cele teoretice la epruvetele prelucrate prin rabotare și frezare. Aceste diferențe pot fi explicate prin neuniformitatea înălțimii și pasului rugozității.

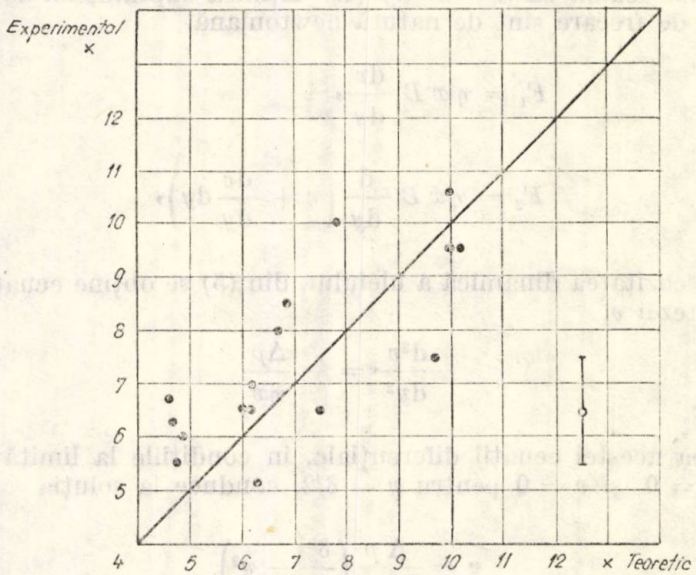


Fig. 6.

Relațiile de mai sus permit calculul spațiului parcurs de ulei în absența mișcării relative pe direcția de înaintare a uleiului sau atunci cînd direcția de alunecare este perpendiculară pe direcția uleiului.

b) *Suprafețe cu mișcare relativă.* Dacă direcția și sensul vitezei de alunecare (v_a) coincid cu direcția și sensul vitezei de înaintare a uleiului

(v) rezultă cazul cel mai defavorabil din punctul de vedere al ungerii. În această situație viteza uleiului va avea expresia :

$$v = \frac{v_a}{\delta} y + \frac{\Delta p}{2\eta x}(\delta y - y^2). \tag{14}$$

Valoarea maximă a vitezei va apare atunci cînd

$$y = \frac{v_a \eta x}{8 \Delta p} \tag{15}$$

Din relațiile (14) și (15) putem deduce viteza de alunecare maximă pînă la care efectele capilare sînt sigure :

$$v_a \leqslant \frac{\Delta p \delta^2}{2\eta x} = v_{cr}. \tag{16}$$

Dacă viteza de alunecare este mai mare decît viteza critică v_{cr}, atunci sînt necesare măsuri constructive speciale pentru aducerea uleiului în zona de contact (microcanale, orificii pe suprafețe etc.).

c) *Efectul capilarității pe muchie.* Pe muchia laterală a epruvetelor (axa x din figura 3), lubrifiantul are meniscul concav și este delimitat de mărimea L. Pentru început se consideră că pe direcția axei x grosimea L este constantă și că profilul filmului de ulei pe muchie este un triunghi isoscel cu catetele egale cu L. În realitate, în funcție de poziția suprafeței în spațiu, forțele gravitaționale fac ca secțiunea de triunghi isoscel să se modifice ; însă modificarea este nesemnificativă deoarece pondere mai mare au forțele cauzate de tensiunea superficială. Forțele capilare acționează în direcția formării unui menisc concav stabil și deci la valori ridicate ale mărimii L.

Se examinează filmul de ulei pe muchia a două suprafețe cu un unghi de înclinare α (fig. 7).

Pe baza relației lui Jurin, în condițiile celor două suprafețe, se poate scrie :

$$L = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{\sigma \cos \theta}{r_1 \rho g \sin \alpha}, \tag{17}$$

în care h reprezintă înălțimea de ridicare a fluidului pe pereți, iar r_1 — raza de curbură a meniscului fluidului în punctul de contact cu suprafața.

Pentru poziția orizontală a uneia dintre suprafețe ce formează muchia, raza r_1 are expresia

$$r_1 = \frac{L \sin \alpha/2}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)} \tag{18}$$

și deci din (17) deducem

$$L^2 = \frac{\sigma \cos\theta \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\rho g \sin\alpha \sin\alpha/2}. \tag{19}$$

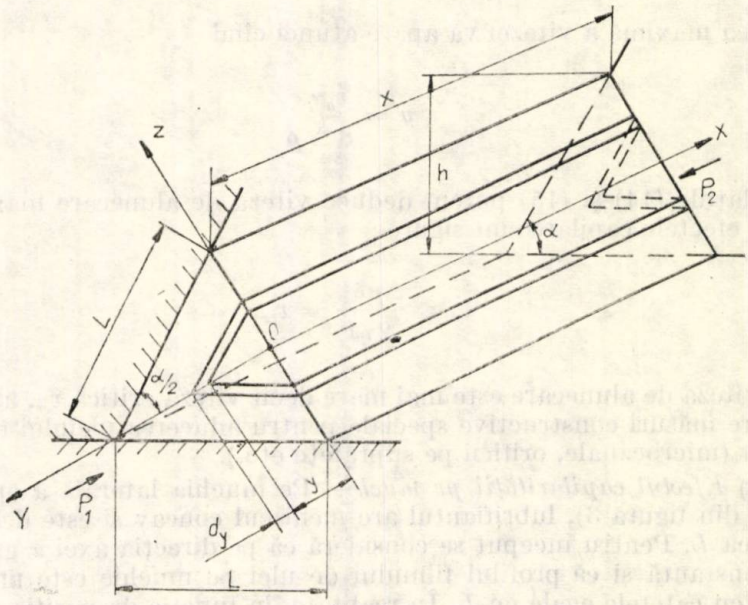


Fig. 7.

Cînd muchia suprafeței de contact face unghiul β cu orizontala mărimea L depinde de x, utilizîndu-se relația generală din [7]. Pentru condițiile lucrării această relație are forma :

$$L = \frac{\sigma \cos\theta \cos\frac{\alpha}{2}}{x \rho g \sin\beta \sin^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{20}$$

Mișcarea fluidului în capilarul echivalent se analizează în sistemul de coordonate zOy (fig. 7), originea fiind punctul de intersecție al medianei triunghiului isoscel de laturi L cu cea de a treia latură a triunghiului isoscel.

Forțele de frecare newtoniene pe suprafețele stratului elementar vor fi :

$$F_1 = \frac{xy\eta}{\cos^2\alpha/2} \cdot \frac{dv}{dy}, \tag{21}$$

$$F_2 = \frac{y + dy}{\cos^2\alpha/2} \cdot x\eta \cdot \frac{d}{dy}\left(v + \frac{dv}{dy}dy\right). \tag{22}$$

Forța F_1 are ca direcție axa y și sensul de deplasare a uleiului, iar F_2 are sensul opus. Viteza uleiului are sensul axei x.
Presiunile p_1 și p_2 apar ca urmare a efectelor capilare, gravitaționale și de inerție [8]. Ca urmare a accelerațiilor mici se neglijează efectul forțelor de inerție față de cel al forțelor gravitaționale și mai ales al celor capilare, obținînd :

$$\Delta p = \frac{\sigma}{r} - \rho g\, x \sin\beta, \tag{23}$$

unde r este raza minimă a meniscului, rază pe care o considerăm constantă cu poziția x

$$r = \frac{L \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\theta}. \tag{24}$$

Condiția de echilibru al forțelor din stratul elementar al filmului din zona muchiei este

$$F_1 - F_2 = -S\,\Delta p \tag{25}$$

Înlocuind F_1, F_2, S și neglijind infiniții mici de ordinul doi, se deduce ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{-\Delta p \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{x\eta}\, y. \tag{26}$$

Prin integrare, în condițiile la limită $v = 0$ pentru $y = L\cos\alpha/2$ și $\mathrm{d}v/\mathrm{d}y = 0$ pentru $y = 0$, se deduce

$$v = \left(\frac{\sigma}{r} - \rho g x \sin\beta\right)\frac{\sin\alpha}{8x\eta}\left[L^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - y^2\right]. \tag{27}$$

Deoarece în condițiile reale suprafața liberă a fluidului este curbă sub forma unui menisc concav, viteza este maximă în punctul A (fig. 8). Luînd în considerare unghiul θ, se deduce poziția punctului A

$$y_m = L\sin\frac{\alpha}{2}\,\frac{1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)} \tag{28}$$

și viteza maximă a uleiului în lungul axei x

$$v_{max} = \left(\frac{\sigma}{r} - \rho g\, x \sin\beta\right)\frac{L^2\sin\alpha}{8x\eta}\left\{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}\right]\right\}. \tag{29}$$

d) *Efectele capilarității pe muchie și între rugozități.* Modelul curgerii uleiului atît pe muchia suprafețelor cît și între rugozități este ilustrat în figura 9.

Pe baza condiției de continuitate a debitului de ulei, se scrie

$$v_r S_m = v S_m - v_y S_y, \tag{30}$$

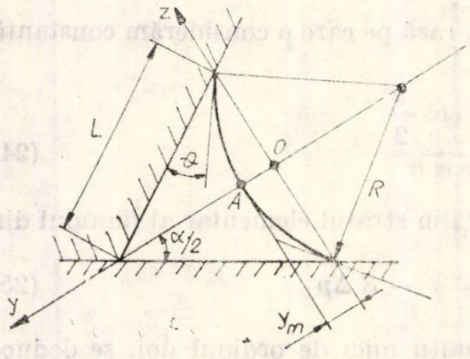


Fig. 8.

unde v_r este viteza reală în direcția x; v_y în direcția y; $S_m \approx L^2/2 \sin\alpha$ — aria secțiunii transversale a fluidului de muchie; $S_y = \delta x$ — aria secțiunii fluidului dintre suprafețele de contact.

În acest fel rezultă

$$v_r = v - v_y \frac{2\delta x \sin\alpha}{L^2}. \tag{31}$$

Ținînd seama că mărimea L este variabilă pe axa x, se va lua valoarea sa medie $L_m = (L + \delta)/2$.

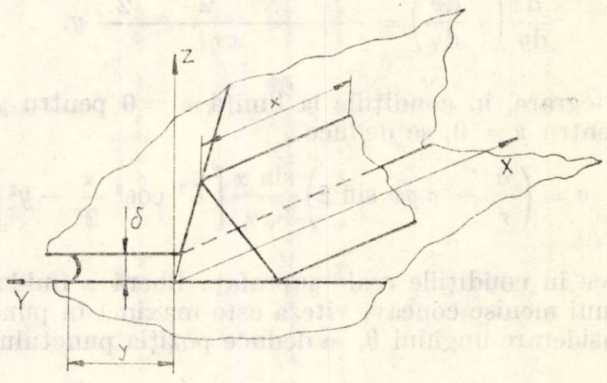


Fig. 9.

Dacă se înlocuiește viteza în direcția y dată de relația (11) în (31) se obține o expresie destul de complicată a vitezei reale.

Prin alegerea corespunzătoare a direcției axei y astfel, încît viteza uleiului să fie maximă, unghiul β devine egal cu zero; pentru suprafețe orizontale unghiul β este de asemenea zero.

Din expresia (13) se deduce viteza inițială pe direcția axei y

$$v_y' = \left(\frac{\delta \sigma v \cos\theta}{8\eta x}\right)^{1/2}, \tag{32}$$

iar pentru viteza medie expresia este de forma

$$v_y = \left(\frac{\delta \sigma v \cos \theta}{4 \eta x}\right)^{1/2}. \tag{33}$$

Înlocuind în relația (31) se deduce viteza reală de curgere în direcția axei x :

$$v_r = \left(\frac{C}{x} - D\right)\left[1 - E\left(\frac{x}{\frac{C}{x} - D}\right)^{1/2}\right], \tag{34}$$

în care

$$C = \frac{\sigma L^2 \sin \alpha}{8 r \eta}\left\{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\left[\frac{1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}\right]\right\},$$

$$D = \frac{\rho g L^2 \sin \beta \sin \alpha}{8 \eta}\left\{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\left[\frac{1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)}\right]\right\},$$

$$E = \left(\frac{\delta^3 \sigma \cos \theta \sin^2 \alpha}{4 \eta L^4}\right)^{1/2}.$$

Pentru poziția orizontală a muchiei suprafețelor de contact obținem

$$v_r = \frac{C}{x}\left[1 - E\left(\frac{x^2}{C}\right)^{1/2}\right]. \tag{35}$$

Integrînd în raport cu timpul ecuațiile (34) și (35) se deduce spațiul parcurs de ulei. Pentru poziția orizontală a muchiei, spațiul x se poate determina din ecuația transcendentă

$$EC^{1/2} t = EC^{1/2} x + C \ln |C - EC^{1/2} x| - C \ln C \tag{36}$$

Pentru suprafețele orientate în spațiu cu unghiul $\beta \neq 0$ se deduce

$$t + c_1 = \frac{1}{DE} \ln \left| \frac{D^2}{2} - CDE + \frac{D^2 E}{2} x \right| -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C}\right)^2 + \frac{D^3 E}{C}\right.}} \times$$

$$\times \ln \left| \frac{\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C} - \frac{D^2E}{C} x - \sqrt{\left(\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C}\right)^2 + \frac{D^3E}{C}}}{\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C} - \frac{D^3E}{C} x + \sqrt{\left(\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C}\right)^2 - \frac{D^3E}{C}}} \right|,$$

unde

$$c_1 = \frac{1}{DE} \ln \left| \frac{D^2}{2} - CDE \right| - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C}\right)^2 - \frac{D^3E}{C}}} \times$$

$$\times \ln \left| \frac{\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C} - \sqrt{\left(\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C}\right)^2 + \frac{D^3E}{C}}}{\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C} + \sqrt{\left(\frac{3DE}{2} - \frac{D^2}{2C}\right)^2 + \frac{D^3E}{C}}} \right|.$$

În tabelul 2 sînt indicate rezultatele experimentale și rezultatele teoretice calculate pe baza ecuației (35). Din compararea acestor rezultate se constată o concordanță satisfăcătoare. Se consideră că pentru practica ungerii ghidajelor aceste diferențe sînt nesemnificative.

Tabelul 2

PROCEDEUL TEHNOLOGIC Rectificare	Spațiul parcurs de ulei mm	Viteza uleiului mm/min	
		experimentală	teoretică
Rizurile paralele	11	4	3,9
	15,5	3,3	2,7
	18	3,05	2,3
	20	2,65	2,0
Rizurile cu unghiul 30°	13	3,8	3,4
	13,5	3,0	3,2
	15	2,9	2,8
	17	2,5	2,5
	20	2,0	2,01
Rizurile cu unghiul 45°	16,5	3,9	2,5
	14	3,3	3,1
	17,5	2,6	2,4
	20	2,0	1,99
Rizurile perpendiculare	12	4,2	3,7
	13	3,6	3,3
	16	3,0	2,6
	16,5	2,5	2,5
	17,2	2,0	2,4
	20	1,7	2,0

4. CONCLUZII

Față de cele prezentate, se pot trage următoarele concluzii cu implicații asupra modului de administrare a uleiului la ghidajele plane ce funcționează la viteze mici :

1. Efectele forțelor cauzate de tensiunea superficială a uleiului și a celor gravitaționale sînt importante la ungerea suprafețelor plane, mai ales atunci cînd vitezele de alunecare sînt mici ;

2. Efectul capilar se manifestă sub două forme : curgerea uleiului printre asperitățile suprafețelor ce se găsesc în contact și pe muchia de separație a celor două suprafețe, muchie pe care întotdeauna viteza de curgere este mai mare ;

3. Pentru un anumit ulei și pentru o anumită rugozitate există o viteză de alunecare critică a suprafețelor peste a cărei valoare ungerea prin capilaritate nu mai poate fi asigurată ;

4. Pentru îmbunătățirea condițiilor de ungere prin efectul capilar sînt recomandate suprafețe prelucrate astfel încît rugozitatea să aibă înălțimea mare și unghiul de înclinare mic în direcția de acces a uleiului ;

5. Suprafețele de contact trebuie să formeze muchii cu unghiuri cît mai mici și apare deci necesitatea unui sistem de canale ; aceste canale trebuie să aibă dimensiunile mai mici decît valorile critice indicate de relațiile (19) sau (20) ;

6. Alimentarea cu ulei a suprafețelor plane rugoase trebuie să se facă pe muchiile laterale sau pe fața de contact situată către sensul mișcării relative a celor două suprafețe ;

7. Pentru suprafețele de dimensiuni mari este obligatorie practicarea de orificii prin care trebuie adus uleiul pentru ca acesta să se „împrăștie" prin efect capilar pe toată zona de contact.

Primită la 19 martie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. A. TUDOR, LI CHUN BO, *Aspecte teoretice privind influența vitezei de antrenare și a amortizării asupra parametrilor mișcării sacadate (stick-slip)*, St. cerc. mec. apl., **40**, 5, p. 741 — 752 (1981).
2. L. CIGAN, *Influența principalilor factori ai frecării asupra alunecării intermitente la ghidajele mașinilor unelte*, St. cerc. mec. apl., **27**, 5, p. 1079 — 1089 (1968).
3. D. PAVELESCU, A. TUDOR *Influence of the microgeometry on the ratio* μ_{as}/μ_{ak} *and the operation of a friction pair in the range of low velocites* Rev. Roum. Sci. Techn — Méc. Appl., **22**, 6, p. 951 — 958 (1977).
4. T. DEMIAN, A. PASCU, *Studiul și calculul unor noi lagăre capilare*, „Tribotehnica '84", Iași, 1984, vol. II, p. 5 — 10.
5. I. M. HANDELSMAN, *Camnevîe oporî*, Moskva, Mașinostroenie, 1973.
6. A. TUDOR, A. CIOCÎRLEA-VASILESCU, *Asupra cantității optime de lubrifiant în lagărele radiale de precizie cu piatră sintetică*, „Tribotehnica '78", Galați, 1978, p. 423 — 428.
7. R. ȚIȚEICA, I. POPESCU, *Fizica generală*, Vol. I, Edit. tehnică, București, 1971.
8. T. N. MANOLOV, *Pnevmohidravliciniat metod v tribologhiata*. Avtoreferat na disertația za polucevanie na naucinata stepen „Doctor na tehnic nauchi", Sofia, 1984.

ASUPRA UNEI CURBE FUNICULARE ÎN SPAȚIU *)

de MIRCEA V. SOARE

Institutul de Construcții, București

Se arată că elicea circulară este curba funiculară pentru încărcarea normală uniform distribuită în lungul arcului. Bara având această axă și încărcare este supusă unui efort axial constant.

Se cunosc ecuațiile diferențiale de echilibru ale unei bare a cărei axă este o curbă strîmbă (vezi, de exemplu, [1], [2], [3] ((fig. 1) :

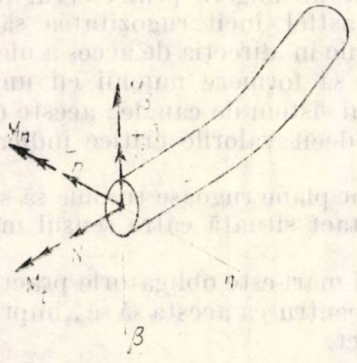


Fig. 1.

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_n}{\rho} + p_t = 0, \tag{1a}$$

$$\frac{dT_n}{ds} + \frac{N}{\rho} - \frac{T_\beta}{\rho_1} + p_n = 0, \tag{1b}$$

$$\frac{dT_\beta}{ds} + \frac{T_n}{\rho} + p_\beta = 0; \tag{1c}$$

$$\frac{dM_t}{ds} - \frac{M_n}{\rho} + m_t = 0, \tag{1d}$$

$$\frac{dM_n}{ds} + \frac{M_t}{\rho} - \frac{M_\beta}{\rho_1} - T_\beta + m_n = 0, \tag{1e}$$

$$\frac{dM_\beta}{ds} + \frac{M_n}{\rho_1} + T_n + m_\beta = 0, \tag{1f}$$

în care ρ reprezintă raza de curbură normală într-un punct oarecare; ρ_1 — raza de curbură la torsiune; iar indicii t, n, β precizează proiecții pe tangentă, normala principală și, respectiv binormală; N reprezintă efortul axial din secțiunea transversală a barei, T_n, T_β — forțele tăietoare dirijate după normala principală, respectiv, după binormală; M_n, M_β — momentele încovoietoare ai căror vectori sînt așternuți pe normala principală, respectiv binormală; M_t — momentul de torsiune; p_t, p_n, p_β sînt

*) Text revăzut al comunicării cu același titlu prezentate la a VII-a Consfătuire de Mecanica Solidelor, Petroșani, 10—11 iunie 1983.

componentele încărcării distribuite, dirijate după cele trei direcții, iar m_t, m_n, m_β — componentele momentelor distribuite, ai căror vectori sînt dirijați după cele trei direcții.

Vom denumi *curbă funiculară* acea curbă pentru care în bara care o admite ca axă apar doar *eforturi normale*. Considerînd că doar $N \neq 0$ și toate celelalte componente T și M sînt nule, ecuațiile (1) se reduc la următoarele două :

$$\frac{dN}{ds} + p_t = 0, \tag{2a}$$

$$\frac{N}{\rho} + p_n = 0 \tag{2b}$$

Din ecuațiile (1c) — (1f) rezultă că celelalte componente ale încărcării trebuie să fie nule ($p_\beta = 0$, m_t, m_n, $m_\beta = 0$).

Relațiile (2a), (2b) conțin patru mărimi și anume N, ρ, p_n și p_t. Ele permit determinarea a două din ele cînd sînt cunoscute celelalte două.

★

În continuare ne vom fixa la elicea circulară. Vom reaminti o modalitate simplă de obținere a elicei.

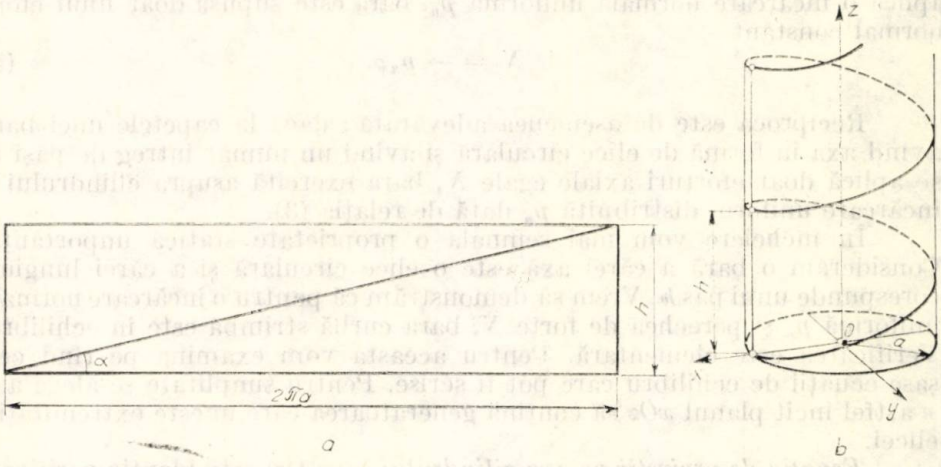


Fig. 2.

Într-un dreptunghi avînd baza $2\pi a$ și înălțimea h se duce o diagonală care face unghiul α cu baza (fig. 2*a*) Mai departe se înfășoară foaia dată pe un cilindru circular de rază a. Diagonala trasată anterior devine un arc de elice, astfel încît cele două extremități ale lui sînt situate pe aceeași generatoare ; h reprezintă pasul elicei (fig. 2*b*).

Curba se întinde la infinit în ambele sensuri ale axei cilindrului. Ecuația parametrică a elicei este :

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = \frac{h}{2\pi}t,$$

iar ecuația cilindrului circular, pe care este situată elicea,

$$x^2 + y^2 = a^2$$

(axa Oz este axa cilindrului).

Raza de curbură a elicei se bucură de proprietatea că este constantă :

$$\rho = \frac{a}{\cos^2\alpha} = a\left[1 + \left(\frac{h}{2\pi a}\right)\right]^2.$$

Să presupunem, mai departe, că N = const. Atunci din (2a) rezultă $p_t = 0$, iar din (2b) se deduce :

$$p_n = -\frac{N}{\rho} = \text{const.} \tag{3}$$

Așadar, dacă asupra unei bare a cărei axă este o elice circulară se aplică o încărcare normală uniformă p_n, bara este supusă doar unui efort normal constant

$$N = -p_n\rho. \tag{4}$$

Reciproca este de asemenea adevărată : dacă la capetele unei bare avînd axa în formă de elice circulară și avînd un număr întreg de pași h, se aplică doar eforturi axiale egale N, bara exercită asupra cilindrului o încărcare uniform distribuită p_n dată de relația (3).

În încheiere vom mai semnala o proprietate statică importantă. Considerăm o bară a cărei axă este o elice circulară și a cărei lungime corespunde unui pas h. Vrem să demonstrăm că pentru o încărcare normală uniformă p_n și perechea de forțe N, bara curbă strîmbă este în echilibru. Verificarea este elementară. Pentru aceasta vom examina pe rînd cele șase ecuații de echilibru care pot fi scrise. Pentru simplitate se alege axa x astfel încît planul xOz să conțină generatoarea care unește extremitățile elicei.

Ecuația de proiecții pe axa cilindrului (axa Oz) este identic verificată deoarece încărcarea normală pe fiecare element de arc ($p_n ds$) întîlnește axa.

Două ecuații de proiecții în secțiune normală pe axa cilindrului (de exemplu axele x și y) sînt identic verificate deoarece secțiunea este încărcată uniform cu încărcarea (fig. 3)

$$p' = \frac{p}{\cos^2\alpha}$$

Ecuația de momente în raport cu axa cilindrului este identic verificată deoarece încărcarea normală pe fiecare element de arc ($p_n ds$) întîlnește axa Oz.

Ecuația de momente în raport cu axa y, în care intervin atît forțele N, cît și încărcarea p_n este identic verificată deoarece încărcarea distribuită este autoechilibrată, iar forțele N sînt situate într-un plan tangent care este paralel cu axa y.

Ecuația de momente în raport cu axa x. Forțele N sînt descompuse în două componente $N\sin\alpha$ care au ca suport generatoarea comună extremităților arcului de elice și două componente $N\cos\alpha$ care constituie un cuplu de braț h. Ecuația de momente în raport cu tangenta la cercul director la cota $z = 0$ și paralelă cu axa Oy se scrie, succesiv,

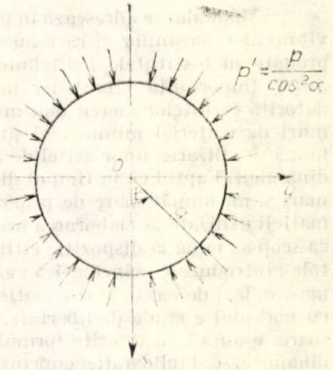


Fig. 3.

$$M_x = \int_0^{2\pi} p_n ds \cos\alpha \cdot \sin t \cdot z - N\cos\alpha \cdot h.$$

Ținînd seama că

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \rho\, dt,$$

relația precedentă devine, succesiv,

$$M_x = \int_0^{2\pi} p_n \rho dt \cdot \cos\alpha \cdot \sin t \cdot \frac{h}{2\pi} t - Nh\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} p_n \rho h \cdot \cos\alpha \int_0^{2\pi} t \cdot \sin t\, dt - Nh\cos\alpha =$$

$$= -p_n \rho h \cos\alpha - Nh\cos\alpha.$$

Ținînd seama de relația (4), rezultă $M_x \equiv 0$

Primită la redacție la 25 iunie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. R. L'HERMITE, *Résistance des Matériaux théorique et expérimentale*, T. 1, Dunod, Paris, 1954, p. 291—2.
2. P. P. TEODORESCU, *Sisteme mecanice. Modele clasice*, Vol. 1, Edit. tehnică, București, 1984, p. 272.
3. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Ed. a II-a, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1984.

E. KRÄMER, *Dinamica mașinilor* (Maschinendynamik) cu 272 fig. și 20 tabele, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984

Manualul se adresează în primul rînd practicienilor care doresc să se recicleze în problemele vibrațiilor mașinilor și care au cunoștințe de mecanică tehnică și matematică la nivelul celor predate în institutele politehnice.

Importanța vibrațiilor în construcția de mașini a crescut mereu cu evoluția acesteia datorită cerințelor mereu mai mari. Astfel, mașinile trebuie să dezvolte puteri mari cu consumuri de material minime, să prezinte siguranță în funcționare și să aibe o durată de viață lungă. Realizarea unor astfel de mașini necesită cunoștințe solide ale proiectanților în domeniul dinamicii. Faptul că în timpul din urmă stau la dispoziție calculatoare electronice cu capacități mari și un număr mare de programe de calcul necesită cunoștințe bune ale mecanicii și matematicii utilizate la elaborarea acestor programe, de către cei care doresc să le aplice. Cartea are ca scop să pună la dispoziție cititorului tocmai aceste cunoștințe. Ea cuprinde următoarele capitole : introducere ; cinematica ; elemente de modele de calcul ; amortizarea ; momente de inerție masice, legi de bază ale cinematicii, vibrații cu un grad de libertate, statica structurilor, vibrații cu mai mul e grade de libertate, dinamica structurilor, continuul unidimensional, vibrații aleatoare, o anexă cu diferite formule și relații matematice sau din mecanică necesare în calculele dinamice, o bibliografie cuprinzătoare și un index.

G. Winter

Acad. IOAN ANTON : „Cavitația", vol. II, Editura Academiei R. S. România, 1985, 720 p.

„Cavitația", vol. II, a apărut în Editura Academiei R. S. România în octombrie 1985.

Autorul, acad. Ioan Anton, este profesor universitar, șeful Catedrei de mașini hidraulice de la Institutul Politehnic din Timișoara, cunoscut cercetător în domeniul cavitației la mașinile hidraulice.

Tratatul „Cavitația" este o sinteză a activității de cercetare în domeniul vast al cavitației și al implicațiilor sale în cele mai variate domenii.

Volumul al doilea al „Cavitației" este o dezvoltare firească a elementelor pregătitoare prezentate în prima parte a tratatului ; el are o dezvoltare mult mai amplă extinsă pe 720 pagini în cele 13 capitole (7—19) cu aproape 1200 trimiteri bibliografice cuprinzînd esența informațiilor provenite de la autori cunoscuți și consacrați ai domeniului.

În capitolul 7 este analizată cu minuțiozitate comportarea profilelor hidrodinamice singulare sau în rețea, în regim de cavitație și supercavitație. Se definesc în acest cadru coeficienții de cavitație, introducîndu-se elemente noi cu caracter de originalitate cum sînt curbele de sensibilitate ale profilelor, respectiv rețelelor de profile, pentru care se dau metode de determinare directă prin calcul. Sînt analizate și metodele experimentale de determinare a caracteristicilor energo-cavitaționale ale acestora, relevîndu-se construcția diagramelor universale de funcționare. Se studiază în conexiune efectele de scară asupra caracteristicilor de cavitație.

În capitolul 8 sînt tratate problemele cavitației curentului lichid la trecerea peste diferite obstacole cu o structură geometrică regulată : cilindru, sferă, placă plană, prismă, respectiv con. Se studiază modificările caracteristicilor curgerii asociate fenomenelor de desprindere.

În capitolul 9 sînt tratate implicațiile apariției și dezvoltării fenomenului cavitațional în conducte și coturi asociate regimurilor de exploatare tehnică a acestora. Se insistă în conexiune asupra dezvoltării cavitației în aparate de măsură a debitelor racordate la circuite hidraulice ca : tuburi Venturi, ajutaje, diafragme, sau similare cu referire la influențele asupra caracteristicilor acestora.

În capitolul 10 sînt tratate aparte problemele cavitației în organele de închidere și reglare intercalate în circuite hidraulice. O atenție specială se acordă distribuitoarelor, studiindu-se caracteristicile hidrodinamice ale acestora în regim fără și cu cavitație.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 1, 1986, P. 106—107.

Partea centrală a volumului îl ocupă capitolele legate de implicațiile fenomenului cavitațional în funcționarea mașinilor hidraulice : turbine, pompe, mașini hidraulice reversibile. Se definesc coeficienții de cavitație proprii ai mașinilor hidraulice într-o concepție originală, studiindu-se influența diferiților parametri de construcție și hidrodinamici asupra comportării lor din punct de vedere cavitațional. Se studiază caracteristicile de cavitație ale mașinilor hidraulice, metodologia determinării lor, analizîndu-se o mare varietate de rezultate experimentale, multe din ele obținute de autorul însuși, respectiv de colaboratorii săi. Se relevă studiul original al similitudinii la cavitație ale turbinelor și pompelor cu aprecieri asupra efectului de scară, introdus de autor pentru prima dată în literatura de specialitate. Importanța acestor capitole rezultă din extensiunea lor masivă pe jumătate din cuprinsul volumului, respectiv 700 trimiteri bibliografice. Pe considerentul că profilele hidrodinamice, studiate minuțios sub raport energetic și cavitațional în capitolul 7, sînt elementele constitutive ale sediului transformării energetice a acestor mașini, rotorul, considerăm că problemele cavitației la mașinile hidraulice cunosc prin această lucrare tratarea lor cea mai completă, unitară și sistematică din întreaga literatură de specialitate. În capitolul 11 sînt tratate sub acest raport turbinele de tipul axial și radial-axial, cu completările aferente asupra eroziunii cavitaționale implicate în exploatarea lor. În capitolul 12 sînt tratate în mod similar pompele : centrifuge și axiale, cu completările aferente construcției și funcționării pompelor cu impulsor, a pompelor supercavitaționale, respectiv a ejectoarelor. În capitolul 13 sînt studiate condiții specifice ale implicării fenomenului cavitațional în funcționarea mașinilor hidraulice reversibile.

În capitolul 14 se analizează dezvoltarea fenomenului cavitațional la elice marine. Cu această ocazie sînt introduse pentru prima dată caracteristicile primare de cavitație ale acestora.

În capitolul 15 se studiază aparte natura fizică a cavitației și aspectele acesteia în lagăre, se definesc coeficienții de cavitație și curbele caracteristice aferente.

În capitolul 16 se studiază cavitația la diferite elemente de construcții hidrotehnice ca : descărcători, nișe de ghidaj, pentru stavile,ca și la unele echipamente mecanice din dotarea acestora. În conexiune sînt analizate o serie de metode de atenuare a dezvoltării fenomenului cavitațional și a efectelor sale în acest domeniu.

Capitolele 17, 18 și 19 se ocupă de probleme speciale de implicare a fenomenului cavitațional în diferite ramuri de activitate, tehnică și de cercetare științifică : metalurgie, criogenie, chimie, biologie și în mod special în procese tehnologice neconvenționale de prelucrare.

Sub raport practic, considerînd în ansamblul lor cele două volume „Cavitația" nu este numai primul tratat românesc în acest domeniu, ci este tratatul izvorît din necesitățile activității de cercetare și tehnice românești dezvoltate în amploarea cerută de aceste nevoi și redactat de autorul lor în condiții de aprofundare științifică de excepție. În fapt, studiind „Cavitația" cititorul, cercetător sau inginer, om de știință sau student, va găsi în ea toate informațiile aduse în actualitate ale domeniului. „Cavitația" în cele două volume ale sale, devine un prețios colaborator pentru studii în cele mai variate ramuri ale științei și tehnicii, deoarece fenomenul cavitațional, împreună cu efectele sale, poate apărea oriunde acolo unde în obiectul cercetat se găsesc, în mișcare, lichide de orice fel.

Prof. dr. ing. Iosif Preda

TERMOSTATICA FLUIDELOR TERMOELASTICE. III. STABILITATEA ECHILIBRULUI GLOBAL *

de IOANA LUCA
ICECHIM,
EUGEN SOÓS
INCREST

Termostatica este privită ca o teorie autonomă. Se dau caracterizări ale stabilității echilibrului termic global și se cercetează relațiile ce există între diferitele caracterizări posibile. Se arată că în cazul fluidelor termoelastice neomogene caracterizările nu sînt echivalente între ele.

12. STABILITATEA GLOBALĂ DE TIP GIBBS-COLEMAN-NOLL

În partea a doua a lucrării vom studia condițiile care caracterizează și/sau asigură permanența (stabilitatea) stărilor globale de echilibru termic ale fluidelor termoelastice *izolate* (omogene sau neomogene). La baza considerațiilor noastre stau ideile fundamentale ale lui Gibbs legate de criteriile de stabilitate ale echilibrului termic (vezi în special [3], §§ 1, 6) și rezultatele esențiale ale lui Coleman și Noll privind formalizarea matematică riguroasă a ideilor lui Gibbs în cadrul unei teorii de sine stătătoare a termostaticii (vezi în special [9], §§ 14, 16).

Definiția 12.1. Fie $\{v, \eta\}$ o stare globală (în reprezentarea energetică) a unui fluid termoelastic și fie $\{\varepsilon\}$ distribuția de energie internă specifică corespunzătoare acestei stări. Mărimile

$$V = \int_B v(X)\,dm, \quad H = \int_B \eta(X)\,dm, \quad E = \int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta(X), X)\,dm \tag{12.1}$$

reprezintă *volumul*, *entropia totală*, respectiv *energia totală* a corpului B în starea $\{v, \eta\}$.

Definiția 12.2. (Gibbs, Coleman, Noll). O stare globală de echilibru termic $\{v, \eta\}$ a fluidului termoelastic B se numește $\hat{\mathbf{G}}$ *stabilă* dacă în orice altă stare $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}\}$, în care corpul B are același volum și aceeași entropie totală ca în starea $\{v, \eta\}$, energia internă totală a lui B este strict mai mare decît în starea $\{v, \eta\}$, adică

$$\int_B \overset{*}{v}(X)\,dm = \int_B v(X)\,dm \quad \text{și} \quad \int_B \overset{*}{\eta}(X)\,dm = \int_B \eta(X)\,dm \tag{12.2}$$

* Prima parte a lucrării, publicată în STUDII și CERCETĂRI de MECANICĂ APLICATĂ, vol. 44, nr. 6 (1985), conține referirile bibliografice.

implică

$$\int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta(X))\mathrm{d}m < \int_B \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}(X), \overset{*}{\eta}(X))\,\mathrm{d}m, \tag{12.3}$$

cu excepția cazului în care $\overset{*}{v}(X) = v(X)$, $\overset{*}{\eta}(X) = \eta(X)$ pentru orice particulă X din B.

Definițiile precedente sînt adecvate situației în care se utilizează reprezentarea energetică pentru caracterizarea stărilor de echilibru termic ale unui fluid termoelastic. Vom da în continuare definițiile corespunzătoare cazului în care caracterizarea stărilor de echilibru termic ale corpului se face prin intermediul reprezentării entropice, echivalentă — după cum am arătat-o — cu cea energetică.

Definiția 12.3. Fie $\{v, \varepsilon\}$ o stare globală (în reprezentarea entropică) a fluidului termoelastic considerat și fie $\{\eta\}$ distribuția de entropie specifică corespunzătoare acestei stări. Mărimile

$$V = \int_B v(X)\,\mathrm{d}m, \quad E = \int_B \varepsilon(X)\mathrm{d}m, \quad H = \int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon(X), X)\,\mathrm{d}m \tag{12.4}$$

reprezintă *volumul, energia internă totală*, respectiv *entropia totală* a corpului B în starea $\{v, \varepsilon\}$.

Reamintim că $\check{\eta}(v, \varepsilon, X)$ este funcția entropie specifică a cărei existențe a fost demonstrată în teorema 5.3 și ale cărei proprietăți de regularitate au fost stipulate în ipoteza $\check{\mathbf{I}}$.

Definiția 12.4 (Gibbs, Coleman, Noll). O stare globală de echilibru termic $\{v, \varepsilon\}$ a fluidului termoelastic B se numește $\check{\mathbf{G}}$ *stabilă*, dacă în orice altă stare $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}\}$, în care B are același volum și aceeași energie internă totală ca în starea $\{v, \varepsilon\}$, entropia totală a lui B este strict mai mică decît în starea $\{v, \varepsilon\}$; adică

$$\int_B \overset{*}{v}(X)\mathrm{d}m = \int_B v(X)\,\mathrm{d}m \quad \text{și} \quad \int_B \overset{*}{\varepsilon}(X)\mathrm{d}m = \int_B \varepsilon(X)\,\mathrm{d}m \tag{12.5}$$

implică

$$\int_B \check{\eta}(\overset{*}{v}(X), \overset{*}{\varepsilon}(X), X)\mathrm{d}m < \int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon(X), X)\,\mathrm{d}m, \tag{12.6}$$

cu excepția cazului în care $\overset{*}{v}(X) = v(X)$, $\overset{*}{\varepsilon}(X) = \varepsilon(X)$ pentru orice particulă X a lui B.

Conform considerațiilor prezentate în partea introductivă a lucrării, legătura ce există între cele două tipuri de stabilitate globală a fost stabilită de Gibbs în ipoteza (neformulată, dar tacit admisă) că are loc o proprietate analoagă cu cea formulată și demonstrată de noi în teorema 5.1; demonstrarea riguroasă a *echivalenței* celor două definiții a fost dată de

Coleman și Noll; în continuare vom prezenta — pentru completitudine — demonstrația celor doi autori, adoptînd raționamentele lor la cazul particular al fluidelor termoelastice.

Teorema 12.1. O stare globală de echilibru termic $\{v, \eta\}$ a unui fluid termoelastic este $\hat{\mathbf{G}}$ stabilă dacă și numai dacă starea globală de echilibru termic *corespunzătoare* $\{v, \varepsilon\}$ este $\check{\mathbf{G}}$ stabilă.

„Corespunzătoare" înseamnă că valorile distribuțiilor $\{\eta\}$ și $\{\varepsilon\}$ sînt legate între ele prin ecuația calorică de stare $(3.2)_1$ sau, echivalent, prin relația (5.2).

Demonstrație. Vom arăta că, dacă nu are loc proprietatea formulată în definiția 12.4, atunci nu va avea loc nici proprietatea descrisă în definiția 12.2. În acest mod va rezulta necesitatea condiției din definiția 12.4 pentru ca proprietatea stipulată în definiția 12.2 să nu fie violată.

Așadar vom demonstra că, dacă există o stare $\{v, \eta_1\}$ pentru care distribuția $\{\eta_1\}$ nu este identică cu distribuția $\{\eta\}$ și care satisface restricțiile (12.5), dar violează condiția (12.6), atunci va exista și o stare $\{v, \eta_2\}$ pentru care $\{\eta_2\}$ nu este identic cu $\{\eta\}$ și care satisface restricțiile (12.2), dar violează condiția (12.3).

Fie deci $\{\eta_1\} \neq \{\eta\}$ așa încît

$$\int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta(X), X)\, \mathrm{d}m = \int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta_1(X), X)\, \mathrm{d}m \tag{12.7}$$

$$\int_B \eta(X)\mathrm{d}m \leqslant \int_B \eta_1(X)\, \mathrm{d}m\,; \tag{12.8}$$

vom arăta că există $\{\eta_2\} \neq \{\eta\}$ astfel încît să avem

$$\int_B \eta_2(X)\, \mathrm{d}m = \int_B \eta(X)\, \mathrm{d}m, \tag{12.9}$$

$$\int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta_2(X), X)\mathrm{d}m \leqslant \int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta(X), X)\, \mathrm{d}m. \tag{12.10}$$

Fie

$$H = \int_B \eta(X)\mathrm{d}m, \quad H_1 = \int_B \eta_1(X)\, \mathrm{d}m \tag{12.11}$$

și să definim distribuția de entropie $\{\eta_2\}$ prin relația

$$\eta_2(X) = \eta_1(X) + (H - H_1)/M, \tag{12.12}$$

unde

$$M = \int_B \mathrm{d}m \tag{12.13}$$

reprezintă *masa totală* (dată) a corpului B.

Din (12.11) — (12.13) rezultă

$$H_2 = \int_B \eta_2(X)\, dm = H. \tag{12.14}$$

În consecinţă, starea $\{v, \eta_2\}$ satisface restricţiile (12.2).

Folosind notaţiile (12.11), putem scrie inegalitatea (12.8) astfel:

$$H \leqslant H_1. \tag{12.15}$$

Vom distinge două cazuri.

(*a*) $H = H_1$. În acest caz, din (12.12) urmează $\{\eta_2\} \equiv \{\eta_1\}$, deci $\{\eta_2\} \neq \{\eta\}$, deoarece am presupus că $\{\eta_1\}$ nu este identic cu $\{\eta\}$. În plus, din (12.7) urmează că

$$\int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta_2(X), X)dm = \int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta_1(X), X)dm = \int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta(X), X)\, dm, \tag{12.16}$$

deci are loc (12.10).

(*b*) $H < H_1$. Din (12.12) rezultă că

$$\eta_2(X) < \eta_1(X), \qquad \forall\, X \text{ din } B. \tag{12.17}$$

Folosind relaţia (12.7) şi teorema 5.1, conchidem că

$$\int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta_2(X), X)\, dm < \int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta_1(X), X)dm = \int_B \hat{\varepsilon}(v(X), \eta(X), X)\, dm; \tag{12.18}$$

în consecinţă (12.10) are loc şi în acest caz, iar conform inegalităţii stricte din (12.18), $\{\eta_2\}$ nu este identic cu $\{\eta\}$.

Rezultatele obţinute demonstrează *necesitatea* condiţiei ce apare în formularea $\check{\mathbf{G}}$ stabilităţii pentru ca cea impusă în enunţul $\hat{\mathbf{G}}$ stabilităţii să fie îndeplinită.

Trecem acum la demonstrarea *suficienţei*. În acest scop, presupunem că există o distribuţie $\{\varepsilon_1\}$ neidentică cu $\{\varepsilon\}$, aşa încît

$$\int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon_1(X), X)\, dm = \int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon(X), X)\, dm, \tag{12.19}$$

$$\int_B \varepsilon_1(X)\, dm \leqslant \int_B \varepsilon(X)\, dm. \tag{12.20}$$

Fie

$$E = \int_B \varepsilon(X)\,\mathrm{d}m, \qquad E_1 = \int_B \varepsilon_1(X)\,\mathrm{d}m \tag{12.21}$$

și să definim distribuția de energie internă $\{\varepsilon_2\}$ prin relația

$$\varepsilon_2(X) = \varepsilon_1(X) + (E - E_1)/M, \quad \forall X \text{ din } B. \tag{12.22}$$

Din (12.21), (12.22) și (12.3) rezultă

$$E_2 = \int_B \varepsilon_2(X)\,\mathrm{d}m = E. \tag{12.23}$$

În consecință, starea $\{v, \varepsilon_2\}$ satisface restricțiile (12.5).

Folosind notațiile (12.21) putem scrie inegalitatea (12.20) astfel:

$$E_1 \leqslant E. \tag{12.24}$$

Din nou vom distinge două cazuri:

(*a*) $E = E_1$. În acest caz din (12.22) urmează $\{\varepsilon_2\} \equiv \{\varepsilon_1\}$, deci $\{\varepsilon_2\} \neq \{\varepsilon\}$, deoarece am presupus că $\{\varepsilon_1\}$ nu este identic cu $\{\varepsilon\}$. În plus, din (12.19) urmează că

$$\int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon_2(X), X)\,\mathrm{d}m = \int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon_1(X), X)\,\mathrm{d}m = \int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon(X), X)\,\mathrm{d}m; \tag{12.25}$$

deci inegalitatea (12.6) este violată, cu toate că restricțiile (12.5) sînt respectate.

(*b*) $E_1 < E$. Din (12.22) urmează că:

$$\varepsilon_2(X) < \varepsilon_1(X), \quad \forall X \text{ din } B. \tag{12.26}$$

Folosind relația (12.19) și teorema 5.3, conchidem că

$$\int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon_2(X), X)\,\mathrm{d}m < \int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon_1(X), X)\,\mathrm{d}m = \int_B \check{\eta}(v(X), \varepsilon(X), X)\mathrm{d}m; \tag{12.27}$$

în consecință inegalitatea (12.6) este violată și în acest caz, iar conform inegalității stricte din (12.27), $\{\varepsilon_2\}$ nu este identic cu $\{\varepsilon\}$.

Rezultatele de mai sus demonstrează *suficiența* condiției ce apare în formularea $\check{\mathbf{G}}$ stabilității pentru ca cea impusă în enunțul $\hat{\mathbf{G}}$ stabilității să fie satisfăcută.

Observația 12.1. Deoarece $\hat{\mathbf{G}}$ stabiliteatea este *echivalentă* cu $\check{\mathbf{G}}$ stabilitatea, în continuare vom vorbi despre **G** *stabilitate*.

Următoarea teoremă, conjecturată de Gibbs, formulată și demonstrată riguros de Coleman și Noll și reprodusă pentru completitudine aici, stabilește natura pe care trebuie să o aibă o distribuție de presiune-temperatură căreia îi corespunde o stare globală de echilibru termic **G** stabilă. Proprietatea de uniformitate(omogeneitate) a distribuției respective, stabilită prin teorema ce urmează, a fost acceptată de Gibbs fără demonstrație, ca un fapt adevărat (vezi de exp. [1], § 1).

Teorema 12.2 (Coleman, Noll). O stare globală de echilibru termic $\{v, \eta\}$ a unui fluid termoelastic este **G** stabilă dacă și numai dacă corespunde unei distribuții *uniforme* (*omogene*) de presiune-temperatură $\{p, t\}$; deci dacă

$$p(X) = \text{const.}, \quad t(X) = \text{const.}, \qquad \forall X \text{ din } B. \tag{12.28}$$

Demonstrație. Arătăm mai întîi *necesitatea*. Pentru aceasta observăm că *funcțiile* v și η sînt soluțiile problemei variaționale

$$\int_B \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta})\, dm = \text{minim}, \tag{12.29}$$

cu constrîngerile

$$\int_B \overset{*}{v} dm = \int_B v dm, \quad \int_B \overset{*}{\eta} dm = \int_B \eta dm. \tag{12.30}$$

Observăm că pentru concizie, aici și în continuare argumentul X în general nu este menționat, dacă această omitere nu produce confuzii.

Din relațiile(12.29), (12.30), urmează că prima variație a funcționalei

$$\int_B [\hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \lambda \overset{*}{v} - \mu \overset{*}{\eta}]\, dm \tag{12.31}$$

trebuie să se anuleze pentru $\overset{*}{v} = v$, $\overset{*}{\eta} = \eta$, λ și μ fiind parametrii langrangeeni constanți. Conchidem astfel că funcțiile v și η trebuie să satisfacă relațiile

$$\hat{\varepsilon}_v(v(X), \eta(X), X) = \lambda = \text{const.}, \quad \hat{\varepsilon}_\eta(v(X), \eta(X), X) = \mu = \text{const.} \tag{12.32}$$

Deoarece $\{v, \eta\}$ este o stare globală de *echilibru* termic, din (12.32) și din ecuațiile termice de stare (4.3) urmează că distribuția de presiune-temperatură $\{p, t\}$, căreia îi corespunde starea $\{v, \eta\}$, satisface proprietatea de uniformitate (12.28).

Demonstrăm acum *suficiența*. Presupunem că *funcțiile* p și t sînt independente de X (au valori constante) și fie $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}\}$ o stare a corpului diferită de starea de echilibru termic $\{v, \eta\}$ corespunzătoare distribuției (uniforme) $\{p, t\}$, așa încît să fie satisfăcute restricțiile (12.30). Integrarea pe B

a relației (de convexitate) (4.4), cu luarea în considerație a relațiilor constitutive (4.3), a restricțiilor (12.30) și a proprietății de uniformitate (12.28), ne conduce la inegalitatea

$$\int_B \hat{\varepsilon}(v(X),\ \eta(X),\ X)\,\mathrm{d}m < \int_B \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}(X),\ \overset{*}{\eta}(X),\ X)\,\mathrm{d}m. \tag{12.33}$$

Prin urmare, restricțiile (12.2) implică inegalitatea (12.3), ori de cîte ori starea $\{\overset{*}{v},\ \overset{*}{\eta}\}$ este diferită de starea $\{v,\ \eta\}$.

13. ENERGIA LIBERĂ ȘI **G** STABILITATEA

În acest paragraf vom prezenta o caracterizare a stărilor globale **G** stabile prin intermediul energiei libere; rezultatul principal (teorema 13.1) este datorat lui Coleman și Noll (vezi [9], § 16).

Definiția 13.1. Fie $\{v, t\}$ o distribuție de volum specific-temperatură absolută în corpul B. Mărimea

$$F = \int_B \tilde{\psi}(v(X),\ t(X),\ X)\,\mathrm{d}m \tag{13.1}$$

se numește *energia liberă totală* a lui B, corespunzătoare distribuției $\{v, t\}$.

Teorema 13.1 (Coleman, Noll). O stare globală de echilibru termic $\{v, \eta\}$ este **G** stabilă dacă și numai dacă sînt îndeplinite *simultan* următoarele două condiții:

(a) distribuția de temperatură $\{t\}$ căreia îi corespunde starea $\{v, \eta\}$ este uniformă (omogenă), adică

$$t = t(X) = \text{const.}; \tag{13.2}$$

(b) orice altă stare $\{\overset{*}{v},\ \overset{*}{\eta}\}$ cu același volum total, deci pentru care

$$\int_B \overset{*}{v}\,\mathrm{d}m = \int_B v\,\mathrm{d}m \tag{13.3}$$

și cu *aceeași* distribuție *uniformă* de temperatură $\{t\}$ are energie liberă totală strict mai mare, adică

$$\int_B \tilde{\psi}(v(X), t, X)\,\mathrm{d}m < \int_B \tilde{\psi}(\overset{*}{v}(X), t, X)\,\mathrm{d}m, \tag{13.4}$$

ori de cîte ori $\{\overset{*}{v}\}$ este diferit de $\{v\}$.

Demonstrație. Arătăm mai întîi *suficiența*. Fie $\{v, \eta\}$ o stare globală de echilibru termic cu distribuția uniformă de temperatură t și fie $\{\overset{*}{v}, \eta\}$ o altă stare globală cu aceeași distribuție uniformă de temperatură t și

cu același volum total, așa încît restricția (13.3) este îndeplinită, iar

$$\eta_1(X) = \tilde{\eta}(\overset{*}{v}(X), t), \tag{13.5}$$

$\tilde{\eta} : \tilde{D} \to R$ fiind funcția entropie specifică introdusă prin relația (6.1).

Din relația de definiție (6.3) a entropiei libere specifice rezultă că

$$\tilde{\psi}(\overset{*}{v}, t) - \tilde{\psi}(v, t) = \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \eta_1) - \hat{\varepsilon}(v, \eta) - (\eta_1 - \eta)t. \tag{13.6}$$

Fie $\{\overset{*}{\eta}\}$ o distribuție de entropie specifică ce satisface condiția

$$\int_B \overset{*}{\eta} \mathrm{d}m = \int_B \eta \, \mathrm{d}m. \tag{13.7}$$

Observăm că restricțiile (13.3) și (13.7) sînt tocmai cele care apar în definiția 12.2 a **G** stabilității.

Vom defini acum funcția $\beta : B \to R$ prin relația

$$\beta(X) = \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \eta_1) - t(\overset{*}{\eta} - \eta_1). \tag{13.8}$$

Deoarece, conform ecuației constitutive $(4.3)_2$

$$t = \hat{\varepsilon}_\eta(\overset{*}{v}, \eta_1), \tag{13.9}$$

din inegalitatea (4.4) (luînd $\eta = \eta_1$) deducem că

$$\beta(X) \geqslant 0, \quad \forall X \text{ din } B. \tag{13.10}$$

Din (13.6) și (13.8) prin calculul direct obținem

$$\tilde{\psi}(\overset{*}{v}, t) - \tilde{\psi}(v, t) = \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}(v, \eta) - t(\overset{*}{\eta} - \eta) - \beta. \tag{13.11}$$

Integrînd ultima relație pe B și ținînd seama atît de restricția (13.7), cît și de inegalitatea (13.10), deducem că

$$\int_B [\tilde{\psi}(\overset{*}{v}, t) - \tilde{\psi}(v, t)] \, \mathrm{d}m \leqslant \int_B [\hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}(v, \eta)] \, \mathrm{d}m. \tag{13.12}$$

Acum, pe baza ultimei inegalități și a condiției (b), conchidem că

$$\int_B \hat{\varepsilon}(v, \eta) \mathrm{d}m < \int_B \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) \, \mathrm{d}m \, ; \tag{13.13}$$

adică starea globală de echilibru $\{v, \eta\}$ este **G** stabilă.

Trecem acum la demonstrarea *necesității*. Din teorema 12.2 decurge necesitatea condiției (a) pentru **G**-stabilitatea stării globale de echilibru $\{v, \eta\}$. Pentru a arăta că (b) este necesar, presupunem că $\{v, \eta\}$ este o stare de echilibru **G** stabilă. Fie $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}\}$ o altă stare globală ce satisface restricția (13.3) și corespunde aceleași distribuții (uniforme) de temperatură $\{t\}$ ca și starea $\{v, \eta\}$. Integrînd pe B relația (6.9), ținînd seama de restricțiile (13.2), (13.3), de ecuația constitutivă $(6.6)_1$ și făcînd apel la teorema 12.2, obținem inegalitatea dorită (13.4).

14. ENTALPIA ȘI G STABILITATEA

În acest paragraf vom da o caracterizare a stărilor globale **G** stabile prin intermediul entalpiei. Rezultatul principal (teorema (14.1) este *complementar* celui prezentat în paragraful precedent.

Definiția 14.1. Fie $\{p, \eta\}$ o distribuție de presiune-entropie specifică în corpul B. Mărimea

$$G = \int_B \overline{\chi}(p(X), \eta(X), X)\, \mathrm{d}m \tag{14.1}$$

se numește *entalpia totală* a lui B, corespunzătoare distribuției $\{p, \eta\}$.

Teorema 14.1. O stare globală de echilibru termic $\{v, \eta\}$ este **G** stabilă dacă și numai dacă sînt *simultan* îndeplinite următoarele două condiții:

(a) distribuția de presiune $\{p\}$ căreia îi corespunde starea $\{v, \eta\}$ este uniformă (omogenă), adică

$$p = p(X) = \text{const}; \tag{14.2}$$

(b) orice altă stare $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}\}$ cu aceeași entropie totală, deci pentru care

$$\int_B \overset{*}{\eta}\, \mathrm{d}m = \int_B \eta\, \mathrm{d}m, \tag{14.3}$$

și cu *aceeași* distribuție *uniformă* de presiune $\{p\}$ are entalpia totală strict mai mare, adică

$$\int_B \overline{\chi}(p, \eta(X), X)\, \mathrm{d}m < \int_B \overline{\chi}(p, \overset{*}{\eta}(X), X)\, \mathrm{d}m, \tag{14.4}$$

ori de cîte ori $\{\overset{*}{\eta}\}$ este diferit de $\{\eta\}$.

Demonstrație. Suficiența criteriului. Fie $\{v, \eta\}$ o stare globală de echilibru termic cu distribuția uniformă de presiune p și fie $\{v_1, \overset{*}{\eta}\}$ o altă stare globală cu aceeași distribuție uniformă de presiune p și cu aceeași entropie totală, așa încît restricția (14.3) este îndeplinită, iar

$$v_1(X) = \overline{v}(p, \overset{*}{\eta}(X)), \tag{14.5}$$

$\overline{v} : \overline{D} \to R$ fiind funcția volum specific introdusă prin relația (7.1).

Din relația de definiție (7.3) a entalpiei specifice rezultă că

$$\overline{\chi}(p, \overset{*}{\eta}) - \overline{\chi}(p, \eta) = \hat{\varepsilon}(v_1, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}(v, \eta) + p(v_1 - v). \tag{14.6}$$

Fie $\{\overset{*}{v}\}$ o distribuție de volum specific ce satisface restricția

$$\int_B \overset{*}{v}\,\mathrm{d}m = \int_B v\,\mathrm{d}m. \tag{14.7}$$

Observăm și aici că restricțiile (14.3) și (14.7) sînt tocmai cele care apar în definiția 12.2 a **G** stabilității.

Vom defini acum funcția $\gamma : B \to R$ prin relația

$$\gamma(X) = \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}(v_1, \overset{*}{\eta}) + p(\overset{*}{v} - v_1). \tag{14.8}$$

Deoarece conform ecuației constitutive $(4.3)_1$

$$p = -\hat{\varepsilon}_v(v_1, \overset{*}{\eta}), \tag{14.9}$$

din inegalitatea (4.4) (luînd $v = v_1$) deducem că

$$\gamma(X) \geqslant 0, \quad X \forall \text{ din } B. \tag{14.10}$$

Din (14.10) și (14.8), efectuînd un calcul direct, obținem relația

$$\overline{\chi}(p, \overset{*}{\eta}) - \overline{\chi}(p, \eta) = \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}(v, \eta) + p(\overset{*}{v} - v) - \gamma. \tag{14.11}$$

Integrînd egalitatea precedentă pe B și luînd în considerație relația (14.2), restricția (14.7) și inegalitatea (14.10), obținem următorul rezultat:

$$\int_B [\overline{\chi}(p, \overset{*}{\eta}) - \overline{\chi}(p, \eta)]\,\mathrm{d}m \leqslant \int_B [\hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}) - \hat{\varepsilon}(v, \eta)]\mathrm{d}m. \tag{14.12}$$

Astfel, pe baza ultimei inegalități și a condiției (b), conchidem că

$$\int_B \hat{\varepsilon}(v, \eta)\,\mathrm{d}m < \int_B \hat{\varepsilon}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta})\,\mathrm{d}m; \tag{14.13}$$

prin urmare starea globală de echilibru $\{v, \eta\}$ este **G** stabilă.

Necesitatea criteriului. Din teorema 12.2 decurge necesitatea condiției (a) pentru **G** stabilitatea stării globale de echilibru $\{v, \eta\}$. În vederea demonstrării necesității restricției (b) admitem că $\{v, \eta\}$ este o stare globală de echilibru **G** stabilă. Fie $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}\}$ o altă stare globală care verifică restricția (14.3) și corespunde aceleiași distribuții uniforme de presiune $\{p\}$ ca și starea $\{v, \eta\}$. Integrînd inegalitatea (7.6) pe B, și ținînd seama de restric-

ţiile (14.2), (14.3) şi de ecuaţia constitutivă $(7.5)_2$, obţinem inegalitatea dorită (14.4).

15. FUNCŢIA LUI MASSIEU ŞI G STABILITATEA

Dacă se utilizează *reprezentarea entropică*, prin intermediul funcţiei lui Massieu se poate formula un criteriu de **G** stabilitate, analog cu cel exprimat cu ajutorul energiei libere. Mai precis, avem

Teorema 15.1. O stare globală de echilibru termic (în reprezentarea entropică) $\{v, \varepsilon\}$ este **G** stabilă dacă şi numai dacă sînt îndeplinite *simultan* următoarele două condiţii:

(*a*) distribuţia de răcire $\{\tau\}$ căreia îi corespunde starea $\{v, \varepsilon\}$ este uniformă, adică

$$\tau = \tau(X) = \text{const}; \tag{15.1}$$

(*b*) pentru orice altă stare $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}\}$ cu acelaşi volum total, deci pentru care

$$\int_B \overset{*}{v}\, \mathrm{d}m = \int_B v\, \mathrm{d}m \tag{15.2}$$

şi care corespunde aceleeaşi distribuţii uniforme de răcire $\{\tau\}$, are loc inegalitatea strictă

$$\int_B \overline{\overline{\varphi}}(\overset{*}{v}(X), \tau, X)\, \mathrm{d}m < \int_B \overline{\overline{\varphi}}(v(X), \tau, X)\, \mathrm{d}m. \tag{15.3}$$

Demonstraţie. Ne ocupăm la început de *suficienţa* criteriului. În acest scop presupunem că $\{v, \varepsilon\}$ este o stare de echilibru cu distribuţia uniformă de răcire $\{\tau\}$; fie de asemenea $\{\overset{*}{v}, \varepsilon_1\}$ o altă stare cu aceeaşi distribuţie uniformă de răcire $\{\tau\}$ şi cu acelaşi volum total, aşa încît condiţia (15.2) este îndeplinită, iar

$$\varepsilon_1(X) = \overline{\overline{\varepsilon}}(\overset{*}{v}(X), \tau), \tag{15.4}$$

$\overline{\overline{\varepsilon}} : \overline{D} \to R$ fiind funcţia introdusă prin relaţia (9.1).

Din relaţia de definiţie (9.3) a funcţiei lui Massieu rezultă

$$\overline{\overline{\varphi}}(\overset{*}{v}, \tau) - \overline{\overline{\varphi}}(v, \tau) = \overset{*}{\eta}(\overset{*}{v}, \varepsilon_1) - \eta(v, \varepsilon) - \tau(\varepsilon_1 - \varepsilon). \tag{15.5}$$

Fie $\{\overset{*}{\varepsilon}\}$ o distribuţie de energie internă specifică ce satisface restricţia

$$\int_B \overset{*}{\varepsilon}\, \mathrm{d}m = \int_B \varepsilon\, \mathrm{d}m, \tag{15.6}$$

condiție care, împreună cu (15.2), intră în definiția (12.4) a G stabilității.

Definim funcția $\alpha : B \to R$ prin relația

$$\alpha(X) = \check{\eta}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) - \check{\eta}(\overset{*}{v}, \varepsilon_1) - \tau(\overset{*}{\varepsilon} - \varepsilon_1). \tag{15.7}$$

Deoarece conform ecuației termice de stare $(5.9)_2$

$$\tau = \check{\eta}_\varepsilon(v, \varepsilon), \tag{15.8}$$

din inegalitatea (5.10) (luînd $\varepsilon = \varepsilon_1$) deducem că

$$\alpha(X) \leqslant 0, \qquad \forall X \text{ din } B. \tag{15.9}$$

Prin calcul direct din (15.5) și (15.7) rezultă că

$$\overline{\overline{\varphi}}(\overset{*}{v}, \tau) - \overline{\overline{\varphi}}(v, \tau) = \check{\eta}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) - \check{\eta}(v, \varepsilon) - \tau(\overset{*}{\varepsilon} - \varepsilon) - \alpha(X). \tag{15.10}$$

În urma integrării pe B a egalității precedente, cu luarea în considerație a relațiilor (15.1), (15.2) și (15.9), găsim

$$\int_B [\check{\eta}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}) - \check{\eta}(v, \varepsilon)]\, dm \leqslant \int_B [\overline{\overline{\varphi}}(\overset{*}{v}, \tau) - \overline{\overline{\varphi}}(v, \tau)]\, dm; \tag{15.11}$$

de aici, pe baza condiției (b), conchidem că

$$\int_B \check{\eta}(\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon})\, dm < \int_B \check{\eta}(v, \varepsilon)\, dm, \tag{15.12}$$

relație ce arată că starea globală de echilibru $\{v, \varepsilon\}$ este G stabilă.

Pentru a stabili *necesitatea* criteriului observăm la început că restricția (a) decurge nemijlocit din teorema 12.2. Pentru a arăta că și condiția (b) este necesară, presupunem că $\{v, \varepsilon\}$ este o stare de echilibru G stabilă și considerăm o stare $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}\}$ cu același volum total, deci pentru care este satisfăcută restricția (15.2) și care corespunde la aceeași distribuție uniformă de răcire $\{\tau\}$ ca și $\{v, \varepsilon\}$. Integrînd inegalitatea (9.6) pe B, ținînd seama de restricțiile (15.1), (15.2) și de ecuația constitutivă $(9.5)_1$, găsim inegalitatea dorită (15.3).

16. STABILITATEA GLOBALĂ ȘI FUNCȚIA LUI GIBBS

În paragraful 8 am semnalat natura *duală* a rolurilor jucate de funcția calorică de stare $\check{\varepsilon}$, deci de energia internă specifică pe de o parte și de funcția lui Gibbs $\check{\xi}$, deci de entalpia liberă specifică pe de altă parte, în caracterizarea stărilor *locale* de echilibru termic. În cele ce urmează

vom cerceta dacă dualitatea menționată funcționează și în cazul în care avem în vederea stabilitatea stărilor globale de echilibru termic. În vederea clarificării problemei vom stabili cîteva proprietăți ale entalpiei libere totale, vom introduce un concept nou de stabilitate globală a stărilor de echilibrn și vom cerceta legătura sa cu **G** stabilitatea de tip Gibbs-Coleman-Noll.

Definiția 16.1. Fie $\{p, t\}$ o distribuție de presiune-temperatură și fie $\{\xi\}$ distribuția de entalpia liberă corespunzătoare acestei perechi. Mărimile

$$\langle p\rangle = \frac{1}{M}\int_B p(X)\,\mathrm{d}m, \quad \langle t\rangle = \frac{1}{M}\int_B t(X)\,\mathrm{d}m, \quad Z = \int_B \xi(p(X), t(X), X)\,\mathrm{d}m, \tag{16.1}$$

reprezintă *presiunea medie*, *temperatura absolută medie*, respectiv *entalpia liberă totală* corespunzătoare distribuției de presiunea temperatură $\{p, t\}$.

Teorema 16.1. Fie $\{v, \eta\}$ o stare globală de echilibru termic *uniformă*, deci

$$v = v(X) = \text{const}, \quad \eta = \eta(X) = \text{const}, \quad \forall X \text{ din } B, \tag{16.2}$$

corespunzătoare distribuției de presiune-temperatură $\{p, t\}$ și fie $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\eta}\}$ o altă stare globală de echilibru termic corespunzătoare distribuției de presiune-temperatură $\{\overset{*}{p}, \overset{*}{t}\}$ avînd aceleași presiune și temperatură medii ca și distribuția $\{p, t\}$; adică

$$\int_B \overset{*}{p}\,\mathrm{d}m = \int_B p\,\mathrm{d}m \quad \text{și} \quad \int_B \overset{*}{t}\,\mathrm{d}m = \int_B t\,\mathrm{d}m. \tag{16.3}$$

În aceste condiții, stării uniforme $\{v, \eta\}$ îi corespunde entalpia liberă *maximă*; mai precis

$$\int_B \xi(\overset{*}{p}, \overset{*}{t})\,\mathrm{d}m < \int_B \xi(p, t)\,\mathrm{d}m, \tag{16.4}$$

cu excepția cazului în care $\overset{*}{p}(X) = p(X)$, $\overset{*}{t}(X) = t(X)$, $\forall X$ din B.

Demonstrație. Proprietatea de maxim condiționat (16.3), (16.4) rezultă prin integrarea pe B a relației de concavitate strictă (8.8) cu luarea în considerație a condițiilor de uniformitate (16.2), a ecuațiilor constitutive (8.5) și a restricțiilor (16.3).

Teorema 16.2. Fie $\{v, \eta\}$ o stare globală de echilibru termic corespunzătoare distribuției de presiune-temperatură $\{p, t\}$. Dacă pentru orice distribuție de presiune-temperatură $\{\overset{*}{p}, \overset{*}{t}\}$ *diferită* de $\{p, t\}$ dar avînd *aceleași* presiune și temperatură medii ca și $\{p, t\}$, corespunde o entalpie liberă totală *strict mai mică* decît cea corespunzătoare perechii $\{p, t\}$, deci dacă

$$\int_B \xi(\overset{*}{p}, \overset{*}{t})\,\mathrm{d}m < \int_B \xi(p, t)\,\mathrm{d}m, \quad \forall(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) \neq (p, t) \text{ din } D, \tag{16.5}$$

atunci starea globală de echilibru $\{v, \eta\}$ este *uniformă*, adică

$$v(X) = \text{const}, \quad \eta(X) = \text{const}, \quad \forall X \text{ din } B. \tag{16.6}$$

Demonstrație. Observăm că *funcțiile* p și t sînt soluțiile problemei variaționale

$$\int_B \acute{\xi}(\overset{*}{p}, \overset{*}{t})\, \mathrm{d}m = \text{maxim}, \tag{16.7}$$

cu constrîngerile

$$\int_B \overset{*}{p}\, \mathrm{d}m = \int_B p\, \mathrm{d}m, \quad \int_B \overset{*}{t}\, \mathrm{d}m = \int_B t\, \mathrm{d}m. \tag{16.8}$$

Prin urmare, prima variație a funcționalei

$$\int_B [\acute{\xi}(\overset{*}{p}, \overset{*}{t}) - \lambda \overset{*}{p} - \mu \overset{*}{t}]\, \mathrm{d}m \tag{16.9}$$

trebuie să fie nulă pentru $\overset{*}{p} = p$, $\overset{*}{t} = t$, λ și μ fiind parametrii lagrangeeni constanți. În concluzie, p și t trebuie să satisfacă relațiile

$$\acute{\xi}_p(p(X), t(X), X) = \lambda = \text{const}, \quad \acute{\xi}_t(p(X), t(X), X) = \mu = \text{const}. \tag{16.10}$$

Deoarece $\{v, \eta\}$ este o stare globală de echilibru termic corespunzătoare distribuției de presiune temperatură $\{p, t\}$, din ecuațiile constitutive (8.5) și din (16.10) urmează că perechea $\{v, \eta\}$ satisface restricțiile (16.6) și deci este o stare uniformă.

Observația 16.1. Accentuăm *similitudinea* proprietăților funcției lui Gibbs $\acute{\xi}$, cu cele ale funcției calorice de stare $\hat{\varepsilon}$, relevate în teoremele 16.1, 16.2, respectiv în definiția 12.2 și în teorema 12.2. Această analogie stă la baza conceptului de **Ǵ** stabilitate pe care îl vom introduce în continuare. Analiza ulterioară va pune în lumină *limitele* pînă la care dualitatea semnalată funcționează.

Definiția 16.2. Starea globală de echilibru termic $\{v, \eta\}$ corespunzătoare distribuției de presiune-temperatură $\{p, t\}$ se numește **Ǵ** *stabilă* dacă sînt îndeplinite condițiile teoremei 16.2.

Pe baza definiției precedente, din teoremele 16.1 și 16.2 decurge nemijlocit

Teorema 16.3. Starea globală de echilibru termic $\{v, \eta\}$ este **Ǵ** stabilă dacă și numai dacă este *uniformă*.

17. STABILITATEA GLOBALĂ ŞI FUNCŢIA LUI PLANCK

Am remarcat în paragraful 10 rolul dual jucat de funcţia calorică de stare $\check{\eta}$, respectiv de funcţia lui Planck $\grave{\nu}$, ori de cîte ori caracterizarea stărilor locale de echilibru termic se face în cadrul reprezentării entropice. Avînd în vedere echivalenţa caracterizării **G** stabilităţii prin intermediul funcţiei energie internă specifică $\hat{\varepsilon}$, respectiv prin utilizarea funcţiei entropie specifică $\check{\eta}$, este de aşteptat ca şi $\check{\mathbf{G}}$ stabilitatea introdusă pe baza funcţiei lui Gibbs $\check{\xi}$ să admită o caracterizare echivalentă realizată cu ajutorul funcţiei lui Planck $\grave{\nu}$. În cele ce urmează vom analiza dacă o astfel de echivalenţă are loc.

Definiţia 17.1. Fie $\{\pi, \tau\}$ o distribuţie de presiune redusă-grad de răcire şi fie $\{\nu\}$ distribuţia funcţiei lui Planck $\grave{\nu} : \grave{D} \to R$ corespunzătoare acestei perechi. Mărimile

$$\langle\pi\rangle = \frac{1}{M}\int_B \pi(X)\,\mathrm{d}m, \qquad \langle\tau\rangle = \frac{1}{M}\int_B \tau(X)\,\mathrm{d}m \tag{17.1}$$

reprezintă *presiunea redusă medie*, respectiv *răcirea medie* corespunzătoare distribuţiei $\{\pi, \tau\}$.

Teorema 17.1. Fie $\{v, \varepsilon\}$ o stare globală de echilibru termic (în reprezentarea entropică) *uniformă*, deci

$$v = v(X) = \text{const.}, \quad \varepsilon = \varepsilon(X) = \text{const.}, \quad \forall X \text{ din } B, \tag{17.2}$$

corespunzătoate distribuţiei de presiune redusă-grad de răcite $\{\pi, \tau\}$ şi fie $\{\overset{*}{v}, \overset{*}{\varepsilon}\}$ o altă stare globală de echilibru termic corespunzătoare distribuţiei de presiune redusă grad de răcire $\{\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau}\}$ avînd aceeaşi presiune redusă şi grad de răcire medii ca şi distribuţie $\{\pi, \tau\}$; adică

$$\int_B \overset{*}{\pi}\mathrm{d}m = \int_B \pi\,\mathrm{d}m \text{ şi } \int_B \overset{*}{\tau}\,\mathrm{d}m = \int_B \tau\,\mathrm{d}m. \tag{17.3}$$

În aceste condiţii, stării uniforme $\{v, \varepsilon\}$ îi corespunde valoarea totală *minimă* a funcţiei lui Planck; mai precis

$$\int_B \grave{\nu}(\pi, \tau)\,\mathrm{d}m < \int_B \grave{\nu}(\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau})\,\mathrm{d}m, \tag{17.4}$$

cu excepţia cazului în care $\overset{*}{\pi}(X) = \pi(X)$, $\overset{*}{\tau}(X) = \tau(X)$, $\forall X$ din B.

Demonstraţie. Proprietatea de minim condiţionat (17.3), (17.4) rezultă în urma integrării pe B a inegalităţii (10.7) şi luarea în consideraţie a condiţiilor de uniformitate (17.2), a ecuaţiilor constitutive (10.6) şi a restricţiilor (17.3).

Teorema 17.2. Fie $\{v, \varepsilon\}$ o stare globală de echilibru termic corespunzătoare distribuţiei de presiune redusă-grad de răcire $\{\pi, \tau\}$. Dacă pentru orice distribuţie de presiune-grad de răcire $\{\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau}\}$, diferită de $\{\pi, \tau\}$, dar

avînd aceleași presiune redusă și grad de răcire medii ca și $\{\pi, \tau\}$, îi corespunde o valoare totală *strict mai mare* a funcției lui Planck decît cea corespunzătoare perechii $\{\pi, \tau\}$, deci dacă

$$\int_B \grave{\nu}(\pi, \tau)\, dm < \int_B \grave{\nu}(\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau})\, dm, \quad \forall \{\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau}\} \neq \{\pi, \tau\} \text{ din } \grave{D}, \tag{17.5}$$

atunci starea globală de echilibru $\{v, \varepsilon\}$ este *uniformă*, adică

$$v(X) = \text{const.}, \quad \varepsilon(X) = \text{const.}, \quad \forall X \text{ din } B. \tag{17.6}$$

Demonstrație. Funcțiile π și τ trebuie să fie soluțiile problemei variaționale

$$\int_B \grave{\nu}(\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau})\, dm = \text{minim}, \tag{17.7}$$

cu restricțiile

$$\int_B \overset{*}{\pi}\, dm = \int_B \pi\, dm \quad \text{și} \quad \int_B \overset{*}{\tau}\, dm = \int_B \tau\, dm. \tag{17.8}$$

În consecință, prima variație a funcționalei

$$\int_B [\grave{\nu}(\overset{*}{\pi}, \overset{*}{\tau}) - \lambda \overset{*}{\pi} - \mu \overset{*}{\tau}]\, dm \tag{17.9}$$

trebuie să fie nulă pentru $\overset{*}{\pi} = \pi$, $\overset{*}{\tau} = \tau$, λ și μ fiind parametrii lagrangeeni constanți. Prin urmare, π și τ trebuie să satisfacă relațiile

$$\grave{\nu}_\pi(\pi(X), \tau(X), X) = \lambda = \text{const.}, \quad \grave{\nu}_\tau(\pi(X), \tau(X), \tau(X), X) = \mu = \text{const.} \tag{17.10}$$

Deoarece $\{v, \varepsilon\}$ este o stare globală de echilibru termic corespunzătoare distribuției $\{\pi, \tau\}$, din ecuațiile constitutive (10.6) urmează că perechea $\{v, \varepsilon\}$ satisface relațiile (17.2), deci este uniformă.

Definiția 17.3. Starea globală de echilibru termic $\{v, \varepsilon\}$ corespunzătoare distribuției de presiune redusă-grad de răcire $\{\pi, \tau\}$ se numește $\grave{\mathbf{G}}$ *stabilă* dacă sînt îndeplinite condițiile teoremei 17.2.

Din cele două teoreme ale acestui paragraf rezultă

Teorema 17.3. Starea globală de echilibru termic $\{v, \varepsilon\}$ este $\grave{\mathbf{G}}$ stabilă dacă și numai dacă este *uniformă*.

18. LEGĂTURA ÎNTRE STABILITĂȚILE GLOBALE DE TIP G, Ǵ ȘI $\grave{\mathbf{G}}$

În acest paragraf vom cerceta legătura ce există între cele trei tipuri de stabilitate globală introduse anterior. În acest scop presupunem că B este un fluid termoelastic *neomogen* de tipul gazului ideal, care prin

utilizarea diagramei $p-t$, este caracterizat de următoarele *legi de material* :

$$v = \hat{v}(p, t, X) = (rt)/p, \quad \varepsilon = \hat{\varepsilon}(p, t, X) = c(X)t, \quad \mathcal{D} = (0, \infty) \times (0, \infty) \tag{18.1}$$

unde *funcția* $c : B \to (0, \infty)$ reprezintă *căldura specifică* a fluidului, iar r este o *constantă de material* strict pozitivă. Din (18.1) deducem următoarele expresii pentru entropia specifică și pentru funcția lui Gibbs :

$$\eta = \hat{\eta}(p, t, X) = \eta_0 + [c(X) + r] \ln(t/t_0) - r \ln(p/p_0), \tag{18.2}$$

$$\xi = \hat{\xi}(p, t, X) = \xi_0 + [c(X) + r]t - t[\eta_0 + (c(X) + r) \ln(t/t_0)] + r\,t \ln(p/p_0). \tag{18.3}$$

Aici p_0, t_0, η_0 și ξ_0 sînt constante, p_0 și t_0 fiind strict pozitive.

Se constată imediat că sînt satisfăcute relațiile constitutive

$$v = \hat{v}(p, t, X) = \hat{\xi}_p(p, t, X), \quad \eta = \hat{\eta}(p, t, X) = -\hat{\xi}_t(p, t, X). \tag{18.4}$$

În consecință, conform teoremei 8.1, starea globală $\{v, \eta\}$ este o stare-globală de echilibru termic *corespunzătoare* distribuției de presiune-temperatură $\{p, t\}$.

Presupunem acum că distribuțiile de presiune și de temperatură din corp sînt legate între ele prin relația

$$p = (p_0 t)/t_0. \tag{18.5}$$

În acest caz, din (18.1) deducem

$$v(X) = (rt_0)/p_0 = \text{const}; \tag{18.6}$$

prin urmare distribuția de volum specific $\{v\}$ este *uniformă* în fluidul termoelastic considerat B.

Admitem în continuare că distribuția de temperatură $\{t\}$ din corp este dată de relația

$$t(X) = t_0 \exp(c_0/c(X)), \tag{18.7}$$

c f iind o *constantă* strict pozitivă. În acest caz, din (18.2) urmează că

$$\eta(X) = \eta_0 + c_0 = \text{const}; \tag{18.8}$$

în consecință și distribuția de entropie specifică $\{\eta\}$ este *uniformă* în corpul B.

Totodată, din (18.5) și (18.7) urmează că distribuția de presiune $\{p\}$ în fluidul considerat este dată de relația

$$p(X) = p_0 \exp(c_0/c(X)). \tag{18.9}$$

Pe baza teoremei 16.3, din relaţiile (18.6) şi (18.8) urmează că starea globală de echilibru termic $\{v, \eta\}$ *este* $\acute{\mathbf{G}}$ valabilă.

În acelaşi timp, din *neuniformitatea* distribuţiilor de presiune şi de temperatură, reflectată de relaţiile (18.9) şi (18.7), pe baza teoremei 12.2 conchidem că starea globală de echilibru termic $\{v, \eta\}$ corespunzătoare distribuţiei de presiune-temperatură $\{p, t\}$ *nu* este **G** stabilă.

Pe baza exemplului de mai sus şi avînd în vedere posibilitatea construirii şi a altor exemple similare, putem sintetiza rezultatele analizei comparative prin următoarele două teoreme care stabilesc şi *limitele* pînă la care funcţionează dualitatea în rolurile jucate de funcţia calorică de stare $\hat{\varepsilon}$, de funcţia lui Gibbs $\acute{\xi}$, respectiv de funcţia lui Planck $\grave{\nu}$ în caracterizarea proprietăţilor esenţiale ale stărilor de echilibru termic :

Teorema 18.1. În cazul fluidelor termoelastice *neomogene*, stabilităţile globale de tip **G**, $\acute{\mathbf{G}}$ şi $\grave{\mathbf{G}}$ (în general) *nu* sînt *echivalente* între ele.

Teorema 18.2. Pentru ca stabilităţile globale de tip **G**, $\acute{\mathbf{G}}$ şi $\grave{\mathbf{G}}$ să fie echivalente între ele este *necesar* ca fluidul termoelastic să fie *omogen*.

Observaţia 18.1. În cadrul teoriei prezentate în această lucrare *nu* am reuşit să stabilim dacă omogeneitatea fluidului termoelastic implică echivalenţa celor trei tipuri de stabilitate globală a stărilor de echilibru termic. Este foarte probabil însă ca proprietatea (δ) din teorema 3.1, combinată cu o ipoteză de regularitate (de tip **I**) potrivit aleasă, să furnizeze un răspuns afirmativ, avînd în vedere criteriile necesare şi suficiente de stabilitate globală formulate în teoremele 12.2, 16.3 şi 17.3.

Primită la redacţie la 5 martie 1985

PROIECTAREA AERODINAMICĂ A ELICEI DE RANDAMENT MAXIM

de HORIA DUMITRESCU, ADELINA GEORGESCU şi ALEXANDRU DUMITRACHE

Institutul de Aviaţie, Bucureşti

În lucrare se prezintă o metodă hibridă, bazată pe modelul elementului de pală şi pe modelul cu vîrtejuri al elicei cu număr infinit de pale, pentru calculul sarcinilor aerodinamice şi al caracteristicilor elicei. Efectele rezistenţei profilului şi al numărului finit de pale se introduc ca factori de corecţie faţă de cazul elicei ideale. Din formularea izoperimetrică a problemei distribuţiei optime a circulaţiei se deduc expresii analitice, pentru vitezele induse de vîrtejuri.

1. MODELUL CU VÎRTEJURI AL ELICEI

O elice, indiferent de utilizarea ei, ca sistem de propulsie, de frînare sau de forţă, este formată dintr-un număr de pale identice dispuse radial şi echiunghiular, care alcătuiesc rotorul şi cărora li se imprimă o mişcare de rotaţie. Secţiunea transversală prin fiecare pală la orice rază r are forma unui profil aerodinamic, pe care în mişcarea sa prin fluid se exercită forţele aerodinamice de portanţă şi rezistenţă la înaintare. Se consideră că pala elicei este alcătuită dintr-o infinitate de astfel de profile dispuse radial într-un anumit mod, astfel că profilele execută o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\vec{\Omega}$ şi una de translaţie cu viteza $\vec{V}_\infty$ dirijată aproximativ după axa elicei. Viteza mişcării rezultante, compusă din aceste două mişcări, este viteza $\vec{W}_0$ a profilului faţă de aer considerat în repaus la infinit de amonte, $\vec{W}_\infty = -\vec{W}_0$ fiind viteza aerodinamică, adică viteza relativă a aerului în raport cu pala. În cazul elicei de tracţiune, curentul incident este generat de deplasarea navei (avion, vapor), deci aerul are o mişcare relativă faţă de navă, astfel că forţa de tracţiune $\vec{T}$ şi momentul rezistent $\vec{M}$ sînt produse de reacţiunea fluidului asupra palelor.

Modelarea matematică a mişcării fluidelor cu ajutorul ecuaţiilor lui Euler, care presupune că viteza şi presiunea formează cîmpuri continue şi cu derivate continue, nu conduce la obţinerea rezistenţei forţelor aerodinamice pe care fluidul o exercită în realitate asupra corpului. În schimb, modelul lui Navier-Stokes, care descrie mişcarea fluidelor reale (vîscoase) şi furnizează rezultate în concordanţă cu experienţa, comportă mari dificultăţi de calcul. De aceea, în general, se recurge la modele în care mişcarea fluidelor este guvernată de modelul lui Euler, cu excepţia unor puncte sau/şi suprafeţe din domeniul de mişcare, unde cîmpul vitezelor şi/sau al presiunilor are discontinuităţi. Un astfel de model este modelul cu vîrtejuri (cunoscut sub denumirea de teoria turbionară) al elicei, care este o extindere a modelului aripei portante, potrivit căruia pala elicei se înlocuieşte cu o suprafaţă de vîrtejuri numite legate, care se continuă în aval dincolo de bordul de fugă cu o altă suprafaţă de vîrtejuri numite libere. Distribuţia vîrtejurilor pe aceste suprafeţe este astfel încît să fie satisfăcută legea de conservare a circulaţiei a lui Helmholtz. În exteriorul acestor

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 2, 1986, P. 129–141

suprafeţe cîmpul vitezelor este potenţial; fiecare vîrtej punctual induce un cîmp de viteze care se suprapune peste curentul uniform de la infinit amonte W_∞, aceste viteze induse fiind deci o perturbaţie a vitezei $\overrightarrow{W_\infty}$. Metoda pe care o prezentăm în cele ce urmează are ca scop determinarea acestor viteze induse (de perturbaţie).

Dificultatea calculării vitezelor induse de sistemele de vîrtejuri care modelează elicea [1] a condus la folosirea ipotezei simplificatoare că elicea are un număr infinit de pale extrem de subţiri, repartizate uniform pe discul elicei. Prin aceasta în dîră vorticitatea este distribuită în toată masa de fluid şi nu este concentrată pe anumite suprafeţe de vîrtej. În cazul general al palelor cu circulaţie variabilă, întregul cîmp al curgerii din dîră trebuie considerat ca format din sisteme simple de vîrtej, inel de vîrtej şi fir de vîrtej, fiecare punct din dîră conţinînd un asemenea ansamblu de vîrtejuri (fig. 1). Simetria mişcării va implica faptul că la infinit aval componentele axială şi tangenţială ale vitezei induse, $\vec{w}(u, r_0\omega)$, în dîră de sistemul de vîrtejuri libere vor fi funcţie numai de coordonata radială r_0 a punctului care se află pe linia de curent, care în dreptul elicei are coordonata r. Contribuţia vîrtejurilor legate (linii radiale de vîrtej) la viteza indusă departe în dîră este neglijabilă. De asemenea, datorită simetriei suma vitezelor induse de vîrtejurile legate pe discul elicei este nulă, astfel că, componentele vitezei induse, $\vec{w}_1(u_1, r\omega_1)$, sînt produse numai de sistemul de vîrtejuri libere din dîră. Dacă elicea este puţin încărcată şi deci contracţia dîrei este neglijabilă ($r \approx r_0$), componenta axială a vitezei induse, ca şi viteza

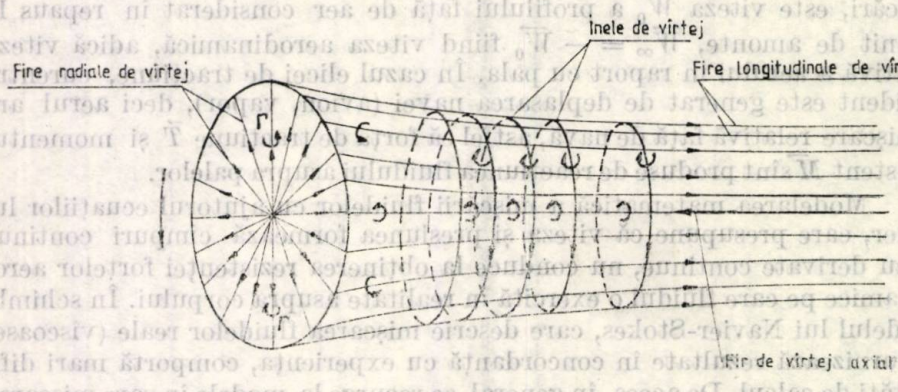


Fig. 1

unghiulară indusă pe discul elicei sînt jumătate din vitezele corespunzătoare de la infinit aval, sistemul de vîrtejuri libere formînd un şir semiinfinit pentru discul elicei şi infinit pentru punctele din dîră de la infinit aval, $u_1 = u/2$, $\omega_1 = \omega/2$ [2].

Prin urmare, în ipoteza numărului infinit de pale teoria turbionară conduce la aceleaşi rezultate ca şi teoria elementului de pală.

Acum, introducînd vitezele adimensionale induse axială şi unghiulară a şi respectiv a', avînd ca viteze de referinţă V_∞ şi Ω, componentele vitezei efective W care acţionează asupra unui element de pală la distanţa

r de axa de rotaţie se scriu (fig. 2)

$$W \sin \beta = V_\infty(1 + a); \quad W \cos\beta = \Omega r(1 - a'),$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_\infty(1 + a)}{\Omega r(1 - a')} = \frac{R}{r} \lambda_1 \frac{1 + a}{1 - a'}, \tag{1}$$

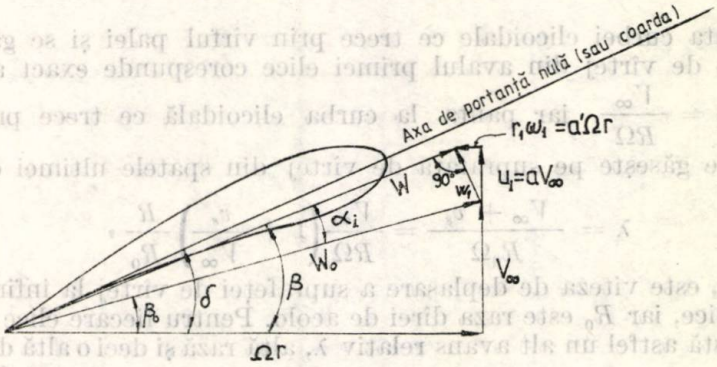


Fig. 2

în care $a = \frac{u_1}{V_\infty}$, $a' = \frac{\omega_1}{\Omega}$, $\lambda_1 = \frac{V_\infty}{\Omega R}$, şi β este unghiul pe care îl face vectorul vitezei $\vec{W}$ cu planul de rotaţie. Condiţia de perpendicularitate dintre viteza indusă w_1 şi viteza $\vec{W}$ revine la

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r\omega_1}{u_1} = \frac{r\Omega}{V_\infty} \frac{a'}{a} = \frac{r}{R} \frac{1}{\lambda_1} \frac{a'}{a}. \tag{2}$$

2. DISTRIBUŢIA OPTIMĂ A CIRCULAŢIEI ÎN LUNGUL PALEI ELICEI

Ca şi în cazul aripei portante, vitezele induse, care apar în realitate, modifică direcţia curgerii, producînd o rezistenţă indusă şi, corespunzător, o pierdere de energie. Această pierdere de energie poate fi calculată fie din circulaţia în jurul elementului de pală, ţinînd seama de vitezele induse corespunzătoare, fie din energia pierdută în dîra elicei. Condiţiile de randament maxim care conduc deci la pierderi minime de energie au fost deduse de A. Betz din consideraţii euristice asupra curgerii în dîră la infinit aval. Aceste condiţii se exprimă pe scurt sub forma : distribuţia optimă a circulaţiei în toate cazurile de încărcare se obţine dacă şi numai dacă pînzele de vîrtejuri libere din dîră, la infinit aval, se deplasează cu viteza constantă ca o suprafaţă rigidă elicoidală cu pas constant. Deoarece aceste suprafeţe rigide, la infinit aval, au acelaşi aspect indiferent de încărcare este evident că nu există nici o diferenţă între diferitele cazuri de încărcare. Astfel, problema distribuţiei optime a circulaţiei se poate rezolva pentru orice încărcare, simplu prin considerarea curgerii în dîră la infinit aval. Cu alte cuvinte, elicea este reprezentată numai prin

dîra ei fără să fie necesară cunoașterea datelor geometrice cu excepția fazei finale de proiectare. Cu datele geometrice și cinematice ale dîrei se calculează apoi coeficienții de moment și tracțiune, randamentul și contracția. Theodorsen [3] a analizat condițiile în care se obține o distribuție optimă a circulației în lungul palei pentru o încărcare mare a elicei, descompunînd circulația într-o serie infinită echivalentă de distribuții corespunzătoare unor elice identice în tandem, ușor încărcate și infinit depărtate.

Panta curbei elicoidale ce trece prin vîrful palei și se găsește pe suprafața de vîrtej din avalul primei elice corespunde exact avansului relativ $\lambda_1 = \dfrac{V_\infty}{R\Omega}$, iar panta la curba elicoidală ce trece prin vîrful palei și se găsește pe suprafața de vîrtej din spatele ultimei elice este

$$\lambda = \frac{V_\infty + v_s}{R_0\Omega} = \frac{V_\infty}{R\Omega}\left(1 + \frac{v_s}{V_\infty}\right)\frac{R}{R_0}, \tag{3}$$

în care v_s este viteza de deplasare a suprafeței de vîrtej la infinit avalul ultimei elice, iar R_0 este raza dîrei de acolo. Pentru fiecare elice intermediară există astfel un alt avans relativ λ, altă rază și deci o altă distribuție optimă, adică o altă funcție a circulației definită ca $K(r_a) = \dfrac{B\Gamma\Omega}{2\pi(V_\infty + v_s)\, v_s}$, B fiind numărul de pale și $r_a = r/R$.

În cazul încărcărilor mici, $\lambda_1 \approx \lambda$, se poate presupune că funcția $K(r_a)$ este similară pentru toate elementele diferențiale și atunci, atît randamentul total, cît și randamentul fiecărui element este o funcție numai de v_s, deci constant în lungul razei. Altfel, dacă se presupune că funcția $K(r_a)$ se modifică cu λ și anume deplasîndu-se punctele de maxim spre raze mai mari cînd λ crește, atunci condiția de optim se modifică, distribuția optimă obținîndu-se cînd randamentul elementului diferențial final al încărcării (adică al ultimei elice) are o valoare constantă în lungul razei și nu cînd randamentul total este constant. Rezultă că, deși randamentul ultimei elice este constant în lungul razei, randamentul total la inifinit aval nu mai păstrează aceeași valoare, fiind mai mare spre butuc. Totuși, pentru domeniile de încărcare utilizate în practica elicelor, variația lui $K(r_a)$ cu λ este neglijabil de mică, astfel că pentru proiectare se va utiliza condiția de randament total constant.

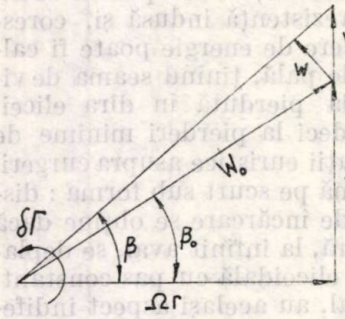


Fig. 3

Randamentul elementului diferențial final de la infinit aval se obține simplu (fig. 3), exprimînd creșterea tracțiunii și momentului în funcție de creșterea circulației,

$$\delta T = \rho\delta\Gamma(r_0\Omega - v_s\cos\beta\sin\beta),$$

$$\delta M = \rho\delta\Gamma(V_\infty + v_s\cos^2\beta)\, r_0,$$

astfel că pentru randament se găsește

$$\eta_0 = \frac{V_\infty(r_0\Omega - v_s\cos\beta\sin\beta)}{\Omega r_0(V_\infty + v_s\cos^2\beta)} = \frac{V_\infty}{V_\infty + v_s} = \frac{1}{1 + v_s/V_\infty}. \tag{4}$$

Randamentul acestui element este deci egal cu raportul dintre pasul de deplasare al elicei și pasul suprafeței elicoidale de vîrtej de la infinit aval.

Cum circulația $\Gamma(r_a)$ este diferența de potențial între două puncte de pe normală la suprafața elicoidală de vîrtejuri la raza r_a așezată respectiv pe fața superioară și inferioară a pînzei, mărimea adimensională

$$K(r_a) = \frac{B\Gamma\Omega}{2\pi(V_\infty + v_s)\, v_s} \tag{5}$$

se poate calcula îndată ce potențialul vitezelor φ al mișcării din jurul suprafețelor de vîrtej este determinat. Viteza de deplasare a suprafețelor de vîrtej la infinit aval v_s în metoda lui Theodorsen [3], este parametrul independent principal, de care depind celelalte mărimi.

În cele ce urmează pentru determinarea unor factori de corecție τ și $\varkappa$ care țin seama, respectiv de încărcarea elicei și de numărul de pale, vom utiliza rezultatele de mai sus ale lui Theodorsen pentru elicea cu un număr infinit de pale.

Drept factor de încărcare τ se va utiliza expresia dată în lucrarea [3] pentru randamentul elicei ideale cu număr infiuit de pale

$$\tau = \frac{1 + v_s/V_\infty \left(\frac{1}{2} + h\right)}{(1 + v_s/V_\infty)(1 + hv_s/V_\infty)}, \tag{6}$$

în care $h = \dfrac{1 + \dfrac{\lambda^2}{1+\lambda^2} - 2\lambda^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{\lambda^2}\right)}{1 - \lambda^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{\lambda^2}\right)}$.

Circulația și coeficientul de contracție al dîrei pentru elicea cu un număr infinit de pale sînt date de formulele [3]

$$K(r_a) = \frac{r_a^2}{r_a^2 + \lambda^2}, \tag{7}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{2}\frac{v_s}{V_\infty}\left(h - \frac{1}{2}S\right), \tag{8}$$

în care $S = 1 - \dfrac{\lambda^2\left(\ln\dfrac{1+\lambda^2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{1+\lambda^2}\right)}{1 - \lambda^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{\lambda^2}\right)}$,

$$\frac{v_s}{V_\infty} \cong \frac{C_p}{2[1 - \lambda^2 \ln(1 + 1/\lambda^2)]}, \quad C_p = \frac{P}{\rho/2\, V_\infty^3 \dfrac{\pi D^2}{4}}, \tag{9}$$

Valorile factorului $\varkappa$, care ține seama de numărul finit de pale, definit ca raportul dintre circulația pentru elicea cu B pale și elicea cu un număr

nfinit de pale $\varkappa = \frac{K_B}{K_\infty}$, pentru o elice bipală și una quadripală sînt
a te în tabelele de mai jos

Tabela Nr. 1

$B = 2$ pale

r_a \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1	1,034	1,455	1,840	2,159	2,392	2,590	2,750	2,795	2,870	2,727
0,2	0,966	1,026	1,098	1,185	1,258	1,330	1,391	1,445	1,445	1,430
0,3	0,973	0,931	0,912	0,896	0,923	0,975	1,018	1,038	1,020	0,957
0,4	0,985	0,915	0,840	0,786	0,766	0,780	0,796	0,800	0,773	0,710
0,5	0,985	0,892	0,792	0,710	0,665	0,652	0,651	0,644	0,623	0,575
0,6	0,981	0,868	0,741	0,641	0,582	0,558	0,547	0,533	0,510	0,468
0,7	0,961	0,811	0,673	0,570	0,509	0,477	0,456	0,438	0,416	0,377
0,8	0,904	0,715	0,574	0,474	0,417	0,387	0,369	0,350	0,328	0,302
0,9	0,748	0,549	0,427	0,355	0,307	0,278	0,261	0,243	0,226	0,212
0,95	0,571	0,399	0,312	0,255	0,215	0,192	0,175	0,163	0,152	0,141

Tabela Nr. 2

$B = 4$ pale

r_a \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,1		1,212	1,325	1,479	1,625	1,757	1,900	2,080	2,260	
0,2		1,000	1,085	1,167	1,250	1,320	1,353	1,300	1,147	
0,3		0,980	1,002	1,027	1,067	1,112	1,118	1,058	0,900	
0,4		0,981	0,975	0,962	0,966	0,981	0,969	0,910	0,773	
0,5		0,982	0,953	0,921	0,894	0,885	0,867	0,811	0,695	
0,6		0,978	0,931	0,878	0,834	0,806	0,774	0,719	0,627	
0,7		0,959	0,889	0,819	0,759	0,719	0,681	0,628	0,550	
0,8		0,901	0,802	0,720	0,650	0,607	0,566	0,515	0,446	
0,9		0,746	0,633	0,537	0,477	0,437	0,404	0,367	0,325	
0,95		0,578	0,467	0,379	0,322	0,292	0,273	0,259	0,246	

Distribuțiile optime ale circulației pentru elicele cu 2 și respectiv 4 pale au fost calculate pe baza potențialului vitezelor. Acest potențial poate fi determinat prin metode analogice sau numerice [3].

3. DETERMINAREA DISTRIBUȚIEI OPTIME A CIRCULAȚIEI CA SOLUȚIE A UNEI PROBLEME IZOPERIMETRICE

În mod direct, distribuția optimă a circulației $\Gamma(r)$ se poate deduce ca o soluție extremală a problemei izoperimetrice $\min_{\Gamma(r)} E_i(\Gamma)$, $T(\Gamma) = \text{const.}$ (i.e. circulația optimă este cea pentru care pierderea de energie datorată rezistenței induse E_i, este minimă și deci randamentul indus $\eta_i = \frac{V_\infty T}{\Omega M} = \frac{V_\infty T}{V_\infty T + E_i} = \frac{1}{1 + E_i/(V_\infty T)}$ este maxim, pentru un lucru mecanic $V_\infty T$ constant dat).

În primul rînd vom considera pentru E_i și T expresii aproximative, și, corespunzător, distribuția optimă a circulației va fi și ea aproximativă. În funcție de circulația Γ de la infinit aval tracțiunea și momentul unui element de pală de la raza r se scriu ca

$$\mathrm{d}T = B\Gamma\rho\Omega(1 - a')\, r\mathrm{d}r,$$

$$\mathrm{d}M = B\Gamma\rho V_\infty(1 + a)\, r\mathrm{d}r,$$

unde

$$\Gamma = \frac{2\pi}{B}\,\omega r^2 = \frac{4\pi\Omega}{B}\,a'r^2, \tag{10}$$

iar din (1) și (2) se obține relația

$$V_\infty^2(1 + a)\, a = \Omega^2 r^2(1 - a')\, a'. \tag{11}$$

În cazul elicelor ușor încărcate termenii a^2 și a'^2 se pot neglija în comparație cu cei în a și a', astfel că din relația de mai sus avem

$$\frac{a}{a'} \simeq \frac{\Omega^2 r^2}{V_\infty^2}. \tag{12}$$

Acum, cu relațiile((11) și (12) pierderea de energie datorată acțiunii elementelor palei $\mathrm{d}E = \mathrm{d}M - V_\infty \mathrm{d}T$, este

$$\mathrm{d}E_i \simeq \frac{B^2\Gamma^2}{4\pi}\,\rho\,\frac{V_\infty}{r}\left(1 + \frac{\Omega^2 r^2}{V_\infty^2}\right)\mathrm{d}r, \tag{13}$$

iar $\mathrm{d}T$ poate fi aproximat, neglijind pe a', prin expresia

$$\mathrm{d}T \simeq B\Gamma\rho\Omega r\mathrm{d}r.$$

Notînd $\gamma = \dfrac{B\Gamma\Omega}{2\pi V^2}$, $x = \dfrac{\Omega r}{V_\infty}$, distribuția optimă $\gamma(x)$ care este punctul de minim al funcționalei

$$E_i = 2\pi\rho\,\frac{V_\infty^5}{\Omega^2}\int_0^{1/\lambda_1} \gamma^2(x)\,\frac{1 + x^2}{2x}\,\mathrm{d}x, \tag{14}$$

satisfăcînd restricția

$$V_\infty T = 2\pi\rho\,\frac{V_\infty^5}{\Omega^2}\int_0^{1/\lambda_1} x\gamma(x)\,\mathrm{d}x = \text{const.}, \tag{15}$$

este dată de expresia

$$\gamma = C\frac{x^2}{1+x^2} = C\frac{r_a^2}{r_a^2+\lambda_1^2}, \tag{16}$$

unde constanta C este multiplicatorul lui Lagrange.

Această expresie este identică cu funcţia $K(r_a)$ pentru elicea ideală dată de (7) dacă se ia $C = \frac{v_s}{V_\infty}$ şi dacă în (7) viteza v_s este considerată neglijabilă în comparaţie cu viteza de înaintare V_∞, adică este identică cu funcţia lui Goldstein, $K_G(r_a) = \frac{B\Gamma\Omega}{2\pi V_\infty v_s}$. Se observă că funcţia $\gamma(r_a)$ pentru viteza de înaintare V_∞ corespunde funcţiei $K(r_a)$ pentru o viteză de înaintare $V_\infty - v_s$, dacă se neglijează contracţia. Pentru a corecta efectul numărului de pale, precum şi al încărcării ($v_s \ll V_\infty$) se va scrie

$$\gamma = C\frac{r_a^2}{r_a^2+\lambda_1^2}\varkappa\tau, \tag{17}$$

unde coeficienţii $\varkappa$ şi τ sînt definiţi în paragraful al 2-lea.

Viteza totală indusă w_1 fiind normală la suprafaţa elicoidală, iar tangenta la curba elicoidală de pe această suprafaţă la raza r avînd panta dată de ecuaţia

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{V_\infty + \frac{v_s}{2}}{\Omega r},$$

rezultă că a şi a', componentele vitezei adimensionale induse pe pale au expresiile

$$a' = \frac{B\Gamma}{4\pi\Omega}\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2}\gamma\frac{\lambda_1^2}{r_a^2} = \frac{v_s}{2V_\infty}\frac{\lambda_1^2}{r_a^2+\lambda_1^2}\varkappa\tau,$$

$$a = \frac{r_a a'}{\lambda_1 \operatorname{tg}\beta} \simeq \frac{v_s}{2V_\infty}\frac{r_a^2}{r_a^2+\lambda_1^2}\varkappa\tau = \frac{\frac{v_s}{2V_\infty}}{1+\frac{v_s}{2V_\infty}}\cdot\frac{r_a^2}{r_a^2+\lambda_1^2}\varkappa\tau, \tag{18}$$

în care parametrul $\frac{v_s}{2V_\infty}$ şi factorul de corecţie τ sînt determinaţi din relaţiile (6), (8) şi (9) celălalt factor de corecţie $\varkappa$, care ţine seama de numărul finit de pale obţinîndu-se din tabelele 1 şi 2 sau din diagramele din figura 4.

Să determinăm acum circulaţia optimă, respectiv vitezele induse tangenţiale, tot ca punct de minim al funcţionalei E_i cu restricţia

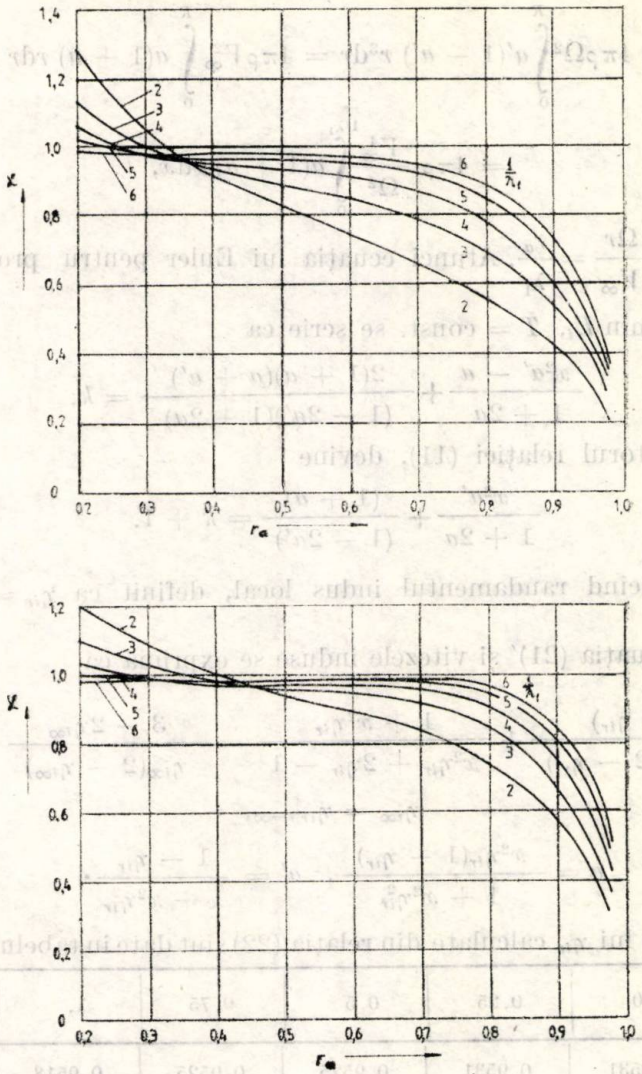


Fig. 4

T = const., luînd însă expresiile exacte ale lui E, și T. Astfel, din (10) și (11) avem următoarele formule exacte

$$E = \int_0^R \Omega \mathrm{d}M - \int_0^R V_\infty \,\mathrm{d}T = B\rho V_\infty \Omega \int_0^R \Gamma(r)\, r(a + a')\,\mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi\rho V_\infty^3 \int_0^R (1 + a)\left[a^2 + \frac{\Omega^2 r^2}{V_\infty^2} a'^2\right] r\mathrm{d}r = 4\pi\rho \frac{V_\infty^5}{\Omega^2} \int_0^{1/\lambda_1} (1 + a)[a^2 + x^2 a'^2]x\,\mathrm{d}x, \qquad (19)$$

$$T = 4\pi\rho\Omega^2\int_0^R a'(1-a')\,r^3\mathrm{d}r = 4\pi\rho V_\infty^2\int_0^R a(1+a)\,r\mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi\rho\,\frac{V_\infty^4}{\Omega^2}\int_0^{1/\lambda_1} a(1+a)\,x\mathrm{d}x, \tag{20}$$

în care $x = \dfrac{\Omega r}{V_\infty} = \dfrac{r_a}{\lambda_1}$. Atunci ecuația lui Euler pentru problema izoperimetrică $\min E_i$, $T = \text{const.}$ se scrie ca

$$\frac{x^2a' - a}{1+2a} + \frac{2(1+a)(a+a')}{(1-2a')(1+2a)} = k, \tag{21}$$

care, cu ajutorul relației (11), devine

$$\frac{x^2a'}{1+2a} + \frac{(1+a)}{(1-2a')} = k+1. \tag{21'}$$

Introducînd randamentul indus local, definit ca $\eta_{ir} = \dfrac{V_\infty \mathrm{d}T}{\Omega \mathrm{d}M} = \dfrac{1-a'}{1+a}$, ecuația (21)' și vitezele induse se exprimă ca

$$\frac{x^2(1-\eta_{ir})}{1+x^2\eta_{ir}(2-\eta_{ri})} + \frac{1+x^2\eta_{ir}}{x^2\eta_{ir}+2\eta_{ir}-1} = \frac{3-2\eta_{i\infty}}{\eta_{i\infty}(2-\eta_{i\infty})} = k+1,$$

$$\eta_{i\infty} = \eta_{ir}|_{r\to\infty}, \tag{22}$$

$$a = \frac{x^2\eta_{ir}(1-\eta_{ir})}{1+x^2\eta_{ir}^2}, \quad a' = \frac{1-\eta_{ir}}{1+x^2\eta_{ir}^2}. \tag{23}$$

Valorile lui η_{ir} calculate din relația (22) sînt date în tabelul de mai jos

$\eta_{i\infty}$ \ x	0	0,25	0,5	0,75	1,	1,5
0,95	0,9531	0,9531	0,9525	0,9525	0,9518	0,9512
0,90	0,9126	0,9120	0,9106	0,9087	0,9067	0,9047
0,85	0,8761	0,8748	0,8721	0,8681	0,8648	0,8595
0,80	0,8429	0,8409	0,8369	0,8310	0,8256	0,8170
0,75	0,8124	0,8104	0,8037	0,7964	0,7885	0,7765
0,70	0,7845	0,7812	0,7738	0,7639	0,7533	0,7373

2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
0,9505	0,9505	0,9505	0,9505	0,9505	0,9505	0,9498
0,9027	0,9020	0,9013	0,9013	0,9007	0,9007	0,9007
0,8569	0,8540	0,8535	0,8529	0,8522	0,8515	0,8515
0,8117	0,8084	0,8064	0,8044	0,8037	0,8031	0,8024
0,7679	0,7632	0,7599	0,7572	0,7559	0,7546	0,7539
0,7260	0,7187	0,7141	0,7108	9,7088	0,7068	0,7054

Se observă că randamentul are o creștere importantă spre butucul palei, această variație fiind însă limitată la o porțiune mică din pală. Prin urmare, condiția de circulație optimă reprezentată prin condiția aproximativă de randament constant în lungul palei este satisfăcătoare numai pentru elicele cu pas de deplasare mic sau cu randament mare, deci cu încărcare mică a discului.

Determinarea exactă a vitezelor induse și deci a circulației, presupune un calcul numeric implicit : pentru o valoare $\eta_{i\infty}$ dată se calculează η_{ir} din (22) în fiecare punct x și apoi din (23) se calculează vitezele induse a și a'. Din (20) prin integrare se găsește valoarea coeficientului de tracțiune $C_t = \dfrac{T}{\rho/2 V_\infty^2 \pi D^2}$ care corespunde valorii alese pentru $\eta_{i\infty}$.

4. METODA DE PROIECTARE A ELICEI

În principal, problema de proiectare constă în determinarea valorii coeficientului de portanță C_z la fiecare rază a palei elicei. Vectorul vitezei relative $\vec{W}$ (fig. 2) fiind cunoscut, rămîne de ales profilul aerodinamic din secțiunea respectivă și unghiul de incidență pentru a se obține o portanță optimă. Parametrul v_s/V_∞ adică viteza de deplasare la infinit aval a suprafețelor de vîrtej presupuse rigide, joacă un rol important în această metodă, fiind un parametru independent de care depind toate celelalte mărimi. Valoarea lui se obține din expresia exactă a coeficientului de putere [3]

$$C_p = 2\frac{v_s}{V_\infty}\left[1 - \lambda^2 \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\right]\left(1 + \frac{v_s}{V_\infty}\right)\left(1 + h\frac{v_s}{V_\infty}\right) \qquad (24)$$

sau din relația aproximativă (9) pentru valoarea λ_1, ca o primă valoare aproximativă pentru calcul. Cu această valoare din (3) și (8) se calculează λ cu care se determină o nouă aproximație a lui v_s/V_∞. În general, cea de a doua aproximație nu diferă mult de prima, putîndu-se opri la ea. Circulația optimă se obține apoi din formula (17) ca

$$\Gamma(r_a) = \frac{2\pi V_\infty^2}{B\Omega}\gamma(r_a) = \frac{2\pi V_\infty^2}{B\Omega}\frac{v_s}{V_\infty}\frac{r_a^2}{r_a^2 + \lambda_1^2}\varkappa\tau. \qquad (25)$$

Determinarea coeficientului de portanță C_z se obține din relația de egalitate dintre forța care acționează pe un element de vîrtej și forța pe un element de pală

$$\rho\Gamma W = 1/2\, W^2 C_z c,$$

unde c este coarda elementului de pală. Deci

$$\Gamma = 1/2\, W C_z c. \qquad (26)$$

Viteza relativă W și unghiul acesteia se obțin direct din diagrama vitezelor (fig. 2), avînd expresia

$$W = V_\infty \sqrt{(1+a)^2 + \frac{r_a^2}{\lambda_1^2}(1-a')^2}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1+a}{1-a'} \cdot \frac{\lambda_1}{r_a}, \tag{27}$$

în care vitezele induse a și a' sînt date de relațiile (18).

Folosind relațiile (25) și (26) pentru Γ, se obține identitatea

$$\sigma C_z = 2 \frac{V_\infty}{W} \lambda_1 \frac{\gamma(r_a)}{r_a} \tag{28}$$

în care $\sigma = \dfrac{BC}{2\pi r}$ este parametrul de soliditate. Numărul de pale B și coeficientul de portanță C_z fiind cunoscute din (28) se determină legea de variație a corzii în lungul palei. Unghiul de așezare al palei în secțiunea de la raza r, fiind δ_1 și β_0 fiind definit de pasul de deplasare relativ, $\operatorname{tg}\beta_0 = \dfrac{V_\infty}{\Omega r} = \dfrac{\lambda_1}{r_a}$, atunci $\alpha = \delta - \beta_0$ este unghiul de incidență geometrică al secțiunii, $\alpha_i = \beta - \beta_0$ este unghiul indus, iar $\alpha - \alpha_i$ este unghiul de incidență efectivă. Întrucît caracteristica aerodinamică a profilului secțiunii este cunoscută, avem

$$C_z = (\alpha - \alpha_i) \frac{dC_z}{d\alpha}$$

sau

$$(\alpha - \alpha_i) \frac{C_z}{dC_z/d\alpha} = f(C_z). \tag{29}$$

Dacă, $dC_z/d\alpha$ nu este o constantă, funcția $f(C_z)$ poate fi găsită simplu prin reprezentare grafică.

Cu acestea avem relațiile pentru unghiul de incidență geometrică și unghiul de așezare al palei

$$\alpha = f(C_z) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_1}{r_a} \frac{1+a}{1-a'}\right) - \operatorname{arctg}\frac{\lambda_1}{r_a},$$

$$\delta = \alpha + \operatorname{arctg}\frac{\lambda_1}{r_a}. \tag{30}$$

Valorile corespunzătoare ale lui α și δ pentru C_z dat sînt obținute din ecuațiile (30).

Alegerea coeficientului de portanță este o problemă de compromis, ținînd foarte mult de experiență. Pentru secțiunile care au viteza relativ mai mică decît viteza critică, se poate lua pentru C_z o valoare relativ mare, de exemplu 0,5, iar pentru secțiunile de la vîrful palei care lucrează

în domeniul critic este mai avantajos să se aleagă valori mai mici, de ordinul 0,3.

În final, prin integrare se poate calcula coeficientul de tracțiune și moment la fel ca în modelul elementului de pală [2].

Primită la redacție la 23 octombrie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. W.-H. ISAY, *Propeller theorie*, Hydrodynamische Probleme, Springer-Verlag, Göttingen, 1964.
2. H. DUMITRESCU, ADELINA GEORGESCU, V. CEANGĂ, J. POPOVICI, A. DUMITRACHE, GH. GHIȚĂ, și B. NICOLESCU, *Calculul elicei*, Edit. Academiei R. S. România, (va apare).
3. TH. THEODORSEN, *Theory of propellers*, McGraw Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1948.

CALCULUL LA FLUAJ AL SISTEMELOR DE CONDUCTE. I

de N. POSEA, AL. ANGHEL, N. GRIGORE

Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

Se prezintă un algoritm pentru calculul la fluaj al sistemelor de conducte, bazat pe metoda elementelor finite. Variațiile neliniare ale tensiunilor și deformațiilor se determină, pentru valori incrementale ale timpului, în mod iterativ, pornind de la soluția elastică și calculînd succesiv corecții pînă la obținerea unor valori staționare. Algoritmul permite folosirea oricărei legi de fluaj și a fost transpus într-un program în limbaj Fortran, putînd fi folosit pentru orice structură spațială din bare (drepte și curbe circulare). Particularitățile programului și exemple de aplicare vor constitui partea a II-a a lucrării.

Analiza comportării la fluaj a structurilor [3, 7, 8, 9, 10, 15], mai ales pentru stări de deformații și tensiuni spațiale, întîmpină dificultăți mari atît datorită caracterului neliniar între tensiuni și deformații, cît și redistribuțiilor de tensiuni care au loc. Dacă în stadiul liniar elastic starea de deformare la un moment dat este strict determinată de starea de tensiuni în acel moment, în cazul fluajului starea de deformare la un moment dat depinde de „istoria" deformării pînă la acel moment.

Calculul la fluaj al structurilor, de regulă, se face pe baza unor ipoteze simplificatoare, prevăzute în norme tehnice.

De exemplu, norma tehnică românească NTR 10401 [25] prevede modul de calcul a duratei de serviciu în condiții de fluaj a unei structuri, folosind starea de tensiuni în domeniul elastic.

În lucrarea [11] se pune problema calculului învelișurilor și corpurilor sferice în regim staționar, în condiții de fluaj, calculîndu-se durata pînă la rupere și deformația radială după un anumit timp de funcționare în condiții cunoscute.

În lucrarea [6], lucrare de referință pentru calculul la fluaj al structurilor, autorii Greenbaum, G. A. și Rubinstein, M. F., prezintă o analiză și un program pentru calculul solicitării de fluaj a unui corp oarecare, cu simetrie axială supus la încărcări simetrice.

Regimul de fluaj se modelează folosind creșteri finite. Metoda presupune cunoscută soluția elastică a problemei și calculează solicitarea la fluaj pentru valori incremetale ale timpului.

Sistemele de conducte care funcționează în condiții de fluaj au o foarte mare răspîndire în combinatele chimice, petrochimice, rafinării etc. În prezent, calculul și proiectarea sistemelor de conducte care funcționează în condiții de fluaj se face în mod simplificat, de multe ori cu implicații nedorite privind buna lor funcționare.

În consecință, elaborarea unui algoritm pentru calculul la fluaj al sistemelor de conducte constituie o problemă actuală de mare complexitate teoretică și practică.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 2, 1986, P. 142—167

1. BAZELE ALGORITMULUI PENTRU CALCULUL LA FLUAJ AL CONDUCTELOR

Algoritmul este dezvoltat pe baza metodei generale a elementelor finite și a fost fundamentat prin lucrările [19, 20].

Sistemul de conducte se discretizează în elemente finite de tip bară. În figura 1.1 se prezintă un astfel de element de tip bară, la capetele căruia eforturile și respectiv deplasările față de sistemul de axe propriu al elementului $(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z})$ se aranjează în vectorii coloană:

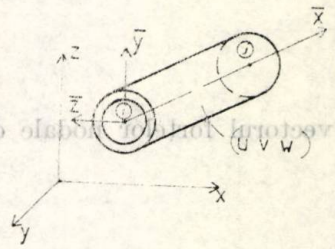


Fig. 1.1

$$\underset{\sim}{\bar{Q}}^{(e)} = [\bar{N}_i \bar{T}_i^y \bar{T}_i^z \bar{M}_i^x \bar{M}_i^y \bar{M}_i^z \bar{N}_j \bar{T}_j^y \bar{T}_j^z \bar{M}_j^x \bar{M}_j^y \bar{M}_j^z]^t, \quad (1.1)$$

$$\underset{\sim}{\bar{Z}}^{(e)} = [\bar{u}_i \bar{v}_i \bar{w}_i \bar{\varphi}_i^x \bar{\varphi}_i^y \bar{\varphi}_i^z \bar{u}_j \bar{v}_j \bar{w}_j \bar{\varphi}_j^x \bar{\varphi}_j^y \bar{\varphi}_j^z]^t, \quad (1.2)$$

unde indicele superior t indică operația de transpunere.

Deformațiile specifice dintr-un punct curent al elementului se exprimă matriceal, în funcție de deplasările nodurilor, sub forma:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{bmatrix} = \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\bar{Z}}^{(e)}, \quad (1.3)$$

unde B reprezintă o matrice dreptunghiulară (2×12) ale cărei elemente se prezintă în paragraful al 3-lea.

Se consideră că deformațiile $\underset{\sim}{\varepsilon}(x, y, z)$ se compun din deformații elastice $(\underset{\sim}{\varepsilon}^E)$, din deformații de fluaj $(\underset{\sim}{\varepsilon}^C)$ și deformații din temperatură $(\underset{\sim}{\varepsilon}^T)$:

$$\underset{\sim}{\varepsilon}(x, y, z) = \underset{\sim}{\varepsilon}^E(x, y, z) + \underset{\sim}{\varepsilon}^C(x, y, z) + \underset{\sim}{\varepsilon}^T. \quad (1.4)$$

Explicitînd deformațiile elastice $(\underset{\sim}{\varepsilon}^E)$ și ținînd seama de relația dintre tensiuni și deformații în domeniul elastic,

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^E, \quad (1.5)$$

unde $\underset{\sim}{E}$ reprezintă matricea de elasticitate, rezultă

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\varepsilon}(x, y, z) - \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^C(x, y, z) - \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^T. \quad (1.6)$$

Ținînd seama de (1.3), relația (1.6) devine:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\bar{Z}}^{(e)} - \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^C(x, y, z) - \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^T. \quad (1.7)$$

Aplicînd principiul lucrului mecanic virtual pentru corpurile elastice, pentru forțele exterioare și interioare de pe un element finit de bară, se obține următoarea relație:

$$\underset{\sim}{\bar{K}}^{(e)}\,\underset{\sim}{\bar{Z}}^{(e)} = \underset{\sim}{\bar{Q}}^{(e)} + \underset{\sim}{\bar{F}}^{f,(e)} + \underset{\sim}{\bar{F}}^{T,(e)}, \quad (1.8)$$

unde

$$\overline{\underset{\sim}{K}}^{(e)} = \int_{(V)} \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} \, dV. \tag{1.9}$$

reprezintă matricea de rigiditate a elementului finit în sistemul local de axe, care e o matrice pătratică avînd 12×12 elemente :

$$\overline{\underset{\sim}{F}}^{f,(e)} = \int_{(V)} \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{\varepsilon}^C \, dV \tag{1.10}$$

vectorul forţelor nodale din fluaj,

$$\overline{\underset{\sim}{F}}^{T,(e)} = \int_{(V)} \underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{\varepsilon}^T \, dV \tag{1.11}$$

vectorul forţelor nodale din temperatură.

Vectorii $\underset{\sim}{Q}^{(e)}$, $\underset{\sim}{F}^{f,(e)}$, $\underset{\sim}{F}^{T,(e)}$ exprimaţi, faţă de sistemul general de axe al sistemului de conducte ($x\,y\,z$), se obţin funcţie de vectorii $\overline{\underset{\sim}{Q}}^{(e)}$, $\overline{\underset{\sim}{F}}^{f,(e)}$, $\overline{\underset{\sim}{F}}^{T,(e)}$, stabiliţi faţă de sistemul propriu al elementului ($\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$), cu relaţiile :

$$\underset{\sim}{Q}^{(e)} = \underset{\sim}{L}^t \overline{\underset{\sim}{Q}}^{(e)}; \quad \underset{\sim}{F}^{f,(e)} = \underset{\sim}{L}^t \overline{\underset{\sim}{F}}^{f,(e)}; \quad \underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{L}^t \overline{\underset{\sim}{F}}^{T,(e)}, \tag{1.12}$$

în care $\underset{\sim}{L}^t$ este transpusa matricei $\underset{\sim}{L}$, adică matricea de rotaţie a elementului [18].

Matricea de rigiditate a elementului în sistemul general de axe ($\underset{\sim}{K}^{(e)}$), funcţie de cea în sistemul local de axe ($\overline{\underset{\sim}{K}}^{(e)}$) este dată de relaţia :

$$\underset{\sim}{K}^{(e)} = \underset{\sim}{L}^t \overline{\underset{\sim}{K}}^{(e)} \underset{\sim}{L}. \tag{1.13}$$

Faţă de sistemul general de axe (xyz), relaţia (1.8) se scrie

$$\underset{\sim}{K}^{(e)} \underset{\sim}{Z}^{(e)} = \underset{\sim}{Q}^{(e)} + \underset{\sim}{F}^{f,(e)} + \underset{\sim}{F}^{T,(e)}. \tag{1.14}$$

Folosind această relaţie şi scriind echilibrul tuturor nodurilor structurii se obţine sistemul ecuaţiilor de condiţie

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{R}, \tag{1.15}$$

în care $\underset{\sim}{Z}$ reprezintă vectorul necunoscutelor (deplasările tuturor nodurilor) ; $\underset{\sim}{K}$ — matricea de rigiditate a întregii structuri ; $\underset{\sim}{R}$ — vectorul acţiunilor exterioare se determină cu expresia :

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{F}^f + \underset{\sim}{F}^T. \tag{1.16}$$

În aceasta, $\underset{\sim}{F}$ reprezintă vectorul forţelor nodale din sarcinile exterioare [18] ;

$$\underset{\sim}{F}^f = [\underset{\sim}{F}_1^f \underset{\sim}{F}_2^f, \ldots, \underset{\sim}{F}_n^f]^t \tag{1.17}$$

reprezintă vectorul forțelor nodale din fluaj și

$$\underset{\sim}{F}^T = [\underset{\sim}{F}_1^T \underset{\sim}{F}_2^T, \ldots, \underset{\sim}{F}_n^T]^t \tag{1.18}$$

vectorul forțelor nodale din temperatură. Se precizează că fiecare componentă $\underset{\sim}{F}_j^f$ însumează toate componentele din nodul j ale tuturor elementelor care pleacă din acest nod.

Sistemul (1.15), deși are forma sistemului ecuațiilor de condiție ale metodei deplasărilor, este un sistem neliniar deoarece vectorul $\underset{\sim}{R}$ prin componentele de fluaj ($\underset{\sim}{F}^f$) depinde de valorile $\underset{\sim}{Z}$. În consecință, rezolvarea lui necesită o metodologie specială fie prin modificarea matricei $\underset{\sim}{K}$ ținînd seama de variația în timp a deplasărilor, fie printr-o evaluare incrementală a vectorului $\underset{\sim}{F}^f$ dezvoltată în timp pînă la stabilizarea valorilor $\underset{\sim}{Z}$.

2. PRINCIPALELE ETAPE PRIVIND CALCULUL DEPLASĂRILOR ȘI ȚENSIUNILOR LA FLUAJ

Prima etapă în calculul unui sistem de conducte constă în determinarea eforturilor și deplasărilor în domeniul elastic produse de încărcările exterioare cum ar fi: sarcini uniform distribuite din greutăți proprii; forțe concentrate din armături, variații de temperatură față de montaj, etc.

Pentru aceasta se folosește algoritmul și programul C.S.D.C. [18].

După determinarea eforturilor în domeniul elastic, se determină tensiunile normale și tangențiale și apoi pe baza criteriului energiei potențiale de deviație, tensiunile echivalente

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}. \tag{2.1}$$

Adoptînd legea de fluaj:

$$\varepsilon_e^C = K\sigma_e^n t, \tag{2.2}$$

variația incrementală a intensității deformațiilor ($\Delta\varepsilon_e^C$) pentru o variație incrementală a timpului (Δt), considerînd intensitatea tensiunilor constantă în intervalul Δt, conduce la o relație de forma:

$$\Delta\varepsilon_e^C = K\sigma_e^n \Delta t. \tag{2.3}$$

Variația componentelor deformațiilor de fluaj se determină cu următoarea relație scrisă sub formă matriceală:

$$\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^C = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x^C \\ \\ \Delta\gamma_{xy}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta\varepsilon_e^C}{\sigma_e}\sigma_x \\ \\ 3\dfrac{\Delta\varepsilon_e^C}{\sigma_e}\tau_{xy} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Introducînd aceste componente în (1.10) se obține vectorul forțelor de fluaj $\Delta\underset{\sim}{\bar{F}}^{f,e}$ în sistemul local și apoi cu (1.12) $\Delta\underset{\sim}{F}^{f,e} = \underset{\sim}{L}^{t}\,\Delta\underset{\sim}{\bar{F}}^{f,e}$ vectorul forțelor de fluaj în sistemul general.

Pe baza acestuia, se determină componentele:

$$\Delta\underset{\sim}{F}_j^f = \sum_{e_j} \Delta\underset{\sim}{F}^{f,(e)} = \sum_{e_j} \underset{\sim}{L}_{(e)}^{t}\,\Delta\underset{\sim}{\bar{F}}^{f,e}, \tag{2.5}$$

unde e_j se referă la toate elementele din nodul j și apoi vectorul forțelor nodale din fluaj

$$\Delta\underset{\sim}{R}^f = [\Delta\underset{\sim}{F}_1^f, \Delta\underset{\sim}{F}_2^f, \ldots, \Delta\underset{\sim}{F}_j^f, \ldots]^t \tag{2.6}$$

pentru întreaga structură.

Introducînd aceste componente în (1.15), se obține sistemul:

$$\underset{\sim}{K}\cdot\Delta\underset{\sim}{Z} = \Delta\underset{\sim}{R}^f, \tag{2.7}$$

din rezolvarea căruia rezultă variația deplasărilor nodale $\Delta\underset{\sim}{Z}$.

Pornind de la valorile $\Delta\underset{\sim}{Z}$ se determină componentele $\Delta\underset{\sim}{\bar{Z}} = \underset{\sim}{L}\,\Delta\underset{\sim}{Z}$, unde $\underset{\sim}{L}$ este matricea de rotație și cu ajutorul relației (1.3) se stabilesc variațiile deformațiilor totale $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}(y, y, z)$.

Introducînd variația deformațiilor totale $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}$ și variația deformațiilor de fluaj ($\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^c$) în relația (1.6) se obține variația tensiunilor ($\Delta\underset{\sim}{\sigma}$) datorate fluajului în primul increment temporal. La tensiunile calculate din încărcări din domeniul elastic se adună variația tensiunilor ($\Delta\underset{\sim}{\sigma}$) și se obțin astfel tensiunile rezultante $\underset{\sim}{\sigma}$ după primul interval elementar de timp. Tensiunile rezultante $\underset{\sim}{\sigma}$ se consideră ca stare inițială pentru cel de-al doilea increment de timp (Δt), procedîndu-se apoi în mod identic cum s-a arătat mai sus. Procesul se repetă pînă cînd tensiunile în structură se stabilizează (la două etape succesive variația acestora este neglijabilă). Prezentarea amănunțită a algoritmului este dată în lucrările [19, 20].

Verificarea de rezistență ținînd seama de fenomenul de fluaj constă în calculul coeficientului de siguranță cu relația:

$$C = \frac{\sigma_d^t}{\sigma_{max}^f}, \tag{2.8}$$

în care σ_{max}^f reprezintă tensiunea maximă stabilizată în punctul cel mai solicitat al structurii, iar σ_d^t reprezintă rezistența tehnică de durată. Coeficientul de siguranță efectiv determinat cu relația (2.8) trebuie să îndeplinească condiția:

$$C \geqslant C_{d,a}, \tag{2.9}$$

unde $C_{d,a}$ reprezintă coeficientul de siguranță admisibil față de rezistența tehnică de durată. Pentru sistemele de conducte din industria petrochimică $C_{d,a}^{min} = 1{,}5$.

Observații. 1. Se observă că σ^f_{max} se obține în mod iterativ, cu relația:

$$\sigma_{max(i+1)} = \sigma_{max,(i)} + \Delta\sigma_i, \tag{2.10}$$

considerînd că valoarea inițială pentru $i = 0$, valoarea $\sigma_{max,(0)}$ corespunzătoare acțiunii sarcinilor exterioare în domeniul elastic. Valorile $\Delta\sigma_i$ determinate cu expresia matriceală:

$$\underset{\sim}{\Delta}\sigma_i = \underset{\sim}{E}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{L}\,\Delta\underset{\sim}{Z}_{(i)} - \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\Delta}^{\,c} - \underset{\sim}{E}\underset{\sim}{\varepsilon}^{T} \tag{2.11}$$

necesită cunoașterea matricei $\underset{\sim}{B}$ ale cărei componente sînt funcțiuni de x, y, z.

2. Coeficientul de siguranță a fost definit față de rezistența de durată, dar algoritmul elaborat permite stabilirea lui și în funcție de limita de fluaj, adică tensiunea la care deformația plastică într-un interval de timp determinat atinge valoarea prescrisă de condițiile tehnice. Aceasta este posibil deoarece în oricare dintre cicluri se calculează de formația totală.

3. STABILIREA MATRICEI $\underset{\sim}{B}$

Elementele finite de tip bară în care se discretizează un sistem de conducte sînt de două feluri:

— elemente de tip bară dreaptă;

— elemente de tip bară curbă circulară.

A. STABILIREA MATRICEI $\underset{\sim}{B}$ PENTRU BARA DREAPTĂ DUBLU ÎNCASTRATĂ

Matricea de rigiditate a unei bare spațiale în sistemul local de axe se prezintă în lucrarea [18].

Pentru a determina matricea $\underset{\sim}{B}$, se dau deplasări (respectiv rotiri) unitare după cele trei axe, la capetele i, respectiv j, ale barei, determinîndu-se corespunzător $\underset{\sim}{\varepsilon}(x, y, z)$.

Considerînd vectorul deplasărilor capetelor $i-j$ ale elementului sub forma:

$$\underset{\sim}{\Delta} = [u_i v_i w_i \varphi_i^x \varphi_i^y \varphi_i^z u_j v_j w_j \varphi_j^x \varphi_j^y \varphi_j^z]^t, \tag{3.1}$$

matricea $\underset{\sim}{\varepsilon}$ se poate scrie sub forma:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \\ \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(1,1), B(1,2), B(1,3), B(1,4), B(1,5), B(1,6), B(1,7), B(1,8), \\ B(1,9), B(1,10), B(1,11), B(1,12) \\ B(2,1), B(2,2), B(2,3), B(2,4), B(2,5), B(2,6), B(2,7), B(2,8), \\ B(2,9), (B2,10), B(2,11), B(2,12) \end{bmatrix} \cdot \underset{\sim}{\Delta}, \tag{3.2}$$

în care

$$B(1,1) = \frac{1}{l};\quad B(1,2) = -\left(1 - 2\frac{\bar{x}}{l}\right)\frac{6}{l^2}\bar{y};\quad B(1,3) = -$$

$$-\left(1 - 2\frac{\bar{x}}{l}\right)\cdot\frac{6}{l^2}\bar{z};\quad B(1,4) = 0,$$

$$B(1,5) = \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\bar{x}}{l}\right)\frac{4}{l}\bar{z};\quad B(1,6) = -\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\bar{x}}{l}\right)\frac{4}{l}\bar{y};\quad B(1,7) =$$

$$= -\frac{1}{l} = -B(1,1), \tag{3.3}$$

$$B(1,8) = (1 - 2\cdot\frac{\bar{x}}{l}\cdot\frac{6}{l^2}\bar{y} = -B(1,2);\ B(1,9) = \left(1 - 2\frac{\bar{x}}{l}\right)\frac{6}{l^2}\bar{z} = -B(1,3),$$

$$B(1,10) = 0;\quad B(1,11) = \left(1 - 3\frac{\bar{x}}{l}\right)\frac{2}{l}\bar{z};\quad B(1,12) = -\left(1 - 3\frac{\bar{x}}{l}\right)\frac{2}{l}\bar{y},$$

$$B(2,1) = 0;\ B(2,2) = 0;\ B(2,3) = 0;\ B(2,4) = \frac{\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}}{l};\ B(2,5) = 0,$$

$$B(2,6) = 0;\ B(2,7) = 0;\ B(2,8) = 0;\ B(2,9) = 0,$$

$$B(2,10) = -\frac{\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}}{l} = -B(2,4);\ B(2,11) = 0;\ B(2,12) = 0.$$

Aceste expresii se obţin din scrierea deformaţiilor $\varepsilon = \sigma/E$ şi $\gamma = \tau/G$ pentru fiecare componentă a vectorului deplasărilor luate în mod independent. De exemplu, în figura 3.1 *a* s-a dat deplasarea $\varphi_j^z = 1$, din

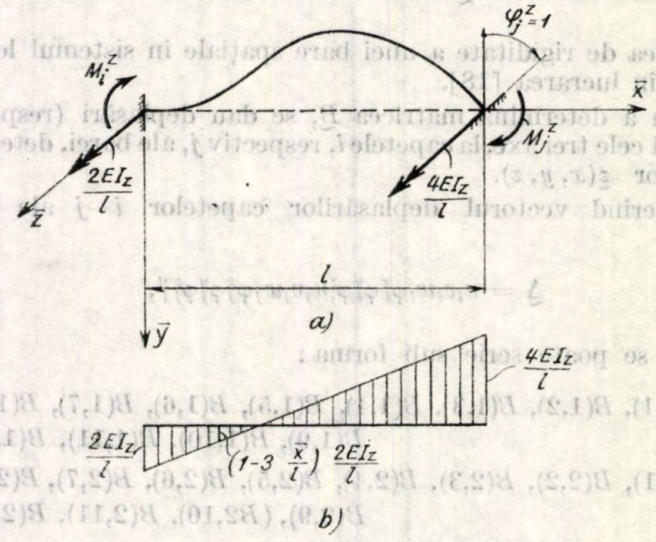


Fig. 3.1

care rezultă diagrama M^z din figura 3.1 *b*. Cunoscînd momentul încovoietor într-o secțiune curentă (fig. 3.1 *b*), și aplicînd formula lui Navier se obține:

$$\varepsilon_x = B(1,12) = -\frac{M^z}{I_z}\, y \frac{1}{E} = -\left(1 - 3\,\frac{\bar{x}}{l}\right)\frac{2}{l}\,\bar{y} \qquad (3.3')$$

(Numerele la elementele $B(ij)$ indică: primul, numărul liniei și al doilea numărul coloanei).

B. STABILIREA MATRICEI $\underset{\sim}{B}$ PENTRU BARA CURBĂ CIRCULARĂ DUBLU ÎNCASTRATĂ

Matricea de rigiditate a unei bare curbe circulare în sistemul local de axe se prezintă în lucrarea [18].

Analog ca în cazul barei drepte, pentru a determina matricea $\underset{\sim}{B}$ pentru bara curbă dublu încastrată, se dau deplasări (respectiv rotiri) unitare după cele trei axe, în capătul i, respectiv j ale barei, determinîndu-se corespunzător matricea $\underset{\sim}{\varepsilon}(x, y, z)$, într-o secțiune curentă caracterizată de unghiul curent θ, corespunzător sistemului local de axe $\bar{t}\,\bar{n}\,\bar{b}$ (fig. 3.2); de exemplu, din $u_i = 1$ (fig. 3.2 *a*) într-o secțiune curentă K

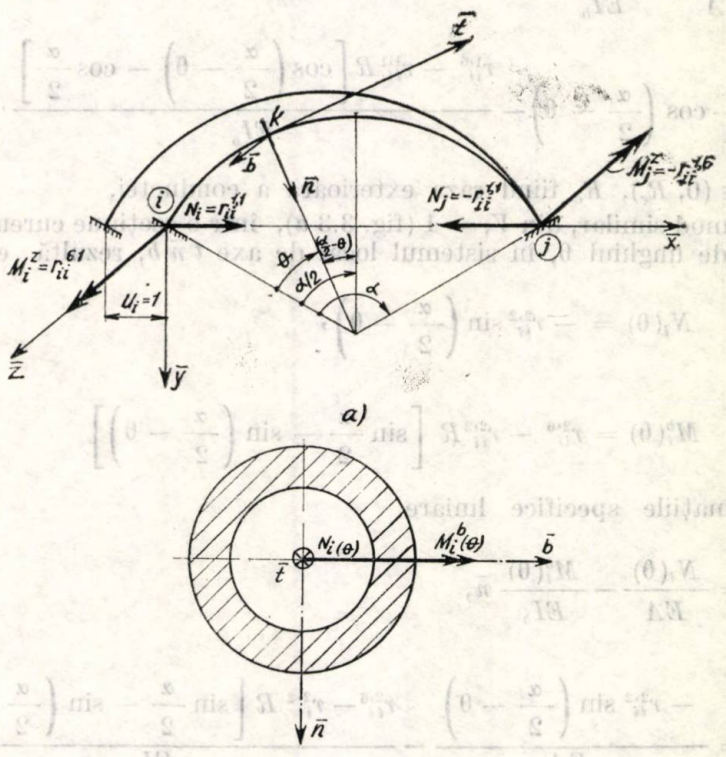


Fig. 3.2

caracterizată de unghiul θ, în sistemul local de axe $\bar{t}\ \bar{n}\ \bar{b}$, rezultă eforturile :

$$N_i(\theta) = r_{ii}^{1,1} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right),$$

$$M_i^b(\theta) = r_{ii}^{1,6} - r_{ii}^{1,1} R \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\right], \tag{3.4}$$

în care $r_{ii}^{1,1}$ reprezintă forța orizontală din i produsă de deplasarea unitară orizontală dată în i. Indicii inferiori marchează locul reacțiunii și al deplasării, iar indicii superiori proveniți din numerotarea deplasărilor de la 1 la 12, marchează în ordine direcția deplasării date și direcția reacțiunii. Astfel, $r_{ii}^{1,1}$ reprezintă reacțiunea produsă din deplasarea $u_i = 1$, pe direcția legăturii 1 din i. În mod similar $r_{ii}^{1,6}$ reprezintă reacțiunea produsă din deplasarea $u_i = 1$ pe direcția legăturii 6 din i.

Folosind eforturile (3.4) și admițînd semnul tensiunii dat de N după axa x cu plus, rezultă

$$\varepsilon = \frac{N_i(\theta)}{EA} - \frac{M_i^b(\theta)}{EI_b}\,\bar{n},$$

$$\varepsilon = \frac{r_{ii}^{1,1}}{EA}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - \frac{r_{ii}^{1,6} - r_{ii}^{1,1} R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\right]}{EI_b}\cdot \bar{n}, \tag{3.5}$$

unde $\bar{n} \in (0, R_e)$, R_e fiind raza exterioară a conductei.

În mod similar, din $V_i = 1$ (fig. 3.3 *a*), într-o secțiune curentă caracterizată de unghiul θ, în sistemul local de axe $t\ \bar{n}\ \bar{b}$, rezultă eforturile :

$$N_i(\theta) = -r_{ii}^{2,2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right),$$

$$M_i^b(\theta) = r_{ii}^{2,6} - r_{ii}^{2,2} R\left[\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)\right] \tag{3.6}$$

și deformațiile specifice liniare

$$\varepsilon = \frac{N_i(\theta)}{EA} - \frac{M_i^b(\theta)}{EI_b}\,\bar{n},$$

$$\varepsilon = \frac{-r_{ii}^{2,2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}{EA} - \frac{r_{ii}^{2,6} - r_{ii}^{2,2} R\left[\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)\right]}{EI_b}\,\bar{n}, \tag{3.7}$$

unde $\bar{n} \in (0, R_e)$.

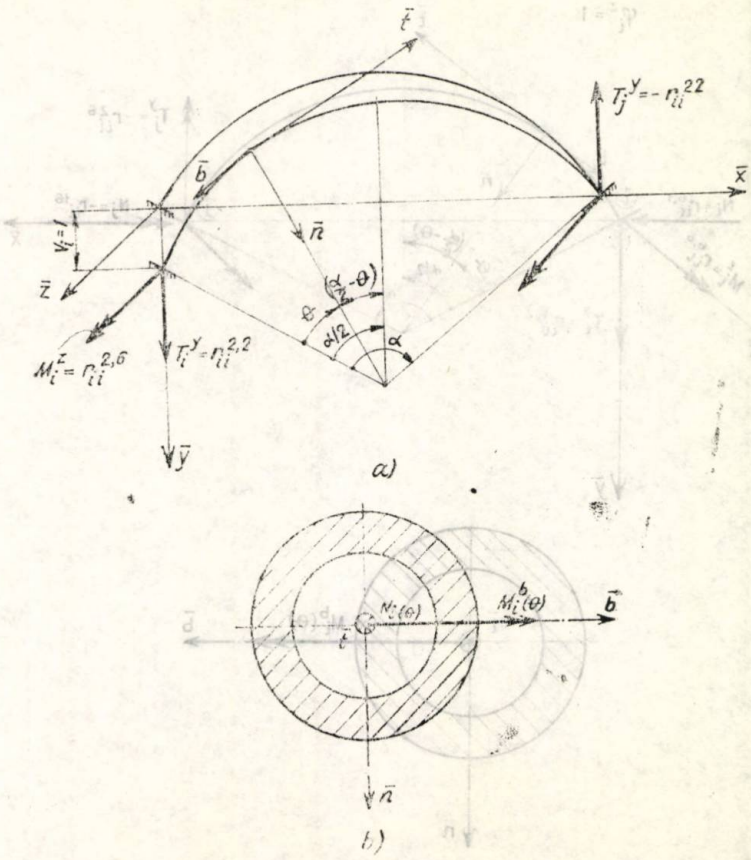


Fig. 3.3

Din $\varphi_i^z = 1$ (fig. 3.4 *a*), într-o secțiune curentă K se obțin eforturile:

$$N_i(\theta) = r_{ii}^{6,1}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) - r_{ii}^{6,2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right),$$

$$M_b(\theta) = r_{ii}^{6,6} - r_{ii}^{6,1}R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right] - r_{ii}^{6,2}R\left[\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right], \tag{3.8}$$

și deformația specifică liniară

$$\varepsilon = \frac{N_i(\theta)}{EA} - \frac{M_b(\theta)}{EI_b}\bar{n} = \frac{r_{ii}^{6,1}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) - r_{ii}^{6,2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EA} - \tag{3.9}$$

$$- \frac{r_{ii}^{6,6} - r_{ii}^{6,1}R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right] - r_{ii}^{6,2}R\left[\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]}{EI_b}\bar{n},$$

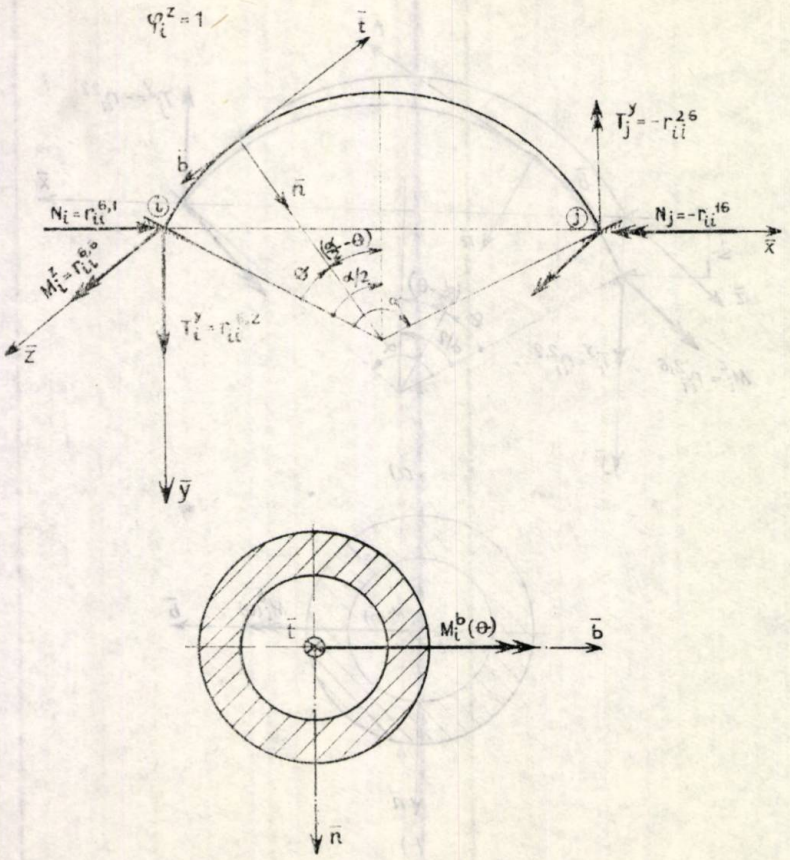


Fig. 3.4

unde $\bar{n} \in (0, R_e)$. Scriind vectorul $\underset{\sim}{\varepsilon}$ sub forma :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(1,1), B(1,2), B(1,3), B(1,4), B(1,5), B(1,6), B(1,7), B(1,8), \\ B(1,9), B(1,10), B(1,11), B(1,12) \\ B(2,1), B(2,2), B(2,3), B(2,4), B(2,5), B(2,6), B(2,7), B(2,8), \\ B(2,9), B(2,10), B(2,11), B(2,12) \end{bmatrix} \cdot \underset{\sim}{\Delta} \tag{3.10}$$

elementele matricei $\underset{\sim}{B}$, folosind expresiile ε și γ din fiecare deplasare dată separat este :

$$B(1,1) = \frac{r_{ii}^{1,1}}{EA} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - \frac{r_{ii}^{1,6} - r_{ii}^{1,1} R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\right]}{EI_b} \bar{n},$$

$$B(1,2) = \frac{-r_{ii}^{2,2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EA} - \frac{r_{ii}^{2,6} - r_{ii}^{2,2}R\left[\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]}{EI_b}\bar{n},$$

$$B(1,3) = \frac{r_{ii}^{3,3}R\sin\theta + r_{ii}^{3,4}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) + r_{ii}^{3,5}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{FI_n}\bar{b},$$

$$B(1,4) = \frac{r_{ii}^{4,3}R\sin\theta + r_{ii}^{4,4}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) + r_{ii}^{45}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_n}\bar{b},$$

$$B(1,5) = \frac{r_{ii}^{53}R\sin\theta + r_{ii}^{54}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) + r_{ii}^{55}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_n}\bar{b},$$

$$B(1,6) = \frac{r_{ii}^{61}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) - r_{ii}^{62}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EA} -$$

$$- \frac{r_{ii}^{66} - r_{ii}^{61}R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\right] - r_{ii}^{62}R\left[\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]}{EI_b}\bar{n},$$

(3.11)

$$B(1,7) = \frac{-r_{ii}^{11}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EA} - \frac{-r_{ii}^{16}+r_{ii}^{11}R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right]}{EI_b}\bar{n} = -B(1,1),$$

$$B(1,8) = \frac{r_{ii}^{22}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EA} - \frac{-r_{ii}^{26}+r_{ii}^{22}R\left[\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]}{EI_b}\bar{n} = -B(1,2),$$

$$B(1,9) = \frac{-r_{ii}^{33}R\sin\theta - r_{ii}^{34}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) - r_{ii}^{35}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_b}\bar{b} = -B(1,3),$$

$$B(1,10) = \frac{-r_{ii}^{43}R\sin\theta - r_{ii}^{44}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) - r_{ii}^{45}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_n}\bar{b} = -B(1,4),$$

$$B(1,11) = \frac{-(lr_{ii}^{33}+r_{ii}^{53})R\sin\theta - (lr_{ij}^{34}+r_{ii}^{54})\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right) - (lr_{ii}^{35}+r_{ii}^{55})\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_n} \times$$

$$\times \bar{b} = -B(1,5) - lB(1,3),$$

$$B(1,12) = \frac{-r_{ii}^{61}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+(-lr_{ii}^{22}+r_{ii}^{62})\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EA} -$$

$$-\frac{-(r_{ii}^{66}-lr_{ii}^{26})+r_{ii}^{61}R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right]+(-lr_{ii}^{22}+r_{ii}^{62})R\left[\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]}{EI_b}\times$$

$$\times\bar{n} = -B(1,6)+lB(1,2),$$

$$B(2,1)=0;\quad B(2,2)=0;$$

$$B(2,3) = \frac{r_{ii}^{33}R(1-\cos\theta)+r_{ii}^{34}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-r_{ii}^{35}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2},$$

$$B(2,4) = \frac{r_{ii}^{43}R(1-\cos\theta)+r_{ii}^{44}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-r_{ii}^{45}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2},$$

$$B(2,5) = \frac{r_{ii}^{53}R(1-\cos\theta)+r_{ii}^{54}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-r_{ii}^{55}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2},$$

$$B(2,6)=0;\quad B(2,7)=0;\quad B(2,8)=0;$$

$$B(2,9) = \frac{-r_{ii}^{33}R(1-\cos\theta)-r_{ii}^{34}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+r_{ii}^{35}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\times$$

$$\times\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2} = -B(2,3),$$

$$B(2,10) = \frac{-r_{ii}^{43}R(1-\cos\theta)-r_{ii}^{44}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+r_{ii}^{45}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\times$$

$$\times\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2} = -B(2,4),$$

$$B(2,11) = \frac{-(lr_{ii}^{33}+r_{ii}^{53})R(1-\cos\theta)-(lr_{ii}^{34}+r_{ii}^{54})\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+(lr_{ii}^{35}+r_{ii}^{55})\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\times$$

$$\times\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2} = -B(2,5)-lB(2,3),$$

$$B(2,12)=0.$$

4. CALCULUL VECTORULUI FORŢELOR NODALE DIN FLUAJ

Vectorul forţelor nodale din fluaj (1.10), pentru un element oarecare reprezintă un vector coloană cu 12 componente. Aceste componente se obţin prin integrarea fiecărui termen al produsului $\underset{\sim}{B}^t \cdot \underset{\sim}{E} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}^c$ pe întreg volumul elementului. Calculul componentelor vectorului $\underset{\sim}{F}^f$ se prezintă separat pentru elemente de bară dreaptă şi curbă circulară.

4.1. CALCULUL VECTORULUI FORȚELOR NODALE DIN FLUAJ (1.10) PENTRU BARA DREAPTĂ

Cunoscînd matricea $\underset{\sim}{B}$, relația (3.2) și matricele $\underset{\sim}{E}$, $\underset{\sim}{\varepsilon}^c$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}^c = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^c \\ \gamma_{xy}^c \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{E} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2(1+\mu)} \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

rezultă produsul $(\underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E})\ \underset{\sim}{\varepsilon}^c$ sub forma :

$$\underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{\varepsilon}^c = E \begin{bmatrix} \varepsilon_x^c \dfrac{1}{l} \\ -\varepsilon_x^c \left(1 - 2\dfrac{\bar{x}}{l}\right) \dfrac{6}{l^2} \bar{y} \\ -\varepsilon_x^c \left(1 - 2\dfrac{\bar{x}}{l}\right) \dfrac{6}{l^2} \bar{z} \\ \gamma_{xy}^c \dfrac{\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}}{l} \dfrac{1}{2(1+\mu)} \\ \varepsilon_x^c \left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\bar{x}}{l}\right) \dfrac{4}{l} \bar{z} \\ -\varepsilon_x^c \left(1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{\bar{x}}{l}\right) \dfrac{4}{l} \bar{y} \\ -\varepsilon_x^c \dfrac{1}{l} \\ \varepsilon_x^c \left(1 - 2\dfrac{\bar{x}}{l}\right) \dfrac{6}{l^2} \bar{y} \\ \varepsilon_x^c \left(1 - 2\dfrac{\bar{x}}{l}\right) \dfrac{6}{l^2} \bar{z} \\ -\gamma_{xy}^c \dfrac{\sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}}{l} \dfrac{1}{2(1+\mu)} \\ \varepsilon_x^c \left(1 - 3\dfrac{\bar{x}}{l}\right) \dfrac{2}{l} \bar{z} \\ -\varepsilon_x^c \left(1 - 3\dfrac{\bar{x}}{l}\right) \dfrac{2}{l} \bar{y} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Pentru a putea efectua integrarea matricei (4.2) pe volumul barei se împarte volumul acestora în elemente cilindrice Δr, $r\Delta\theta$, Δx (fig. 4.1). Valorile Δx pot fi aceleași pe toată lungimea barei sau diferențiate după dorință.

În secțiunea transversală, se alege $\Delta\theta = 45^{\circ}$ și cîte două elemente radiale pe grosimea S a peretelui conductei. Notînd cu D diametrul exte-

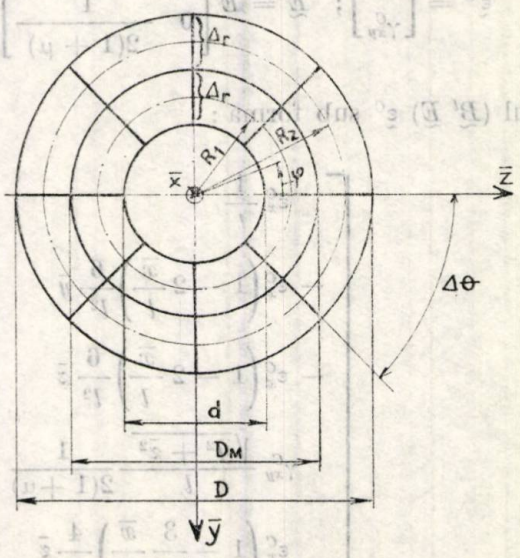


Fig. 4.1

rior al conductei, cu d diametrul interior al conductei, cu $D_M = \dfrac{D+d}{2}$ diametrul mediu al conductei, centrele elementelor Δr, $r\Delta\theta$ (interioare și exterioare) se află dispuse pe cercurile de raze :

$$R_1 = \frac{d}{2} + \frac{D_M - d}{4}, \quad R_2 = \frac{D_M}{2} + \frac{D - D_M}{4}, \tag{4.3}$$

unghiul φ de poziționare a centrului elementului fiind :

$$\varphi = (I-1)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, \tag{4}$$

unde $I = 1, \ldots, 8$.

Coordonatele centrelor elementelor (interioare și exterioare fig. 4.1), cu unghiul φ măsurat în sens trigonometric sînt :

$$y = -R_1 \sin\varphi, \qquad y = -R_2 \sin\varphi,$$

respectiv

$$z = R_1 \cos\varphi, \qquad z = R_2 \cos\varphi,$$

$$x = \begin{cases} (j_1 - 1)\dfrac{l}{3} \Big| n_{des} + \dfrac{l}{6} \Big| n_{des}, & j_1 = 1 \ldots n_{des}, \\ \dfrac{l}{3} + (j_2 - 1)\dfrac{l}{3} \Big| n_{rar} + \dfrac{l}{6} \Big| n_{rar}, & j = 1 \ldots n_{rar}, \\ \dfrac{2l}{3} + (j_3 - 1)\dfrac{l}{3} \Big| n_{des} + \dfrac{l}{6} \Big| n_{des}, & j_3 = 1 \ldots n_{des}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Pentru a putea efectua integrarea tuturor termenilor matricei (4.2) se calculează preliminar o serie de integrale comune :

$$I_1 = \int_{(V)} y\,\mathrm{d}V; \quad I_2 = \int_{(V)} xy\,\mathrm{d}V; \quad I_3 = \int_{(V)} z\,\mathrm{d}V; \quad I_4 = \int_{(V)} xz\,\mathrm{d}V;$$

$$I_5 = \int_{(V)} \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}\,\mathrm{d}V. \quad (4.6)$$

Efectuarea acestora se face prin trecerea lor la coordonate polare și rezultă :

$$I_1 = (x_{i+1} - x_i)\left[\cos\left(I\frac{\pi}{4}\right) - \cos(I-1)\frac{\pi}{4}\right]\frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}, \quad (4.7)$$

unde

$$x_{i+1} - x_i = \frac{l}{3n_{des}},$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{l}{3\,n_{rar}}, \text{ unde } I = 1, \ldots, 8, \quad (4.8)$$

$$\rho_1 = \frac{D+d}{4}; \quad \rho_2 = \frac{D}{2} \text{ (pentru elementul exterior)}, \quad (4.9)$$

$$I_2 = \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2}\,\frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}\left[\cos\left(I\frac{\pi}{4}\right) - \cos(I-1)\frac{\pi}{4}\right], \quad (4.10)$$

unde

$$x_i = (j_1 - 1)\frac{l}{3n_{des}}, \quad j_1 = 1, \ldots, n_{des},$$

$$x_i = \frac{2l}{3} + (j_3 - 1)\frac{l}{3n_{des}}, \quad j_3 = 1, \ldots, n_{des}, \quad (4.11)$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{l}{3n_{des}},$$

respectiv

$$x_i = \frac{l}{3} + (j_2 - 1)\frac{l}{3n_{rar}}, \quad j_2 = 1, \ldots, n_{rar},$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{l}{3n_{rar}}, \tag{4.12}$$

$$\rho_1 = \frac{d}{2}; \quad \rho_2 = \frac{D+d}{4} \text{ (pentru elementul interior)},$$

$$\rho_1 = \frac{D+d}{4}; \quad \rho^2 = \frac{D}{2} \text{ (pentru elementul exterior)},$$

$$I = (1, \ldots, 8),$$

$$I_3 = (x_{i+1} - x_i)\frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}\left[\sin\left(I\frac{\pi}{4}\right) - \sin(I-1)\frac{\pi}{4}\right], \tag{4.13}$$

$$I_4 = \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{2}\frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}\left[\sin\left(I\frac{\pi}{4}\right) - \sin(I-1)\frac{\pi}{4}\right], \tag{4.14}$$

unde notațiile sînt analogice ca în relațiile (4.10).

$$I_5 = (x_{i+1} - x_i)\frac{\pi}{4}\frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}. \tag{4.15}$$

Notînd vectorul forțelor nodale $\underset{\sim}{\overline{F}}^f$ în sistemul local de axe sub forma :

$$\underset{\sim}{\overline{F}}^f = [F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}]^t, \tag{4.16}$$

componentele acestuia integrînd fiecare termen al matricei (4.2), în condițiile menționate mai sus, sînt :

$$F_1 = E\int_{(V)} \Delta\varepsilon_x^c \frac{1}{l}\,dV = E\Delta\varepsilon_x^c \frac{1}{l} V = \Delta\varepsilon_x^c \frac{A_{elem}\, l_{elem}}{l} E, \tag{4.17}$$

unde

$$A_{elem} = \frac{\pi}{4}(D^2 - D_M^2)/8; \quad A_{elem} = \frac{\pi}{4}(D_M^2 - d^2)/8, \tag{4.18}$$

$$l_{elem} = \frac{l}{3}\Big| n_{des}; \quad l_{elem} = \frac{l}{3}\Big| n_{rar},$$

$$F_2 = -E\Delta\varepsilon_x^c \frac{6}{l^2}\left[I_1 - \frac{2}{l} I_2\right], \tag{4.19}$$

$$F_3 = -E\Delta\varepsilon_x^C \frac{6}{l^2}\left[I_3 - \frac{2}{l} I_4\right], \tag{4.20}$$

$$F_4 = G\Delta\gamma_{xy}^C \frac{1}{l} I_5, \tag{4.21}$$

$$F_5 = E\Delta\varepsilon_x^C \frac{4}{l}\left[I_3 - \frac{3}{2l} I_4\right], \tag{4.22}$$

$$F_6 = -E\Delta\varepsilon_x^C \frac{4}{l}\left[I_1 - \frac{3}{2l} I_2\right], \tag{4.23}$$

$$F_7 = -F_1; \quad F_8 = -F_2; \quad F_9 = -F_3; \quad F_{10} = -F_4, \tag{4.24}$$

$$F_{11} = E\Delta\varepsilon_x^C \frac{2}{l}\left[I_3 - \frac{3}{l} I_4\right], \tag{4.25}$$

$$F_{12} = -E\Delta\varepsilon_x^C \frac{2}{l}\left[I_1 - \frac{3}{l} I_2\right]. \tag{4.26}$$

4.2. CALCULUL VECTORULUI FORȚELOR NODALE DIN FLUAJ PENTRU BARA CURBĂ

Matricea $\underset{\sim}{B}$ este dată de relația (3.10), iar matricea $\underset{\sim}{F}$ de relația (4.1).

Efectuînd produsul matriceal $(\underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E})\,\underset{\sim}{\varepsilon}^C$ se obține o matrice de forma:

$$(\underset{\sim}{B}^t \underset{\sim}{E})\,\underset{\sim}{\varepsilon}^C = F[C_{1,1}, C_{2,1}, C_{3,1}, C_{4,1}, C_{5,1}, C_{6,1}, C_{7,1}, C_{8,1}, C_{9,1}, C_{10,1}, C_{11,1}, C_{12,1}]^t, \tag{4.27}$$

în care

$$C_{1,1} = \frac{r_{ii}^{11}\varepsilon_t^C}{EA}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - \frac{r_{ii}^{16} - r_{ii}^{11} R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - \cos\frac{\alpha}{2}\right]}{EI_b}\varepsilon_t^C \bar{n},$$

$$C_{2,1} = \frac{-r_{ii}^{22}\varepsilon_t^C}{EA}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - \frac{r_{ii}^{26} - r_{ii}^{22} R\left[\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)\right]}{EI_b}\varepsilon_t^C \bar{n},$$

$$C_{3,1} = \frac{r_{ii}^{33} R\sin\theta + r_{ii}^{34}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) + r_{ii}^{35}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}{EI_n}\varepsilon_t^C \bar{b} +$$

$$+ \frac{r_{ii}^{33} R(1 - \cos\theta) + r_{ii}^{34}\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) - r_{ii}^{35}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right)}{GI_p}\sqrt{\bar{b}^2 + \bar{n}^2}\,\frac{1}{2(1+\mu)}\gamma_{tn}^C, \tag{4.28}$$

$$C_{4,1}=\frac{r_{ii}^{43}R\sin\theta+r_{ii}^{44}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+r_{ii}^{45}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_n}\varepsilon_i^C\bar{b}+$$

$$+\frac{r_{ii}^{43}R(1-\cos\theta)+r_{ii}^{44}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-r_{ii}^{45}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2}\,\frac{1}{2(1+\mu)}\gamma_{in}^C,$$

$$C_{5,1}=\frac{r_{ii}^{53}R\sin\theta+r_{ii}^{54}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+r_{ii}^{55}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_n}\varepsilon_i^C\bar{b}+$$

$$+\frac{r_{ii}^{53}R(1-\cos\theta)+r_{ii}^{54}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)r_{ii}^{55}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2}\,\frac{1}{2(1+\mu)}\gamma_{in}^C,$$

$$C_{6,1}=\frac{r_{ii}^{61}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-r_{ii}^{62}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EA}-$$

$$-\frac{r_{ii}^{66}-r_{ii}^{61}R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right]-r_{ii}^{62}R\left[\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]}{EI_b}\varepsilon_i^C\bar{n},$$

$$C_{7,1}=\frac{-r_{ii}^{11}\varepsilon_i^C}{EA}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-\frac{-r_{ii}^{16}+r_{ii}^{11}R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right]}{EI_b}\varepsilon_i^C\bar{n},$$

$$C_{8,1}=\frac{r_{ii}^{22}\varepsilon_i^C}{EA}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-\frac{-r_{ii}^{26}+r_{ii}^{22}R\left[\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]}{EI_b}\varepsilon_i^C\bar{n},$$

$$C_{9,1}=\frac{-r_{ii}^{33}R\sin\theta-r_{ii}^{34}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-r_{ii}^{35}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_n}\varepsilon_i^C\bar{b}+$$

$$+\frac{-r_{ii}^{33}R(1-\cos\theta)-r_{ii}^{34}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+r_{ii}^{35}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2}\,\frac{1}{2(1+\mu)}\gamma_{in}^C,$$

$$C_{10,1}=\frac{-r_{ii}^{43}R\sin\theta-r_{ii}^{44}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-r_{ii}^{45}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_n}\varepsilon_i^C\bar{b}+$$

$$+\frac{-r_{ii}^{43}R(1-\cos\theta)-r_{ii}^{44}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+r_{ii}^{45}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2}\,\frac{1}{2(1+\mu)}\gamma_{in}^C,$$

$$C_{11,1} = \frac{-(lr_{ii}^{33}+r_{ii}^{53})R\sin\theta-(lr_{ii}^{34}+r_{ii}^{54})\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-(lr_{ii}^{35}+r_{ii}^{55})\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EI_n}\varepsilon_t^C\bar{b}+$$

$$+\frac{-(lr_{ii}^{33}+r_{ii}^{53})R(1-\cos\theta)-(lr_{ii}^{34}+r_{ii}^{54})\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+(lr_{ii}^{35}+r_{ii}^{55})\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{GI_p}\times$$

$$\times\sqrt{\bar{b}^2+\bar{n}^2}\,\frac{1}{2(1+\mu)}\gamma_{tn}^C,$$

$$C_{12,1} = \frac{-r_{ii}^{61}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)+(-lr_{ii}^{22}+r_{ii}^{62})\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)}{EA}\varepsilon_t^C-$$

$$-\frac{(r_{ii}^{66}-lr_{ii}^{26})+r_{ii}^{61}R\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)-\cos\frac{\alpha}{2}\right]+(-lr_{ii}^{22}+r_{ii}^{62})R\left[\sin\frac{\alpha}{2}-\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\theta\right)\right]}{EI_b}\times$$

$$\times\ \varepsilon_t^C\bar{n}.$$

Pentru a putea efectua integrarea matricei (4.27) pentru un element curb avînd unghiul la centru α se alege o discretizare ca în figura 4.2.

În secțiunea transversală, grosimea cotului conductei se împarte în două ($K = 1, 2$) corespunzător unor unghiuri din 45 în 45°. $\varphi \in \left[(I-1)\frac{\pi}{4}, I\frac{\pi}{4}\right]$, unde $I = 1, \ldots, 8$, obținîndu-se astfel o împărțire a cotului în elemente (fig. 4.2 *b*). Unui element îi corespunde unghiul β egal cu $\alpha/3\ n_{des}$, respectiv $\alpha/3\ n_{rar}$, sau pus sub formă generală :

$$\left[\frac{(j_1-1)\alpha}{3n_{des}}\ ,\ \frac{j_1\alpha}{3n_{des}}\right] \quad \text{pentru } j_1 = 1, \ldots, n_{des},$$

$$\left[\frac{(j_2-1)\alpha}{3n_{rar}}+\frac{\alpha}{3}\ ,\ \frac{j_2\alpha}{3\,n_{rar}}+\frac{\alpha}{3}\right] \quad \text{pentru } j_2 = 1, \ldots, n_{rar}, \tag{4.29}$$

$$\left[\frac{(j_3-1)\alpha}{3n_{des}}+\frac{2\alpha}{3}\ ,\ \frac{j_3\alpha}{3n_{des}}+\frac{2\alpha}{3}\right] \quad \text{pentru } j_3 = 1, \ldots, n_{des}.$$

Un unghi curent θ se pune sub forma :

$$\theta = \theta' + \beta,$$

unde

$$\theta' = (j_{1(2,3)}-1)\frac{\alpha}{3n_{\substack{des\\(rar)}}}+(n_{tr}-1)\frac{\alpha}{3}\ , \tag{4.29'}$$

unde n_{tr} se citește „număr treime", avînd valorile 1, 2, 3.

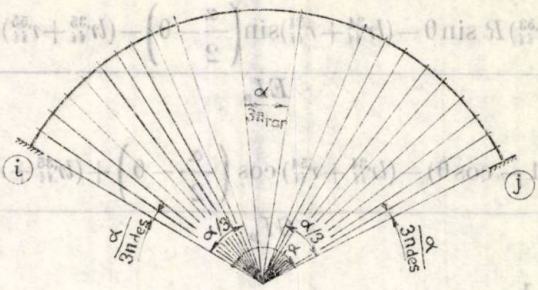


Fig. 4.2

Procedînd ca la bara dreaptă, se calculează mai întîi o serie de integrale generale

$$J_1 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos\beta \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta' - \beta\right) d\beta = \frac{1}{2}\beta_2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta'\right) + \frac{1}{4}\sin\left(2\beta_2 - \frac{\alpha}{2} + \theta'\right) - \frac{1}{4}\sin\left(-\frac{\alpha}{2} + \theta'\right), \quad (4.30)$$

$$J_2 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos\beta \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta' - \beta\right) d\beta = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1)\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta'\right) + \frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta' - 2\beta_2\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \theta' - 2\beta_1\right)\right] \quad (4.31)$$

$$J_3 = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin(\theta' + \beta)\cos\beta d\beta = -\frac{1}{4}[\cos(\theta' + 2\beta_2) - \cos(\theta' + 2\beta_1)] + \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\sin\theta'. \tag{4.32}$$

Aranjind vectorul forțelor nodale în sistemul local de axe sub forma :

$$\underset{\sim}{F}^l = [F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots, F_{12}]^t \tag{4.33}$$

și folosind (4.28), (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) rezultă :

$$F_1 = A_1 - B_1 \tag{4.34}$$

unde

$$A_1 = \frac{R\, r_{ii}^{11}\, \Delta\varepsilon_t^C}{A} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) J_1, \tag{4.35}$$

$$B_1 = \frac{\Delta\varepsilon_t^C}{I_b}[B_{1,1} + B_{1,2}], \tag{4.36}$$

$$B_{1,1} = -R\, d_1 \sin\beta_2(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)\frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}, \tag{4.36'}$$

$$B_{1,2} = \left[R^2 d_2 \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)\right]\left[J_1 - \cos\frac{\alpha}{2}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)\right] \tag{4.36''}$$

$$(d_1 = r_{ii}^{1,6}; \quad d_2 = r_{ii}^{1,1}),$$

$$F_2 = A_2 - B_2, \tag{4.37}$$

$$A_2 = -\frac{r_{ii}^{22}\, R\, \Delta\varepsilon_t^C}{A} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} \frac{\pi}{4} J_2 \tag{4.37'}$$

$$B_2 = B_{21} + B_{22} \tag{4.37''}$$

$$B_{21} = \frac{\Delta\varepsilon_t^C C_1 R}{I_b} \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1), \tag{4.37'''}$$

$$B_{2,2} = \frac{C_2 R^2 \Delta\varepsilon_t^C}{I_b}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)\frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}\left[\sin\frac{\alpha}{2}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1) - J_2\right] \tag{4.37^{IV}}$$

$$(C_1 = r_{ii}^{26}; \quad C_2 = r_{ii}^{2,2}),$$

$$F_3 = A_3 + B_3. \tag{4.38}$$

Întrucît integralele F_3, F_4 și F_5 au formă asemănătoare, se notează :

	$L_a F_3$	$L_a F_4$	$L_a F_5$
a_1	$r_{ii}^{33} R$	$r_{ii}^{43} R$	$r_{ii}^{53} R$
a_2	r_i^{34}	r_{ii}^{44}	r_{ii}^{54}
a_3	r_{ii}^{35}	r_{ii}^{45}	r_{ii}^{55}

(4.39)

$$A_3 = A_{3.1} + A_{3,2} + A_{3,3}, \tag{4.40}$$

$$A_{3,1} = \frac{R\, a_1 \Delta \varepsilon_i^C}{I_n} \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)\, J_3, \tag{4.40'}$$

$$A_{3,2} = \frac{a_2 \Delta \varepsilon_i^C R}{I_n} \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) J_2, \tag{4.40''}$$

$$A_{3,3} = \frac{R a_3 \Delta \varepsilon_i^C}{I_n} \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) J_1, \tag{4.40'''}$$

$$B_3 = B_{3,1} + B_{3,2} + B_{3,3}, \tag{4.41}$$

$$B_{3,1} = \frac{a_1 \Delta \gamma_{in}^C R}{I_p} \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1) \frac{\pi}{4} - B'_{3,1}\Big] \tag{4.41'}$$

unde

$$B'_{3,1} = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} \frac{\pi}{8} \left[\frac{\sin(\theta' + 2\beta_2) - \sin(\theta' + 2\beta_1)}{2} + (\beta_2 - \beta_1) \cos \theta') \right],$$

$$B_{3,2} = \frac{a_2 \Delta \gamma_{in}^C R}{I_p} \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} \frac{\pi}{4} J_1, \tag{4.41''}$$

$$B_{3,3} = \frac{-\, a_3 \Delta \gamma_{in}^C R}{I_p} \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3} \frac{\pi}{4} J_2. \tag{4.41'''}$$

Componentele F_4, F_5 se determină asemănător, prin apelări în funcție de a_1, a_2, a_3,

$$F_6 = A_6 - B_6 - C_6, \tag{4.42}$$

$$A_6 = \frac{\Delta \varepsilon_i^C R}{A} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2} \frac{\pi}{4} [r_{ii}^{66} J_1 - r_{ii}^{62} J_2], \tag{4.42'}$$

$$B_6 = B_1 \text{ (pentru } d_1 = r_{ii}^{66};\ d_2 = r_{ii}^{61}), \tag{4.42''}$$

$$C_6 = B_{22} \text{ (pentru } C_2 = r_{ii}^{66}), \tag{4.42'''}$$

$$F_7 = -F_1;\ F_8 = -F_2;\ F_9 = -F_3;\ F_{10} = -F_4, \tag{4.43}$$

$$F_{11} = -F_5 - lF_3;\ \left(l = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\right), \tag{4.44}$$

$$F_{12} = -F_6 + lF_2;\ \left(l = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\right). \tag{4.45}$$

5. ALEGEREA INCREMENTULUI DE TIMP

Conform literaturii tehnice de specialitate cercetate [6, 22] reuşite procedurii incrementale pentru rezolvarea problemelor de fluaj depinde de alegerea intervalelor de timp alocate.

De fapt, alegerea intervalelor de timp depinde de forma specifică a legii de fluaj care este folosită.

De exemplu, se consideră următoarea lege de fluaj :

$$\Delta\varepsilon_e^C = K\sigma_e^n\,\Delta t. \tag{5.1}$$

Deoarece primul pas al procedurii incrementale este soluţia problemei elastice, valorile elastice pentru deformaţiile efective sînt cunoscute pentru fiecare element finit :

$$\varepsilon_e^E = \frac{1}{E}\,\sigma_e. \tag{5.2}$$

Deci incrementul iniţial de timp poate fi găsit considerînd deformaţia iniţială din fluaj egală cu o fracţie (η_0) din valoarea maximă a deplasării efective elastice [6, 22] :

$$\Delta\varepsilon_{e1}^C = \eta_0(\varepsilon_e^E)_{max}. \tag{5.3}$$

Egalînd (5.1) cu (5.3), se obţine

$$\Delta t_1 = \frac{\eta_0}{EK\,\sigma_e^{n-1}}, \tag{5.4}$$

unde conform [22] η_0 trebuie să îndeplinească condiţia :

$$1/25 \leqslant \eta_0 \leqslant 1/10. \tag{5.5}$$

Această condiţie limitează incrementul maxim de timp care poate fi folosit şi conduce la asigurarea convergenţei soluţiei.

6. CONCLUZII

1. Calculul la fluaj al sistemelor de conducte reprezintă o problemă deosebit de complexă. Problema prezintă aspecte deosebite atît în ceea ce priveşte legile deformaţiilor de fluaj cît şi în ceea ce priveşte calculul efor-

turilor ca urmare a fenomenului de fluaj. Structurile multiplu static nedeterminate, cum sînt sistemele de conducte necesită un mare volum de calcule chiar și în domeniul elastic. În cazul fluajului care constituie o problemă neliniară, dificultățile devin cu mult mai mari.

2. Lucrarea de față prezintă un algoritm pentru calculul la fluaj al sistemelor de conducte, care ține seama atît de caracteristicile la fluaj ale materialelor, cît și de comportarea la fluaj a structurilor, problemă deosebit de complexă care necesită cunoașterea variației deformațiilor în timp, în condiții de legături restrictive, a oricărui punct din structură.

Algoritmul elaborat se bazează pe metoda elementelor finite adoptate corespunzător pentru stabilirea în orice moment a deformațiilor de fluaj.

Evaluînd pentru fiecare increment de timp deformațiile de fluaj, în care tensiunile se consideră constante, se stabilesc forțe echivalente în nodurile structurii și prin aplicarea metodei deplasărilor se determină variația deplasărilor nodurilor structurii.

Repetînd succesiv etapele de calcul (determinarea deformațiilor de fluaj, variația deplasărilor nodurilor și tensiunile finale după fiecare interval de timp), se ajunge la obținerea deplasărilor și tensiunilor la orice timp și în consecință la aprecierea stării de deformații și tensiuni, în condiții de fluaj pe durata de funcționare a unei structuri.

3. Algoritmul pentru calculul la fluaj a sistemelor de conducte prezintă anumite avantaje dintre care amintim : simplitatea sistemului de ecuații, posibilitatea folosirii unor legi diferite de fluaj, rezolvarea în trepte liniare a problemei neliniare de fluaj etc.

4. Algoritmul elaborat este transpus într-un program denumit „Calculul la fluaj al sistemelor de conducte" (prescurtat C.F.S.C.) scris în limbaj FORTRAN și aplicabil calculatoarelor FELIX, care va fi prezentat într-o lucrare viitoare.

Primită la redacție la 12 august 1985

BIBLIOGRAFIE

1. A. V. BURLACOV, *Polzucesti tonkih obolocek*, Harkov, 1977.
2. A. V. BURLACOV, *Osnovi teorii plasticinosti i polzucesti*, Harkov, Izdatelstvo horcovscogo universiteta, 1969.
3. D. D. CIOCLOV, *Recipiente sub presiune*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1983.
4. A. CONSTANTINESCU, ș.a. *Fluajul metalelor*, Edit. tehnică, Buucrești, 1970.
5. F. GAROFALO, *Deformation et rupture par fluage*, Dunod, Paris, 1970.
6. G. A. GREENBAUM, M. F. RUBINSTEIN, *Creep analysis of axisymmetric budies using finite elements*, *Pressure vessels and piping : Design and analysis, vol. I. Analysis for design*, New York, ASME, 1972, p. 467–485.
7. ȘT. ISPAS, ș.a., *Mecanica construcțiilor aerospațiale*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1978.
8. V. JINESCU, *Calculul și construcția utilajului chimic, petrochimic și de rafinării*, F.D.P., 1983.
9. V. JINESCU, *Utilaj tehnologic pentru industrii de proces*, vol. II, Edit. tehnică, București, 1984.
10. V. JINESCU, N. PĂUNESCU, *Calculul mașinilor și aparatelor industriei chimice care lucrează la temperaturi ridicate sau la temperaturi coborîte (I)*, Revista de Chimie, **25**, 3 (1974).

11. V. JINESCU, MARILENA BEER, *Calculul învelişurilor şi corpurilor sferice la funcţionarea în condiţii de fluaj*, Revista de Chimie, **27**, 4 (1976).
12. M. B. KONCHI, O. C. ZIENKIEWICZ, D.J. OWEN, *The viscoplastic approach to problems of plasticity and creep involving geometric non linear effects.*
13. I. A. ODING, ş.a., *Creep and streess relaxation in metals*, Oliver and Boyd, Edinburg and London.
14. AL. PAVEL, *Elemente de inginerie mecanică (pentru petrochimie)*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti.
15. BAZIL POPA, ş.a., *Solicitări termice în construcţia de maşini*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1978.
16. N. POPESCU, *Fluajul şi materialele rezistente la temperaturi ridicate*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1958.
17. S. D. PONOMARIOV, ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini, vol. II* (traducere din limba rusă), Edit. tehnică, Bucureşti, 1963.
18. N. POSEA, AL. ANGHEL, C. KROMEK, *Calculul static al sistemelor de conducte*, St. cerc. mec. apl., 6 (1980).
19. N. POSEA, AL. ANGHEL, N. GRIGORE, *Cercetări privind elaborarea unui algoritm pentru calculul la fluaj al conductelor specifice industriei petrochimice*, Lucrare de contract de cercetare, nr. 10, (1982).
20. N. POSEA, AL. ANGHEL, N. GRIGORE, *Elaborarea unui algoritm şi program pentru calculul la fluaj al unor conducte specifice industriei petrochimice*, Lucrare de contract de cercetare nr. 24 (1983).
21. M. RENERT şi G. TĂNASE, *Calculul şi construcţia utilajului chimic*, vol. I., F.D.P., Bucureşti, 1964.
22. W. H. SUTHERLAND, *Finite element computer code for creep analysis of plane stress, plane strain and axisymmetric bodies.*, Nuclear engineering and design, **11**, p. 269—285 (1970).
23. * * * — A.P.I. R.P. 530. — *Recomanded practice calculation of heater — tube thickness in petroleum rafinery piping*, October, 1958, New-York.
24. * * * — *Instrucţiuni tehnice pentru controlul fluajului şi modificărilor structurale ale oţelurilor conductelor şi supraîncălziloarelor de abur C 26—67*, Editura de stat pentru imprimate şi publicaţii, 1968.
25. * * * — *Norma tehnică românească NTR 10101*, Capitolul F, Bucureşti.

CALCULUL GEOMETRIC AL TRANSMISIEI CU CUPLAJE TRIPODE. I

de NICOLAE I. PANDREA

Institutul de învățămînt superior Pitești

În lucrare se studiază proprietățile geometric ale mecanismelor cu cuplaje tripode. În acest scop se analizează cupla cinematică tripodă determinîndu-se cu ajutorul unghiurilor lui Euler relațiile analitice de legătură între parametrii cinematici precum și condițiile geometrice optime pentru realizarea cuplajelor unghiulare. Se studiază geometria mecanismelor simple cu cuplaje tripode pentru care se determină relații exacte precum și relații aproximative de calcul.

1. INTRODUCERE

Cuplajul tripod datorită calităților sale cinematice și statice este folosit pe o scară largă [2] în construcția de autoturisme (Renault, Peugeut, Citroen, Dacia), în construcția de utilaje grele, precum și în transmiterea mișcării de la pompele hidrostatice [3].

Utilizarea cuplajului tripod la realizarea unor variate tipuri de mașini și utilaje a făcut ca o serie de lucrări teoretice de specialitate sau brevete de invenții, să fie destinate studiului cinematic [1], [2], [3], și dinamic[2], precum și studiului pentru determinarea unor soluții constructive optime.

Deși la început, cuplajul tripod a fost utilizat numai drept cuplaj axial-unghiular, în variantele moderne acesta poate îndeplini și rolul de cuplaj unghiular astfel încît în construcția unor automobile (Dacia 1300, Renault) transmisiile sînt realizate numai cu cuplaje tripode.

În lucrările de specialitate publicate [1], [2], [3] se tratează în principal aspecte cinematice ale cuplajului tripod unghiular-axial asimilînd pentru studiul transmisiei, cuplajul unghiular tripod cu un cuplaj sferic.

Din lucrarea [2] se desprinde însă ideea că la realizarea transmisiei tripode duble, cuplajul unghiular tripod nu poate avea drept corespondent un cuplaj unghiular sferic.

În prezenta lucrare se vor studia mai întîi unele proprietăți ale cuplei cinematice tripode, iar pe baza acestora se vor determina condițiile geometrice optime pentru realizarea cuplajului unghiular tripod.

În continuare se vor studia mecanismele simple, iar în partea finală se va prezenta analiza poziționalã a modelului general de transmisie cu cuplaje tripode.

2. STUDIUL CUPLEI CINEMATICE TRIPODE

2.1. ASPECTE GENERALE

În sensul cel mai general, cupla cinematică tripodă rezultă prin legarea în paralel [2] a trei cuple pentamobile. Analiza variantelor care rezultă din această definiție este riguros realizată în lucrarea [2].

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 2, 1986, P. 168—188

În prezenta lucrare ne vom ocupa numai de cupla tripodă cu schema cinematică din figura 1*a*. O variantă constructivă a acestei cuple cinematice este prezentată în figura 1*b*.

Modelul constructiv din figura 1*b*, se realizează din corpul cilindric *1* (laleaua) prevăzut cu trei canale cilindrice paralele cu axa de simetrie a acestuia, dispuse la 120° și din corpul *2* cu trei brațe (tripoda) pe care culisează sferele (galeții) A_1, A_2, A_3.

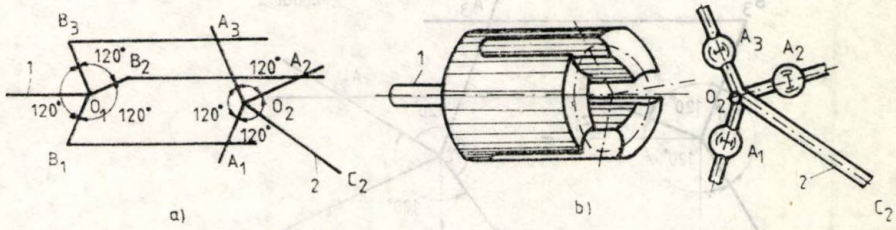


Fig. 1. — Cuplajul tripod : *a* — schema cinematică, *b* — schema constructivă.

Prin asamblarea părților componente, sferele intră în canalele cilindrice din lalea și se obține cuplajul tripod cu galeți sferici.

Pentru schema cinematică ce corespunde modelului constructiv, ținînd seama de notațiile din figura 1*a*, rezultă :

$$A_1B_1 \,||\, A_2B_2 \,||\, A_3B_3,$$

$$A_1B_1 \perp O_1B_1\,;\; A_2B_2 \perp O_1B_2\,;\; A_3B_3 \perp O_1B_3, \tag{1}$$

$$\sphericalangle B_1O_1B_2 = \sphericalangle B_2O_1B_3 = \sphericalangle B_3O_1B_1 = 120°,$$

$$A_1O_2 \perp O_2C_2\,;\; A_2O_2 \perp O_2C_2\,;\; A_3O_2 \perp O_2C_2\,;$$

$$\sphericalangle A_1O_2A_2 = \sphericalangle A_2O_2A_3 = \sphericalangle A_3O_2A_1 = 120°.$$

2.2. RELAȚII ÎNTRE PARAMETRII CARE DEFINESC POZIȚIA RELATIVĂ A CELOR DOUĂ CORPURI

Se consideră sistemele de referință $O_1X_1Y_1Z_1$, $O_2X_2Y_2Z_2$ atașate celor două corpuri care formează cupla cinematică (fig. 2). Alegerea acestor sisteme se face astfel încît axa O_1Z_1 este paralelă cu brațele B_iA_i, axa O_1X_1 coincide cu brațul O_1B_1, axa O_2Z_2 coincide cu axa tripodei, iar axa O_2X_2 coincide cu brațul O_2A_1.

Pentru determinarea relațiilor matematice se folosesc notațiile :

r — lungimea brațelor ($O_1B_1 = O_1B_2 = O_1B_3 = r$); ξ, η, ζ — coordonatele punctului O_2 față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$, λ_i, μ_i — lungimea distanțelor B_iA_i, respectiv O_2A_i; (α_1, β_1, γ_1); (α_2, β_2, γ_2); (α_3, β_3, γ_3) — cosinusurile directoare ale axelor O_2x_2, O_2y_2, O_2z_2 față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$; ($x_1y_1z_1$), ($x_2y_2z_2$) — coordonatele unui punct oarecare M față de sistemele de referință, $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$.

Legătura între coordonatele unui punct în cele două sisteme rezultă din relația matriceală :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

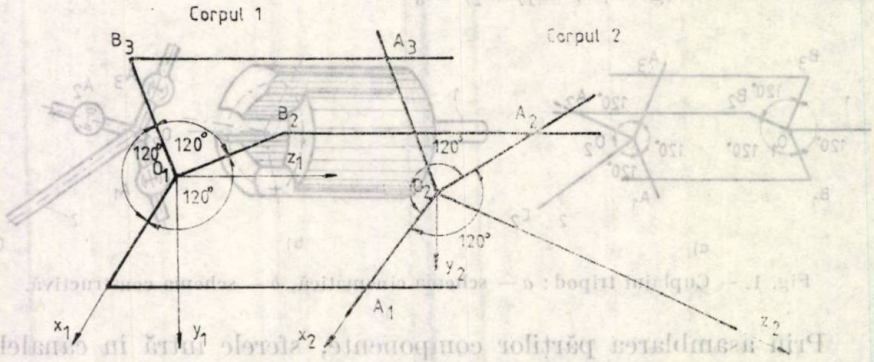


Fig. 2. — Sistemele de referință ale cuplei cinematice tripode.

Un punct A_i de intersecție a brațelor, în sistemele de referință $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$ va avea coordonatele,

$$(r\cos\delta_i,\ r\sin\delta_i,\ \lambda_i);\quad (\mu_i\cos\delta_i,\ \mu_i\sin\delta_i,\ 0). \tag{3}$$

unde

$$\delta_i = \frac{2}{3}(i-1)\pi, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Înlocuind coordonatele (3) în relația (2), rezultă :

$$r\cos\delta_i = \xi + \mu_i(\alpha_1\cos\delta_i + \alpha_2\sin\delta_i), \tag{5}$$

$$r\sin\delta_i = \eta + \mu_i(\beta_1\cos\delta_i + \beta_2\sin\delta_i), \tag{6}$$

$$\lambda_i = \zeta + \mu_i(\gamma_1\cos\delta_i + \gamma_2\sin\delta_i). \tag{7}$$

Dacă din relațiile (5), (6) se elimină μ_i se obține relația :

$$\xi(\beta_1\cos\delta_i + \beta_2\sin\delta_i) - \eta(\alpha_1\cos\delta_i + \alpha_2\sin\delta_i) =$$

$$= \frac{r}{2}[\beta_1 - \alpha_2 + (\beta_1 + \alpha_2)\cos 2\delta_i + (\beta_2 - \alpha_1)\sin 2\delta_i]. \tag{8}$$

Ținînd seama de relațiile evidente,

$$\sum_{i=1}^{3}\sin\delta_i = \sum_{i=1}^{3}\cos\delta_i = \sum_{i=1}^{3}\sin 2\delta_i = \sum_{i=1}^{3}\cos 2\delta_i = 0 \tag{9}$$

și sumînd relațiile (8) se obține condiția :

$$\alpha_2 = \beta_1. \tag{10}$$

Sumînd și scăzînd relațiile (8) pentru $i = 2, 3$ rezultă sistemul,

$$\left.\begin{aligned} \xi\beta_1 - \eta\alpha_1 &= r\beta_1, \\ \xi\beta_2 - \eta\alpha_2 &= \frac{r}{2}(\alpha_1 - \beta_2), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

din care se obține :

$$\xi = \frac{r}{2\gamma_3}[-2\beta_1 \cdot \alpha_2 + \alpha_1(\alpha_1 - \beta_2)], \tag{12}$$

$$\eta = \frac{r\beta_1}{2\gamma_3}(\alpha_1 - 3\beta_2). \tag{13}$$

Relațiile (10) (12) (13) arată că între parametrii care definesc poziția relativă a sistemului $O_2x_2y_2z_2$ față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$ există trei relații de legătură și deci cupla cinematică tripodă este de clasa a treia.

2.3. EXPRIMAREA PARAMETRILOR DE POZIȚIE CU AJUTORUL UNGHIURILOR LUI EULER

Parametrii independenți care definesc poziția corpului *2* față de corpul *1* (fig. 2) se pot exprima cu ajutorul unghiurilor lui Euler.

Pentru aceasta se consideră sistemul mobil $O_2x_1'y_1'z_1'$ (fig. 3) avînd axele paralele cu axele sistemului $O_1x_1y_1z_1$ atașat de corpul *2*. Față de acest sistem se consideră axa nodurilor O_2N ce rezultă la intersecția planelor $O_2x_1'y_1'$, $O_2x_2y_2$.

Se definesc astfel unghiurile de precesie, nutație, rotație proprie, notate în figura 3 cu ψ, γ, φ.

Cu ajutorul unghiurilor ψ, γ, φ, matricea de rotație $[T_{21}]$ a sistemului $O_2x_2y_2z_2$ față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$, [7] se scrie :

$$[T_{21}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \tag{14}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\gamma & & & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\gamma & & & \sin\psi\sin\gamma \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\gamma & & & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\gamma & & & -\cos\psi\sin\gamma \\ \sin\varphi\sin\gamma & & & \cos\varphi\sin\gamma & & & \cos\gamma \end{array}\right].$$

Ținînd seama de relația matriceală (14), din condiția (10) se obține :

$$(1 + \cos\gamma)\sin(\varphi + \psi) = 0 \tag{15}$$

şi cum în general $\gamma \neq \pi$, rezultă că egalitatea (15) este îndeplinită dacă

$$\psi = -\varphi. \tag{16}$$

Ţinînd seama de relaţia (16), matricea de rotaţie $[T_{21}]$ devine:

$$[T_{21}] = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos\gamma & -\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\gamma) & -\sin\varphi\sin\gamma \\ -\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\gamma) & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos\gamma & -\cos\varphi\sin\gamma \\ \sin\varphi\sin\gamma & \cos\varphi\cos\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}, \tag{17}$$

iar coordonatele ξ, η din (12) (13) se scriu:

$$\xi = \frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}(\cos 3\varphi\cos\varphi + \cos\gamma\sin 3\varphi\sin\varphi), \tag{18}$$

$$\eta = \frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}(-\cos 3\varphi\sin\varphi + \cos\gamma\sin 3\varphi\cos\varphi). \tag{19}$$

Poziţia sistemului $O_2x_2y_2z_2$ faţă de sistemul $O_1x_1y_1z_1$ este dată de coordonatele punctului $O_2(\xi, \eta, \zeta)$ şi de unghiurile ψ, γ, φ. Cum între acestea există relaţiile (16), (18), (19), rezultă că independenţi sînt numai parametrii φ, γ, ζ, şi deci cupla tripodă are trei grade de mobilitate.

Faptul că distanţa ζ de la punctul O_2 la planul $O_1y_1x_1$ reprezintă un parametru independent, arată că cupla tripodă se poate utiliza drept cuplaj axial unghiular.

În notaţia matriceală, coordonatele punctului O_2 se pot exprima prin relaţia

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}\cos 3\varphi \\ \frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}\cos\gamma\sin 3\varphi \\ \zeta \end{bmatrix}. \tag{20}$$

2.4. PROPRIETĂŢI GEOMETRICE ALE TRAIECTORIILOR RELATIVE DESCRISE DE PUNCTUL O_2

După cum se va arăta, cuplajul tripod în variantele sale constructive realizează variaţii foarte mici pentru unghiul γ astfel încît ipoteza $\gamma =$ constant poate furniza o primă aproximaţie pentru imaginea generală a funcţionării acestuia.

În această situaţie coordonatele ξ, η depind numai de parametrul φ şi deci punctul O_2 descrie o suprafaţă cilindrică cu generatoarea paralelă cu axa O_1z_1 (fig. 3).

Proiecția acestei suprafețe pe planul $O_1x_1y_1$ este identică cu curba obținută prin secționarea suprafeței cilindrice cu planul $\zeta = \text{const.}$

Rezultă de aici că traiectoriile relative $\gamma = \text{const.}$, $\zeta = \text{const.}$ descrise de punctul O_2 în mișcarea relativă față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$ sînt de mare importanță în stabilirea unor proprietăți generale de funcționare a cuplajelor tripode.

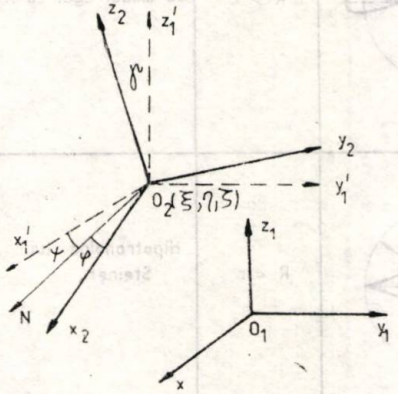


Fig. 3. — Definirea poziției relative a celor două corpuri cu ajutorul unghiurilor lui Euler.

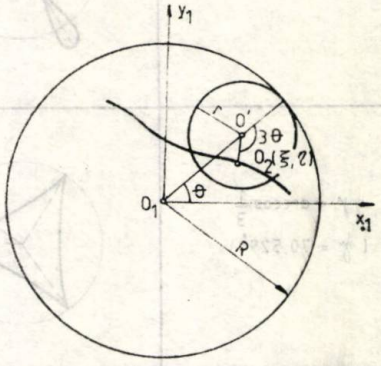


Fig. 4. — Generarea hipotrohoidei.

Scriind relațiile (18) (19) sub forma

$$\xi = \frac{r(1 - \cos^2\gamma)}{4\cos\gamma}\cos 2\varphi + \frac{r(1 - \cos\gamma)^2}{4\cos\gamma}\cos 4\varphi, \tag{21}$$

$$\eta = \frac{r(1 - \cos^2\gamma)}{4\cos\gamma}\sin 2\varphi - \frac{r(1 - \cos\gamma)^2}{4\cos\gamma}\sin 4\varphi,$$

se deduce că acestea reprezintă ecuațiile unei hipotrohoide cu modulul egal cu trei.

Într-adevăr, considerînd cercul cu centrul O_1 de rază R în interiorul căruia se rostogolește fără alunecare cercul de rază $r^* = \frac{R}{3}$ cu centrul O', rezultă că punctul O_2 aparținînd cercului mobil situat la distanța h de centrul acestuia, în sistemul de coordonate din figura 4, are ecuațiile parametrice :

$$\xi = \frac{2R}{3}\cos\theta + h\cos 2\theta, \tag{22}$$

$$\eta = \frac{2R}{3}\sin\theta - h\sin 2\theta. \tag{23}$$

Comparînd relațiile (21) cu (22), (23), rezultă :

$$R = \frac{3r(1 - \cos^2\gamma)}{8\cos\gamma}; \quad h = \frac{r(1 - \cos\gamma)^2}{4\cos\gamma}; \quad \theta = 2\varphi. \tag{24}$$

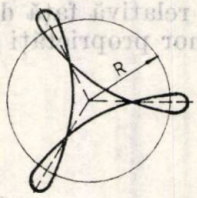
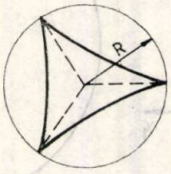
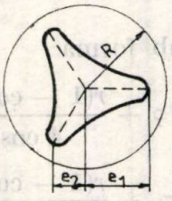
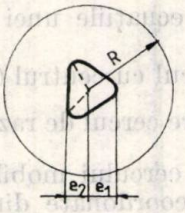
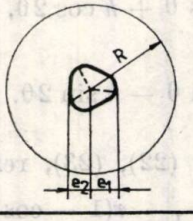
μ	Figura	Condiții	Denumirea
$\arccos\frac{1}{3} < \mu < \frac{\pi}{2}$ $(70,529^\circ < \mu < 90^\circ)$		$R > r$	Hipotrohoida alungită de modul egal cu trei
$\mu = \arccos\frac{1}{3}$ $(\mu = 70,529^\circ)$		$R = r$	Hipotrohoida lui Steiner
$\mu > \arccos\frac{2}{5}$ $(\mu > 66,422^\circ)$		$\frac{2}{5}r < R < r$ $\frac{r}{3} < e_1 < r$ $\frac{r}{5} < e_2 < \frac{r}{3}$	Hipotrohoida scurtată de modul egal cu trei
$\mu < \arccos\frac{1}{3}$ $(\mu < 70,529^\circ)$	$\mu = \arccos\frac{2}{5}$ $(\mu = 66,422^\circ)$		$R = \frac{2}{5}r$ $e_1 = \frac{r}{3}$ $e_2 = \frac{r}{5}$
	$\mu < \arccos\frac{2}{5}$ $(\mu < 66,422^\circ)$		$R < \frac{2}{5}r$ $e_1 < \frac{r}{3}$ $e_2 < \frac{r}{5}$

Fig. 5. — Diferite cazuri de curbe descrise de proiecția punctului O_2 pe planul $O_1x_1y_1$.

Faptul că argumentul θ este dublul argumentului φ arată că atunci cînd unghiul φ ia valori între 0°, 180° punctul O_2 parcurge în întregime hipotrohoida și deci la variația unghiului φ între 0°, 360° punctul O_2 parcurge de două ori în același sens hipotrohoida.

Dacă raza polară se notează cu ρ, rezultă :

$$\rho = \frac{r(1 - \cos\gamma)}{2\cos\gamma}\sqrt{\cos^2 3\varphi + \cos^2\gamma \sin^2 3\varphi}. \tag{25}$$

Valorile extreme ale razei polare sînt :

$$\rho_{max} = e_1 = \frac{r(1 - \cos\gamma)}{2\cos\gamma}; \quad \rho_{min} = e_2 = \frac{r(1 - \cos\gamma)}{2}. \tag{26}$$

Diferite cazuri de reprezentare a acestor hipotrohoide sînt prezentate în figura 5.

Din analiza acestor cazuri rezultă că atunci cînd $\gamma > \text{arc cos } 1/3$, punctul O_2 iese în afara cercului de rază r. Din punct de vedere constructiv această condiție este imposibil de realizat și deci o primă limitare a unghiului γ este dată de această condiție, adică

$$\gamma < \arccos\frac{1}{3}. \tag{27}$$

2.5. STABILIREA CONDIȚIEI GEOMETRICE OPTIME PENTRU REALIZAREA CUPLAJULUI UNGHIULAR TRIPOD

Cuplajul unghiular, prin definiție [2] transmite mișcarea între doi arbori ale căror axe, permanent concurente, formează un unghi în general variabil.

În cazul utilizării cuplei tripode pentru construirea unui cuplaj unghiular, condiția ca axele să fie concurente nu poate fi îndeplinită. În această situație este necesar a determina condiția pentru care distanța între cele două axe este minimă.

Formulînd în alt mod condiția cerută rezultă că este necesar a determina variația parametrului ζ astfel încît distanța dintre un punct M al axei O_2z_2 (figura 6) și un punct O' al axei O_1z_1, să fie minimă.

Notînd distanța O_2M cu b, distanța O_1O' cu c și ținînd seama de matricea de poziție $[T_{21}]$ dată prin relația (17), coordonatele punctului M în sistemul de axe $O_1x_1y_1z_1$ sînt,

$$x_M = \xi - b \sin\varphi \sin\gamma, \tag{28}$$

$$y_M = \eta - b \cos\varphi \sin\gamma, \tag{29}$$

$$z_M = \zeta + b \cos\gamma. \tag{30}$$

astfel încît distanţa $O'M$ se scrie :

$$O'M = \sqrt{(\xi - b \sin \varphi \sin \gamma)^2 + (\eta - b \cos \varphi \sin\gamma)^2 + (\zeta - c + b \cos \gamma)^2}. \tag{31}$$

Înlocuind coordonatele ξ, η cu expresiile din (18), (19) şi egalînd cu zero derivata în raport cu φ a funcţiei (31), rezultă ecuaţia :

$$\cos 3\varphi \left(r \frac{1 - \cos \gamma}{2 \cos \gamma} \sin \gamma \sin 3\varphi + b \cos\gamma \right) = 0. \tag{32}$$

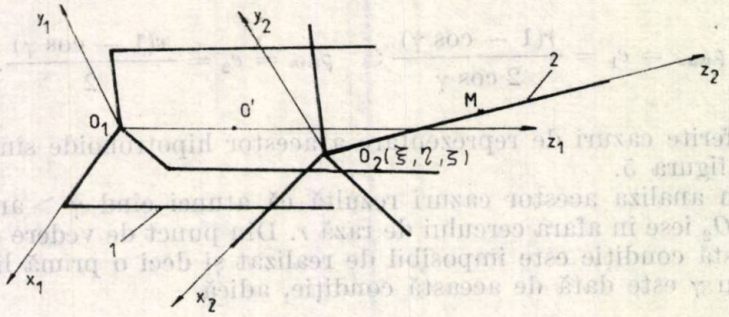


Fig. 6. — Determinarea condiţiei geometrice optime pentru realizarea cuplajului unghiular tripod.

În mod analog, dacă se consideră variabila ζ se obţine :

$$\zeta - c + b \cos \gamma = 0. \tag{33}$$

Corespunzător soluţiilor ecuaţiilor (32), (33) rezultă valorile extreme :

$$(O'M)_{min} = \left| \frac{r(1 - \cos \gamma)}{2} \pm b \sin \gamma \right|, \tag{34}$$

$$(O'M)_{max} = \sqrt{\frac{r^2(1 - \cos \gamma)^2}{4 \cos^2\gamma} + b^2}. \tag{35}$$

Se deduce de aici că variaţia diferenţei, $(O'M)_{max} - (O'M)_{min}$, este minimă, dacă

$$b = 0 ; \quad \zeta = c. \tag{36}$$

Aceasta înseamnă că distanţa minimă ce se poate realiza între două puncte situate pe axele O_1z_1, O_2z_2 este distanţa $O'O_2$ care are variaţie minimă dacă punctul O_2 rămîne situat într-un plan paralel cu planul $x_1O_1y_1$.

Constructiv această condiţie se poate realiza cu ajutorul unei cuple bilaterale de tip sferă-plan, planele care mărginesc sfera fiind solidarizate de corpul *1* şi paralele cu planul $O_1x_1y_1$ (fig. 7), iar sfera fiind solidarizată de corpul *2* şi cu centrul în punctul O_2.

În timpul funcționării cuplajului, sfera cu centrul în punctul O_2 rămîne în contact cu planele (P_1), (P_2), iar punctele de contact Q_1, Q_2 cu planele ce descriu traiectorii identice cu cea descrisă de punctul O_2.

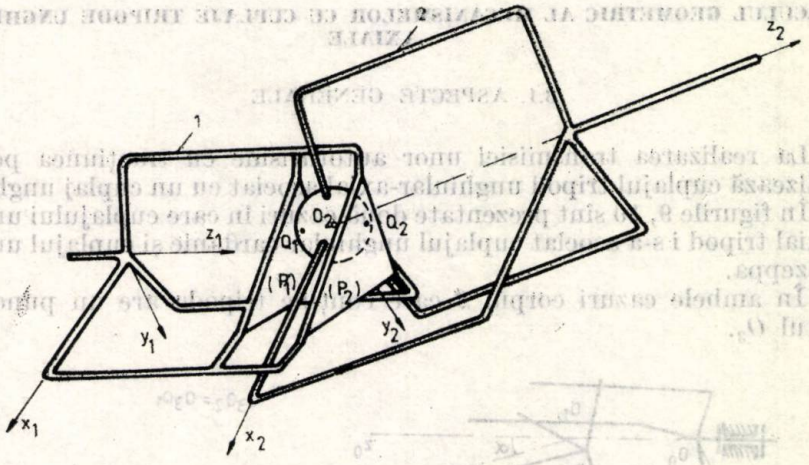


Fig. 7. — Schemă constructivă optimă de cuplaj tripod unghiular.

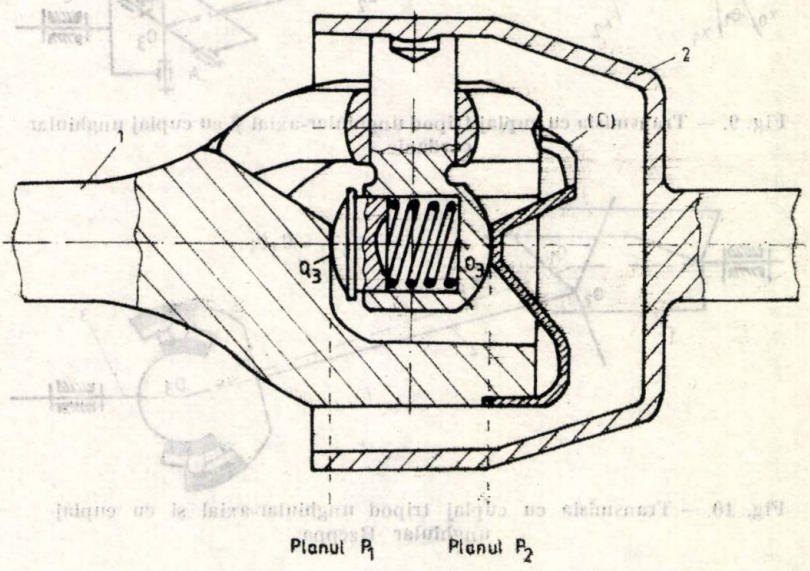


Fig. 8. — Varianta constructivă de cuplaj tripod unghiular utilizat la transmisia autoturismului DACIA—1300 (Sfera S este mărginită pe planele P_1 și P_2).

Situația prezentată în figura 7 o regăsim la cuplajul unghiular tripod, folosit în construcția automobilului Dacia 1300.

Detaliile constructive de principiu ale unui astfel de cuplaj sînt prezentate în figura 8.

Se constată că planul (P_1) se asimilează cu suprafaţa de contact intre sferă şi arborele lalea, iar planul (P_2) cu suprafaţa de contact dintre sferă şi clema elastică (C).

3. CALCULUL GEOMETRIC AL MECANISMELOR CU CUPLAJE TRIPODE UNGHIULAR-AXIALE

3.1. ASPECTE GENERALE

La realizarea transmisiei unor autoturisme cu tracţiunea pe faţă se utilizează cuplajul tripod unghiular-axial asociat cu un cuplaj unghiular.

În figurile 9, 10 sînt prezentate două cazuri în care cuplajului unghiular-axial tripod i s-a asociat cuplajul unghiular cardanic şi cuplajul unghiular Rzeppa.

În ambele cazuri corpul 2 care conţine tripoda are un punct fix, punctul O_3.

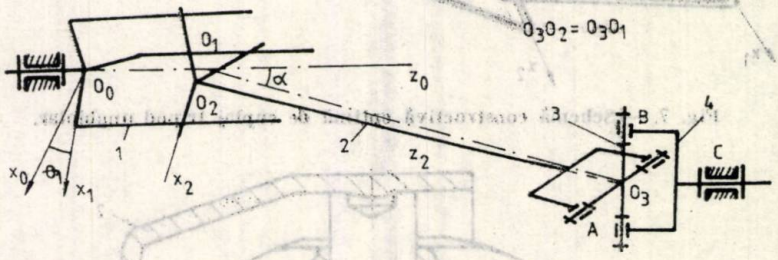


Fig. 9. — Transmisia cu cuplaj tripod unghiular-axial şi cu cuplaj unghiular cardanic.

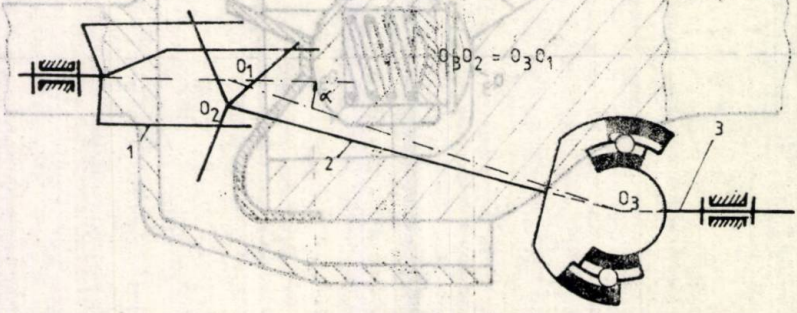


Fig. 10. — Transmisia cu cuplaj tripod unghiular-axial şi cu cuplaj unghiular Rzeppa.

Dacă se imprimă corpului 1 o mişcare de rotaţie, rezultă că mişcarea corpului 2 este complet determinată şi deci analiza cinematică a unui astfel de mecanism se poate efectua în două etape şi anume :

— cunoscînd mişcarea corpului 1, se determină mişcarea de rigid cu punct fix a corpului 2 ;

— cunoscînd mişcarea corpului 2, se determină mişcarea elementului final 3.

Concluzia care se desprinde de aici este că studiul cinematic al transmisiilor cu cuplaj tripod unghiular-axial și cu cuplaj unghiular se execută în două etape, prima etapă reducîndu-se la calculul cinematic al mecanismului simplu cu cuplaj tripod a cărei schemă cinematică este redată în figura 11.

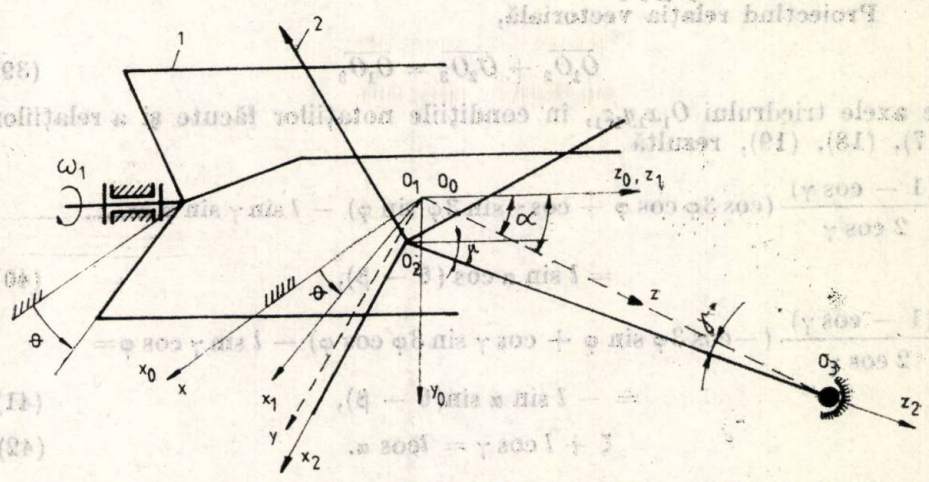


Fig. 11. — Mecanism simplu cu cuplaj tripod.

Aceeași schemă de calcul se poate folosi și în cazul transmisiilor tripode duble cu centru de simetrie [2] care transmite mișcarea între axe paralele. Pentru acest motiv, majoritatea lucrărilor de specialitate care tratează cuplajul tripod sînt destinate rezolvării modelului prezentat în figura 11.

După cum vom arăta însă, sînt și cazuri care nu pot fi asimilate cu acest model, unul din acestea fiind chiar cazul transmisiei cu cuplaj tripod unghiular.

3.2. ECUAȚIILE DE POZIȚIE

Pe axa de rotație a lalelei (corpul *1*) se consideră punctul O_1 astfel încît $O_1O_3 = O_2O_3 = l$ (fig. 11), unde l este lungimea axului O_2O_3.

Sistemele de axe $O_1x_1y_1z_1$, $O_2x_2y_2z_2$ legate de cele două corpuri le considerăm aceleași cu cele utilizate la studiul cuplei tripode.

Sistemul fix de axe $O_0x_0y_0z_0$ se alege astfel ca originea O_0 să coincidă cu punctul O_1, iar axa O_0z_0 să coincidă cu axa de rotație a lalelei, deci cu axa O_1z_1 (fig. 11).

Vom nota unghiul de rotație al lalelei cu θ, unghiul dintre axa O_0x_0 și proiecția dreptei, O_0O_3 pe planul $O_0x_0y_0$ cu β, iar unghiul dintre axa O_0z_0 și dreapta O_0O_3 cu α.

Coordonatele punctului fix O_3, ținînd seama de notațiile făcute, se scriu

$$(l \sin \alpha \cos \beta,\ l \sin \alpha \sin \beta,\ l \cos \alpha) \tag{37}$$

față de sistemul $O_0x_0y_0z_0$ și,

$$[l \sin\alpha \cos(\theta - \beta),\ -l \sin\alpha \sin(\theta - \beta),\ l \cos\alpha] \tag{38}$$

față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$.

Proiectînd relația vectorială,

$$\overline{O_1O_2} + \overline{O_2O_3} = \overline{O_1O_3} \tag{39}$$

pe axele triedrului $O_1x_1y_1z_1$, în condițiile notațiilor făcute și a relațiilor (17), (18), (19), rezultă

$$\frac{r(1 - \cos\gamma)}{2\cos\gamma}(\cos 3\varphi \cos\varphi + \cos\gamma \sin 3\varphi \sin\varphi) - l \sin\gamma \sin\varphi =$$

$$= l \sin\alpha \cos(\theta - \beta), \tag{40}$$

$$\frac{r(1 - \cos\gamma)}{2\cos\gamma}(-\cos 3\varphi \sin\varphi + \cos\gamma \sin 3\varphi \cos\varphi) - l \sin\gamma \cos\varphi =$$

$$= -l \sin\alpha \sin(\theta - \beta), \tag{41}$$

$$\zeta + l \cos\gamma = l\cos\alpha. \tag{42}$$

Sumînd relațiile (40) și (41) înmulțite cu $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, respectiv cu $\cos\varphi$, $-\sin\varphi$, se obține:

$$\frac{r(1 - \cos\gamma)}{2} \sin 3\varphi - l \sin\gamma = l \sin\alpha \sin(\varphi - \theta + \beta), \tag{43}$$

$$\frac{r(1 - \cos\gamma)}{2\cos\gamma} \cos 3\varphi = l \sin\alpha \cos(\varphi - \theta + \beta). \tag{44}$$

3.3. DETERMINAREA LIMITELOR DE VARIAȚIE ALE UNGHIULUI γ

Prin eliminarea unghiului $\varphi - \theta + \beta$ din relațiile (43) (44), rezultă o ecuație de gradul doi în $\sin 3\varphi$ care în cazul real, în care $\frac{r}{2l} \leqslant 1$, admite soluția

$$\sin 3\varphi = \frac{-\cos^2\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha \cos^2\gamma + \lambda^2(1-\cos\gamma)^2}}{\lambda \sin\gamma(1 - \cos\gamma)}, \tag{45}$$

unde s-a notat

$$\lambda = \frac{r}{2l}. \tag{46}$$

Din condiția

$$|\sin 3\varphi| \leqslant 1 \tag{47}$$

se deduce

$$\gamma_{min} \leqslant \gamma \leqslant \gamma_{max} \tag{48}$$

unde

$$\gamma_{min} = \text{arc sin} \frac{\sin \alpha - \lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} + \text{arctg } \lambda. \quad (49)$$

$$\gamma_{max} = \text{arc sin} \frac{\sin \alpha + \lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} - \text{arctg } \lambda. \quad (50)$$

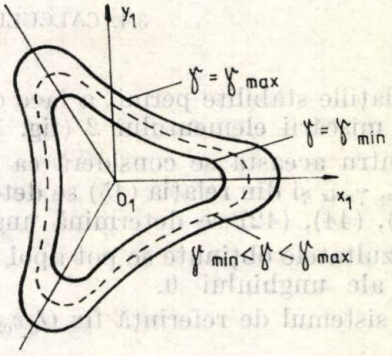


Fig. 12. — Proiecția traiectoriei punctului O_2 pe planul Ox_1y^1 (curba punctată).

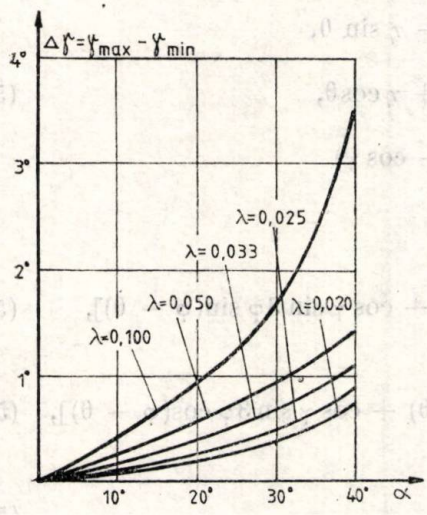


Fig. 13. — Intervalul de variație a unghiului $\Delta\gamma$ în funcție de λ și α.

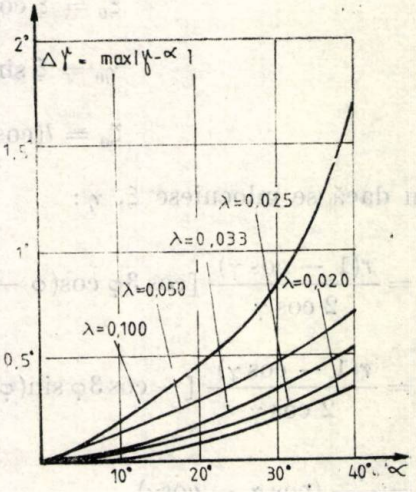


Fig. 14. — Variația abaterii unghiului $\Delta\gamma$ în funcție de α și λ.

Considerînd traiectoriile punctului O_2 pe planul $O_1x_1y_1$ ce corespund valorilor $\gamma = \gamma_{min}$, ζ = const. ; $\gamma = \gamma_{max}$, ζ = const. și ținînd seama de relația (48), rezultă că traiectoria relativă reală a punctului O_2 se află în interiorul zonei mărginite de cele două curbe, (fig. 12).

Relațiile (49) (50) prezintă interes deosebit mai ales pentru calculul aproximativ al tripodei.

În figura 13 s-a reprezentat grafic variația în funcție de α a intervalului $\Delta\gamma = \gamma_{max} - \gamma_{min}$.

Se constată că pentru $\alpha < 30°$ și $\lambda < 0{,}05$ intervalul $\Delta\gamma$ nu depășește 1°.

În figura 14 s-a reprezentat variația abaterii maxime a unghiului γ față de α.

Se constată că pentru $\alpha < 40°$ și $\lambda < 0{,}05$ abaterea $\Delta\gamma^* = \max|\gamma - \alpha|$ nu depășește 1°.

3.4. CALCULUL EXACT

Relațiile stabilite permit a face calculul riguros exact pentru determinarea mișcării elementului *2* (fig. 11).

Pentru aceasta se consideră ca parametru unghiul γ care variază între γ_{min}, γ_{max} și din relația (45) se determină unghiul φ, iar apoi din relațiile (43), (44), (42) se determină unghiul θ și ζ.

Rezultatele obținute se pot apoi rearanja în funcție de valorile crescătoare ale unghiului θ.

În sistemul de referință fix $O_0x_0y_0z_0$, punctul O_2 descrie o curbă de ecuații,

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi\cos\theta - \eta\sin\theta, \\ \eta_0 &= \xi\sin\theta + \eta\cos\theta, \\ \zeta_0 &= l(\cos\alpha - \cos\gamma) \end{aligned} \tag{51}$$

sau dacă se înlocuiesc ξ, η:

$$\xi_0 = \frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}[\cos 3\varphi\cos(\varphi-\theta) + \cos\gamma\sin 3\varphi\sin(\varphi-\theta)], \tag{52}$$

$$\eta_0 = \frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}[-\cos 3\varphi\sin(\varphi-\theta) + \cos\gamma\sin 3\varphi\cos(\varphi-\theta)], \tag{53}$$

$$\zeta_0 = \frac{r}{2\lambda}(\cos\alpha - \cos\gamma). \tag{54}$$

În coordonate polare ρ_0, θ_0 ecuațiile acestei curbe sînt:

$$\rho_0 = \frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}\sqrt{\cos^2 3\varphi + \cos^2\gamma\sin^2 3\varphi}, \tag{55}$$

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\cos 3\varphi\cos(\varphi-\theta) + \cos\gamma\sin 3\varphi\sin(\varphi-\theta)}{-\cos 3\varphi\sin(\varphi-\theta) + \cos\gamma\sin 3\varphi\cos(\varphi-\theta)}. \tag{56}$$

Raportînd aceeași curbă la sistemul de referință fix O_0XYZ în care axa OZ coincide cu O_0O_3, iar O_0X cu O_0x_0 (fig. 11), rezultă

$$\xi^* = \xi_0\,; \quad \eta^* = \eta_0 \cos\alpha + \zeta_0 \sin\alpha, \tag{57}$$

$$\zeta^* = -\eta_0 \sin\alpha + \zeta_0 \cos\alpha.$$

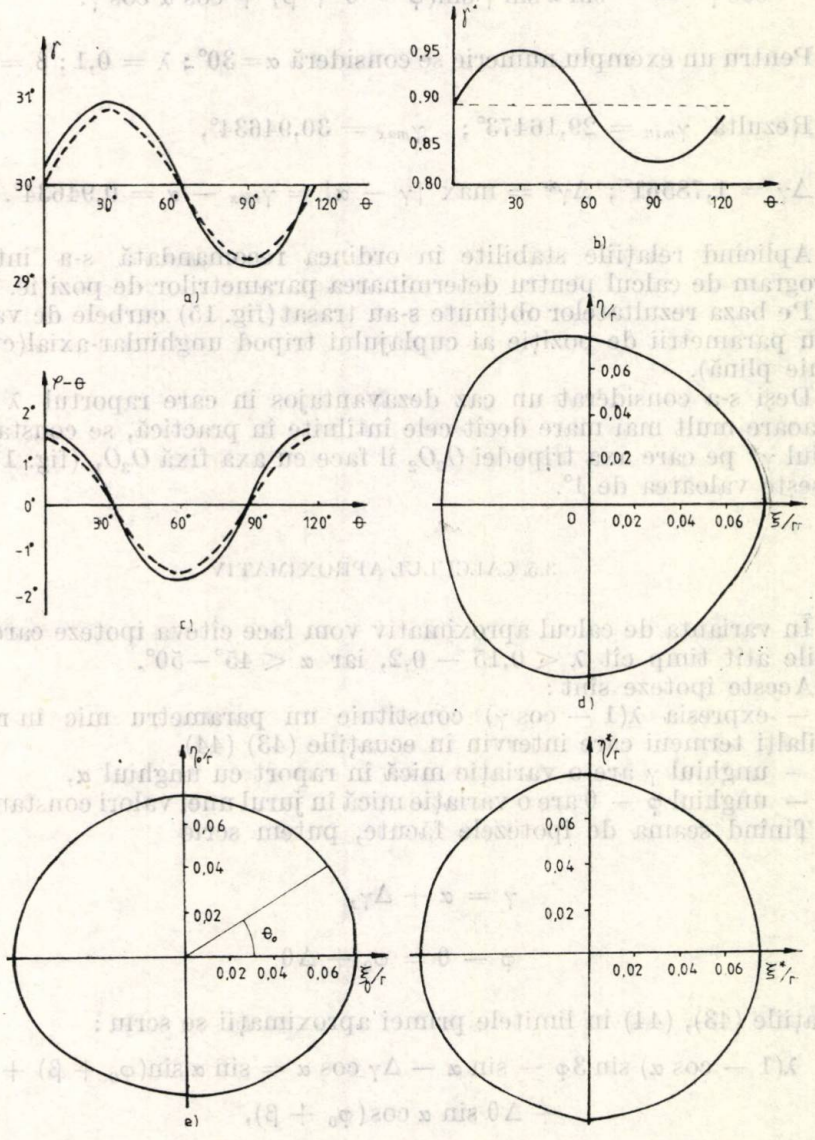


Fig. 15. — Variația parametrilor de poziție ai cuplajului tripod unghiular-axial (Curbele cu linie plină corespund variantei de calcul exact iar cele punctate corespund variantei de calcul aproximativ).

În coordonate polare rezultă

$$\rho^* = \sqrt{\xi^{*2} + \eta^{*2}}, \quad \operatorname{tg}\theta^* = \frac{\eta^*}{\xi^*}. \tag{58}$$

Unghiul γ^* dintre axele O_3O_2, O_3O_1 se obține din relația :

$$\cos\gamma^* = -\sin\alpha\sin\gamma\sin(\varphi - \theta + \beta) + \cos\alpha\cos\gamma. \tag{59}$$

Pentru un exemplu numeric se consideră $\alpha = 30°$; $\lambda = 0{,}1$; $\beta = \frac{3\pi}{2}$.

Rezultă $\gamma_{min} = 29{,}16473°$; $\gamma_{max} = 30{,}94634°$,

$\Delta\gamma = 1{,}78561°$; $\Delta\gamma^* = \max|\gamma - \alpha| = \gamma_{max} - \alpha = 0{,}94634°$.

Aplicînd relațiile stabilite în ordinea recomandată s-a întocmit un program de calcul pentru determinarea parametrilor de poziție.

Pe baza rezultatelor obținute s-au trasat (fig. 15) curbele de variație pentru parametrii de poziție ai cuplajului tripod unghiular-axial (curbele cu linie plină).

Deși s-a considerat un caz dezavantajos în care raportul $\lambda = 0{,}1$ are vaoare mult mai mare decît cele întîlnite în practică, se constată că unghiul γ^* pe care axa tripodei O_3O_2 îl face cu axa fixă O_3O_1 (fig. 11), nu depășește valoarea de 1°.

3.5. CALCULUL APROXIMATIV

În varianta de calcul aproximativ vom face cîteva ipoteze care sînt valabile atît timp cît $\lambda < 0{,}15 - 0{,}2$, iar $\alpha < 45° - 50°$.

Aceste ipoteze sînt :

— expresia $\lambda(1 - \cos\gamma)$ constituie un parametru mic în raport cu ceilalți termeni care intervin în ecuațiile (43) (44).

— unghiul γ are o variație mică în raport cu unghiul α,

— unghiul $\varphi - \theta$ are o variație mică în jurul unei valori constante φ_0.

Ținînd seama de ipotezele făcute, putem scrie

$$\gamma = \alpha + \Delta\gamma, \tag{60}$$

$$\varphi - \theta = \varphi_0 + \Delta\theta \tag{61}$$

și relațiile (43), (44) în limitele primei aproximații se scriu :

$$\lambda(1 - \cos\alpha)\sin 3\varphi - \sin\alpha - \Delta\gamma\cos\alpha = \sin\alpha\sin(\varphi_0 + \beta) + \\ + \Delta\theta\sin\alpha\cos(\varphi_0 + \beta), \tag{62}$$

$$\frac{\lambda(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha}\cos 3\varphi = \sin\alpha\cos(\varphi_0 + \beta) - \Delta\theta\sin\alpha\sin(\varphi_0 + \beta). \tag{63}$$

Cum parametrii $\lambda(1 - \cos\alpha)$, $\Delta\gamma$, $\Delta\theta$ sînt mici, rezultă ca necesare condițiile,

$$-\sin\alpha = \sin\alpha \sin(\varphi_0 + \beta), \tag{64}$$

$$0 = \sin\alpha \cos(\varphi_0 + \beta),$$

din care se obține

$$\varphi_0 = \frac{3\pi}{2} - \beta. \tag{65}$$

Din relațiile (62), (63) înlocuind unghiul φ_0, rezultă

$$\Delta\gamma = \frac{\lambda(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha} \sin 3\varphi, \tag{66}$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha \sin\alpha} \cos 3\varphi. \tag{67}$$

Cu ipotezele făcute, din relațiile (61), (65), (66), (67) se obțin

$$\Delta\gamma = \frac{\lambda(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha} \cos 3(\theta - \beta), \tag{68}$$

$$\Delta\theta = -\frac{\lambda(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha \sin\alpha} \sin 3(\theta - \beta), \tag{69}$$

$$\varphi = \theta - \frac{(1 - \cos\alpha)}{\sin\alpha \cos\alpha} \sin 3(\theta - \beta), \tag{70}$$

$$\gamma = \alpha + \frac{(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha} \cos 3(\theta - \beta). \tag{71}$$

În cazul în care $\beta = \frac{3\pi}{2}$, din relațiile (52), (53), (54), (57), (58), (59) rezultă

$$\frac{\xi^*}{r} = \frac{1 - \cos\alpha}{2\cos\alpha} \cos 3\theta, \tag{72}$$

$$\frac{\eta^*}{r} = \frac{1 - \cos\alpha}{2\cos\alpha} \sin 3\theta, \tag{73}$$

$$\frac{\zeta}{r} = \frac{1 - \cos\alpha}{2\cos\alpha} \sin\alpha \sin 3\theta, \tag{74}$$

$$\theta^* = 3\theta \tag{75}$$

$$\gamma^* = \frac{\lambda(1 - \cos\alpha)}{\cos\alpha}. \tag{76}$$

Relațiile (72) — (76) arată că în timpul mișcării, axa O_3O_2 (fig. 11) se rotește în jurul axei O_3O_1, executînd o rotație completă la o variație a unghiului θ egală cu $\frac{2\pi}{3}$, deci la o rotație completă a lalelei *1*, axa O_3O_2 execută trei rotații.

Această constatare prezintă deosebit interes pentru calculul dinamic și în special pentru determinarea turației critice a axei O_3O_2.

Folosind aceleași date numerice ca în cazul calculului exact și trasînd curbele $\gamma(\theta)$, $\varphi(\theta) - \theta$, $\gamma^*(\theta)$, rezultă curbele cu linie punctată din figura 15.

Se constată că diferențele față de rezultatele obținute prin calcul exact sînt suficient de mici astfel că în calculul geometric și cinematic se justifică utilizarea metodei aproximative.

3.6. CALCULUL CINEMATIC AL TRANSMISIEI CU CUPLAJ TRIPOD UNGHIULAR AXIAL ȘI CU CUPLAJ UNGHIULAR CARDANIC

Am afirmat că studiul cinematic al transmisiilor cu cuplaj tripod unghiular-axial și cuplaj unghiular (fig. 9, 10) se poate fragmenta, studiind mai întîi mecanismul din figura 11, iar apoi studiind cuplajul unghiular.

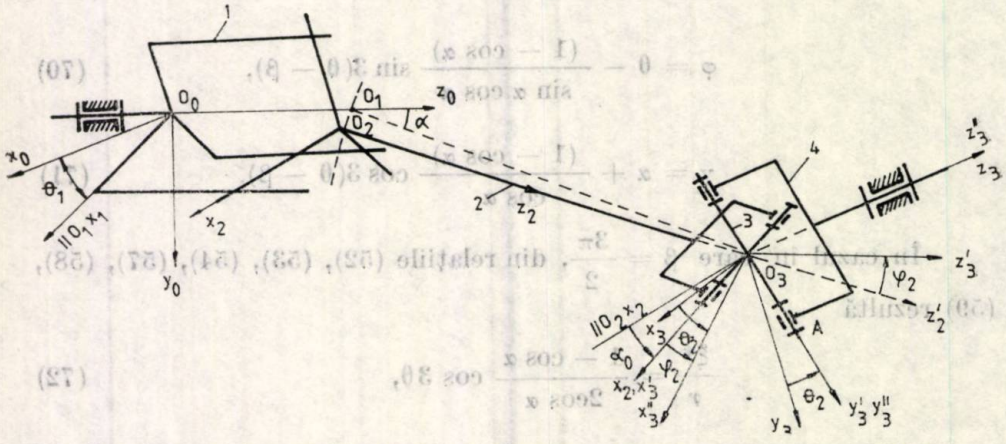


Fig. 16. — Transmisia cu cuplaj tripod și cuplaj cardanic. Alegerea axelor pentru calculul cinematic al transmisiei.

Vom exemplifica acest aspect prin efectuarea calculului cinematic al transmisiei cu cuplaj tripod unghiular-axial și cuplaj unghiular cardanic. În figura 16 este prezentată o astfel de transmisie și axele de coordonate necesare analizei cinematice.

Pentru lalea (corpul *1*) și tripoda cu axul ei (corpul *2*) se consideră aceleași sisteme de axe folosite în studiul modelului din figura 11.

Pentru calculul cuplajului cardanic se consideră că crucea cardanică este rotită pe axa O_2O_3 față de axa O_2x_2 cu unghiul α_0. Se obține sistemul de referință legat rigid de corpul *2*, $O_3x_2'y_2'z_2'$, unde axa O_3x_2' este în lungul axei crucii cardanice, iar axa O_3x_2' este situată în prelungirea axei O_2O_3.

Considerînd sistemul de referință fix $O_3x_3y_3z_3$, ales astfel încît axa O_3z_3 să coincidă cu axa de rotație a corpului *4*, rezultă că acesta se obține din sistemul $O_3x_2'y_2'z_2'$ prin următoarele mișcări finite:

— o rotație în jurul axei O_3x_3' cu unghiul φ_2 rezultînd sistemul $O_3x_3'y_3'z_3'$ în care axa O_3y_3' coincide cu axa crucei cardanice O_3A;

— o rotație în jurul axei O_3y_3' cu unghiul φ_2 obținînd sistemul $O_3x_3''y_3''z_3''$ în care axa O_3z_3'' coincide cu axa de rotație a furcii *4*;

— o rotație în jurul axei O_3z_3'' cu unghiul $-\theta_2$ pînă se obține sistemul fix $O_3x_3y_3z_3$.

Dacă $[T_{ij}]$ este matricea de rotație a sistemului de referință notat cu indicele i față de sistemul de referință notat cu indicele j, atunci ecuația matriceală de închidere se scrie:

$$[T_{10}][T_{21}][T_{2'2}][T_{3'2'}][T_{3''3}][T_{3\,3''}][T_{03}] = [I]. \tag{77}$$

Matricea $[T_{03}]$ definește poziția sistemului fix $O_0x_0y_0z_0$ față de sistemul fix $O_3x_3y_3z_3$, deci este cunoscută și are forma:

$$[T_{03}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{78}$$

Celelalte matrice din relația (77) sînt:

$$[T_{10}] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [T_{2'2}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_0 & -\sin\alpha_0 & 0 \\ \sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{79}$$

$$[T_{3'2'}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{bmatrix}; \quad T_{3''3'}] = \begin{bmatrix} \cos\psi_2 & 0 & \sin\psi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi_2 & 0 & \cos\psi_2 \end{bmatrix}, \tag{80}$$

$$[T_{3\,3''}] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{81}$$

Scriind ecuația (77) sub forma

$$[T_{3'2'}]\,[T_{3''3'}]\,[T_{3\,3''}] = [T_{2'2}]^{-1}\,[T_{21}]^{-1}\,[T_{10}]^{-1}[T_{03}]^{-1} \tag{82}$$

și ținînd seama că matricea $[T_{21}]$ este matricea din relația (17) în care argumentele au indicele 1, se obțin din ecuația (82) unghiurile φ_2, ψ_2, θ_2.

În cazul particular în care axele sistemului $O_3x_3y_3z_3$ sînt paralele cu axele sistemului $O_0x_0y_0z_0$, matricea (78) devine matrice unitate și rezultă :

$$\sin \psi_2 = \sin \gamma_1 \sin(\varphi_1 + \alpha_0), \tag{83}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = -\operatorname{tg} \gamma_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_0), \tag{84}$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\cos \gamma_1 \operatorname{tg}(\varphi_1 + \alpha_0) - \operatorname{tg}(\varphi_1 - \theta_1)}{1 + \cos \gamma_1 \operatorname{tg}(\varphi_1 + \alpha_0) \operatorname{tg}(\varphi - \theta_1)}. \tag{85}$$

Dacă se notează

$$\operatorname{tg} \theta_2^* = \cos \gamma \operatorname{tg}(\varphi_1 + \alpha_0), \tag{86}$$

din relația (85) rezultă

$$\theta_2 = \theta_2^* - \varphi_1 + \theta_1. \tag{87}$$

Calculul cinematic se poate conduce în continuare fie în varianta calculului exact fie în varianta calculului aproximativ, folosind rezultatele stabilite pentru modelul din figura 11.

Din relația (87) se constată că o astfel de transmisie în general nu este homocinetică, iar diferența mare de nesincronism este dată de articulația cardanică.

Primită la redacție la 19 octombrie 1983

BIBLIOGRAFIE

1. G. BONGIOVANNI, G. ROCCATI, *Giunto a tripode : studio geometrico cinematico*, A.T.A., Torino, 3, 132–138 (1977).
2. FL. DUDIȚĂ, *Cuplaje mobile homocinetice*, Edit. tehnică, București, 1974.
3. M. DURUM, *Kinematic Proprieties of Tripode (Tri-pot) Joints*, Transaction A S M E, serie B, May 708–713, 1975.
4. N. PANDREA, *Proprietăți geometrice ale cuplajelor tripode*, Simpozionul „PRASIC-82", vol. I, 77–83, Brașov, 1982.
5. N. PANDREA, *Analiza poziționalâ a mecanismelor simple cu cuplaje tripode*, Simpozionul „PRASIC–82", vol. I, 69–76, Brașov, 1982.
6. R. VOINEA, N. PANDREA, *Contribuții la o teorie generală matematică a cuplelor cinematice*, Simpozionul internațional SYROM–73, vol. B. 522–534, București, 1973.
7. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.

CONTRIBUȚII LA ANALIZA CINETOELASTICĂ A MECANISMELOR PLANE PE MODELE CU NUMĂR FINIT DE GRADE DE LIBERTATE

de MIHAI BUCULEI, DAN BĂGNARU
Universitatea din Craiova
DAN MARGHITU
I.U.G.T.C., Craiova

În lucrare se consideră cazul elementelor cinematice rectilinii, liniar-elastice, în mișcare de rototranslație plană. Se face analiza vibrațiilor prin adoptarea unui model mecanic cu un număr finit de grade de libertate, concentrînd masa elementului cinematic într-un număr finit de puncte. Se face exemplificarea pentru biela liniar-elastică a unui mecanism R (RRT).

În [1, 2, 3, 4] s-au elaborat ecuații de mișcare, pe model liniar sau neliniar, pentru elemente cinematice liniar-elastice în mișcare de rototranslație plană, considerînd masa distribuită. Modelelele matematice sînt, în acest caz, ecuații cu derivate parțiale, liniare sau neliniare, în deplasările longitudinale și transversale ale unui punct al elementului cinematic. Chiar în cazul liniar, aceste modele sînt dificil de rezolvat, în special, datorită faptului că operatorii diferențiali conțin funcții date de timp, în care intervin elementele rototranslației plane.

În situația în care răspunsul dinamic este tolerat cu un anumit grad de aproximație, este utilă folosirea unor modele cu un număr finit de grade de libertate, modelul matematic reducîndu-se la ecuații ordinare cu coeficienții constanți.

În lucrare se abordează acest ultim punct de vedere, concentrînd masa elementului cinematic în n puncte materiale, modelul matematic construindu-se prin metoda coeficienților de influență.

1. ECUAȚII DE MIȘCARE

Se consideră un element cinematic rectiliniu liniar-elastic, în mișcare plană (fig. 1).

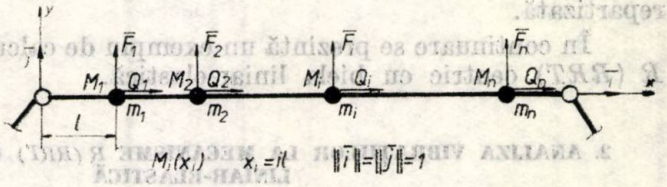


Fig. 1. — Element cinematic deformabil.

Se concentrează masa M_a a elementului cinematic în n mase m_i:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = M.$$

Fie x_i abscisa punctului M_i.

Se fac următoarele notații:

q_i — deplasarea transversală a punctului M_i, $i = \overline{1, n}$;

u_i — deplasarea longitudinală a punctului M_i;

α_{ij} — coeficienții de influență pentru deplasările transversale;

β_{ij} — coeficienții de influență pentru deplasările longitudinale;

$\bar{R}_i = Q_i\bar{i} + F_i\bar{j}$ — forța rezultantă, care acționează asupra masei m_i:

$$\bar{R}_i = (-m_i a_{ix} + X_i)\bar{i} + (-m_i a_{iy} + Y_i)\bar{j};$$

$\bar{F}_{ei} = X_i\bar{i} + Y_i\bar{j}$ — forța rezultantă exterioară care acționează asupra masei m_i;

$\bar{a}_i = a_{ix}\bar{i} + a_{iy}\bar{j}$ — accelerația punctului M_i, dată de:

$$\bar{a}_i = (a_{0x} - \omega^2 x_i - \ddot{u}_i)\,\bar{i} + (a_{0y} + \varepsilon x_i - \ddot{q}_i)\,\bar{j};$$

$\bar{\omega}$ — viteza unghiulară instantanee a elementului cinematic;

$\bar{\varepsilon}$ — accelerația unghiulară instantanee;

$X_{in,i} = m_i(\omega^2 x_i - a_{0x})$; $Y_{in,i} = -m_i(a_{0y} + \varepsilon x_i)$.

Sistemul de ecuații de mișcare în deplasările transversale $q_i(t)$ este

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_{ki} \ddot{q}_i + q_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki}(Y_{in,i} + Y_i) \quad (k = \overline{1, n}). \tag{1}$$

Sistemul de ecuații de mișcare în deplasările longitudinale $u_i(t)$ este

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \beta_{ki} \ddot{u}_i + u_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ki}(X_{in,i} + X_i). \tag{2}$$

Sistemul (1), (2) descrie o vibrație forțată neamortizată cu $2n$ grade de libertate. În cazul în care se neglijează deplasările longitudinale, sistemul de ecuații de mișcare se reduce la (1).

Rezolvarea sistemelor de ecuații ordinare (1), (2) este o problemă mai simplă decît rezolvarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale, dedus în [1, 3, 4] în cazul în care masa elementului cinematic este continuu repartizată.

În continuare se prezintă un exemplu de calcul pentru un mecanism R (RRT) centric cu biela liniar-elastică.

2. ANALIZA VIBRAȚIILOR LA MECANISME R (RRT) CENTRICE, CU BIELĂ LINIAR-ELASTICĂ

Se consideră mecanismul din figura 2, cu biela AB liniar-elastică.

Se iau în considerație numai vibrațiile transversale libere ale bielei. Forța de inerție transversală atașată masei concentrate m_i în punctul M_i este dată de relația:

$$Y_{in,i} = -m_i[R(t) + x_i S(t)], \tag{3}$$

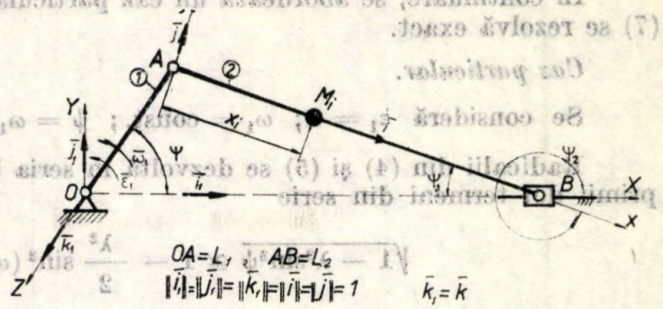


Fig. 2. — Mecanism R (RRT) cu biela deformabilă.

unde

$$R(t) = (-\varepsilon_1 L_1 \sin\psi - \omega_1^2 L_1 \cos\psi)\lambda \sin\psi + (\varepsilon_1 L_1 \cos\psi - \omega_1^2 L_1 \sin\psi)\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\psi}, \tag{4}$$

$$S(t) = \lambda(1 - \lambda^2 \sin^2\psi)^{-\frac{3}{2}}[\omega_1^2(1 - \lambda^2)\sin\psi + \varepsilon_1(\lambda^2 - 1)\cos\psi - \lambda^2 \varepsilon_1 \cos^3\psi], \tag{5}$$

$$\lambda = \frac{L_1}{L_2},$$

$\omega_1(t)$ este viteza unghiulară instantanee a elementului motor *1*; $\varepsilon_1(t)$ — acceleraţia unghiulară instantanee a elementului *1*.

Se concentrează masa M a bielei în n mase egale $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m = \frac{M}{n}$, dispuse echidistant: $x_i = il$, $i = \overline{1, n}$.

Coeficienţii de influenţă ataşaţi vibraţiilor transversale vor fi:

$$\alpha_{ii} = \frac{i^2(n - i + 1)^2 l^3}{3(n + 1)\,EI},$$

$$\alpha_{ij} = \frac{i(n - j + 1)[2j(n + 1) - i^2 - j^2]}{6(n + 1)EI} l^3$$

$$(i, j = \overline{1, n}), \tag{6}$$

unde EI este rigiditatea la încovoiere a bielei AB.

Sistemul (1) devine:

$$m \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \ddot{q}_i + q_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} Y_{in,i}$$

$$(k = \overline{1, n}). \tag{7}$$

În continuare, se abordează un caz particular pentru care sistemul (7) se rezolvă exact.

Caz particular.

Se consideră $\varepsilon_1 = 0$; $\omega_1 = \text{const.}$; $\psi = \omega_1 t$; $\lambda = \frac{L_1}{L_2} \ll 1$; $n = 3$.

Radicalii din (4) şi (5) se dezvoltă în seria binominală, oprindu-se primii doi termeni din serie

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\psi} \cong 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2(\omega_1 t),$$

$$(1 - \lambda^2 \sin^2\psi)^{-\frac{3}{2}} \cong 1 + \frac{3\lambda^2}{2} \sin^2(\omega_1 t).$$

Cu acestea, relaţiile (4) şi (5) devin

$$R(t) = \frac{1}{8}\omega_1^2 L_1(3\lambda^2 - 8)\sin(\omega_1 t) - \frac{1}{2}\omega_1^2 \lambda L_1 \sin(2\omega_1 t) - \\ - \frac{1}{8}\omega_1^2 \lambda^2 L_1 \sin(3\omega_1 t), \tag{8}$$

$$S(t) = \omega_1^2 \lambda \sin(\omega_1 t). \tag{9}$$

Pentru forţele de inerţie se obţin din (3) expresiile

$$Y_{in,i} = a_i \sin(\omega_1 t) + b_i \sin(2\omega_1 t) + c_i \sin(3\omega_1 t), \tag{10}$$

unde

$$a_i = -\frac{1}{8} m\omega_1^2 [L_1(3\lambda^2 - 8) + 8\lambda x_i],$$

$$b_i = \frac{1}{2} m\omega_1^2 \lambda L_1, \quad c_i = \frac{1}{8} m\omega_1^2 \lambda^2 L_1 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Coeficienţii de influenţă devin:

$$\alpha_{11} = \frac{3l^3}{4EI}; \quad \alpha_{22} = \frac{4l^3}{3EI}; \quad \alpha_{33} = \frac{3l^3}{4EI};$$

$$\alpha_{12} = \frac{11l^3}{12EI}; \quad \alpha_{13} = \frac{7l^3}{12EI}; \quad \alpha_{23} = \frac{11l^3}{12EI}.$$

Ecuaţiile de mişcare devin:

$$\begin{aligned} m\alpha_{11}\ddot{q}_1 + m\alpha_{12}\ddot{q}_2 + m\alpha_{13}\ddot{q}_3 + q_1 &= \alpha_{11}Y_{in,1} + \alpha_{12}Y_{in,2} + \alpha_{13}Y_{in,3}, \\ m\alpha_{12}\ddot{q}_1 + m\alpha_{22}\ddot{q}_2 + m\alpha_{23}\ddot{q}_3 + q_2 &= \alpha_{12}Y_{in,1} + \alpha_{22}Y_{in,2} + \alpha_{23}Y_{in,3}, \\ m\alpha_{13}\ddot{q}_1 + m\alpha_{23}\ddot{q}_2 + m\alpha_{33}\ddot{q}_3 + q_3 &= \alpha_{13}Y_{in,1} + \alpha_{23}Y_{in,2} + \alpha_{33}Y_{in,3}. \end{aligned} \tag{11}$$

Ecuațiilor (11) li se atașază condițiile inițiale:

$$q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = \dot{q}_3(0) = 0.$$

Se aplică în (11) transformata Laplace unilaterală în raport cu timpul, notînd $\bar{f}(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}\, dt$, $p \in C$.

Se obține un sistem algebric în $\tilde{q}_1(p)$, $\tilde{q}_2(p)$, $\tilde{q}_3(p)$, cu soluțiile:

$$\tilde{q}_1 = \frac{R_1(p)}{Q(p)}; \quad \tilde{q}_2 = \frac{R_2(p)}{Q(p)}; \quad \tilde{q}_3 = \frac{R_3(p)}{Q(p)}, \tag{12}$$

unde

$$R_1(p) = \omega_1 \begin{vmatrix} \tilde{\psi}_1(p) & m\alpha_{12}p^2 & m\alpha_{13}p^2 \\ \tilde{\psi}_2(p) & m\alpha_{22}p^2 + 1 & m\alpha_{12}p^2 \\ \tilde{\psi}_3(p) & m\alpha_{12}p^2 & m\alpha_{11}p^2 + 1 \end{vmatrix},$$

$$R_2(p) = \omega_1 \begin{vmatrix} m\alpha_{11}p^2 + 1 & \tilde{\psi}_1(p) & m\alpha_{13}p^2 \\ m\alpha_{12}p^2 & \tilde{\psi}_2(p) & m\alpha_{12}p^2 \\ m\alpha_{13}p^2 & \tilde{\psi}_3(p) & m\alpha_{11}p^2 + 1 \end{vmatrix},$$

$$R_3(p) = \omega_1 \begin{vmatrix} m\alpha_{11}p^2 + 1 & m\alpha_{12}p^2 & \tilde{\psi}_1(p) \\ m\alpha_{12}p^2 & m\alpha_{22}p^2 + 1 & \tilde{\psi}_2(p) \\ m\alpha_{13}p^2 & m\alpha_{12}p^2 & \tilde{\psi}_3(p) \end{vmatrix},$$

$$Q(p) = (p^2 + \omega_1^2)(p^2 + 4\omega_1^2)(p^2 + 9\omega_1^2)[0{,}02\, m^3 l^9 p^6 + 0{,}54\, m^2 l^6 EI p^4 + 2{,}83\, ml^3 (EI)^2 p^2 + (EI)^3],$$

$$\tilde{\psi}_i(p) = m\omega_1^2 \left[p^4 \sum_{k=1}^{3} A_k \alpha_{ik} + \omega_1^2 p^2 \sum_{k=1}^{3} B_k \alpha_{ik} + \omega_1^4 \sum_{k=1}^{3} C_k \alpha_{ik} \right] \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$A_k = L_1(1 + \lambda) - K\lambda l; \quad B_k = L_1(-3\lambda^2 + 10\,\lambda + 13) - 13k\lambda l;$$

$$C_k = 3[L_1(-4\lambda^2 + 3\lambda + 12) - 12kl] \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Inversarea transformatei Laplace în (12) se face cu teoremele de dezvoltare Heaviside, pentru un exemplu numeric concret.

EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră următoarele date de calcul :

$$EI = 10{,}584 \cdot 10^5\ \mathrm{Nm}^2;\quad L_2 = 0{,}6\ \mathrm{m};\quad l = 0{,}15\ \mathrm{m};\quad M = 0{,}78624\ \mathrm{kg},$$

$$m = 0{,}26208\ \mathrm{kg};\quad L_1 = 0{,}05\ \mathrm{m};\quad \lambda = 0{,}083;\quad \omega_1 = 94{,}2\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Rădăcinile ecuației $Q(p) = 0$ sînt :

$$p_1 = 1{,}84 \cdot 10^5\,\mathrm{i};\quad p_2 = -1{,}84 \cdot 10^5\,\mathrm{i};\quad p_3 = 0{,}816 \cdot 10^5 + 2{,}584 \cdot 10^5\,\mathrm{i},$$

$$p_4 = -0{,}816 \cdot 10^5 - 2{,}584 \cdot 10^5\,\mathrm{i};\quad p_5 = 0{,}816 \cdot 10^5 - 2{,}584 \cdot 10^5\,\mathrm{i},$$

$$p_6 = -0{,}816 \cdot 10^5 + 2{,}584 \cdot 10^5\,\mathrm{i};\quad p_7 = 0{,}000942 \cdot 10^5\,\mathrm{i};$$

$$p_8 = -0{,}000942 \cdot 10^5\,\mathrm{i},$$

$$p_9 = 0{,}001884 \cdot 10^5\,\mathrm{i};\quad p_{10} = -0{,}001884 \cdot 10^5\,\mathrm{i};\quad p_{11} = 0{,}002826 \cdot 10^5\,\mathrm{i},$$

$$p_{12} = -0{,}002826 \cdot 10^5\,\mathrm{i}.$$

Inversarea transformatei Laplace în (12) se face cu relațiile :

$$q_1(t) = \sum_{k=1}^{12} \frac{R_1(p_k)}{Q_1(p_k)} e^{p_k t};\quad q_2(t) = \sum_{k=1}^{12} \frac{R_2(p_k)}{Q_1(p_k)} e^{p_k t};$$

$$q_3(t) = \sum_{k=1}^{12} \frac{R_3(p_k)}{Q_1(p_k)} e^{p_k t}, \tag{13}$$

unde

$$Q_1(p) = 12p^{11} + 315{,}9 \cdot 10^9 p^9 + 15{,}5 \cdot 10^{20} p^7 + 4{,}8 \cdot 10^{29} p^5 +$$

$$+ 0{,}42 \cdot 10^{33} p^3 + 0{,}61 \cdot 10^{39}. \tag{14}$$

Folosind calculatorul electronic se obțin următoarele rezultate :

$$Q_1(p_1) = 0{,}61 \cdot 10^{39} - 0{,}328 \cdot 10^{59}\,\mathrm{i};\quad Q_1(p_2) = 0{,}61 \cdot 10^{39} + 0{,}328 \cdot 10^{59}\,\mathrm{i};$$

$$Q_1(p_3) = 0{,}233 \cdot 10^{61} + 0{,}455 \cdot 10^{61}\,\mathrm{i};\quad Q_1(p_4) = -0{,}233 \cdot 10^{61} - 0{,}455 \cdot 10^{61}\,\mathrm{i};$$

$$Q_1(p_5) = 0{,}233 \cdot 10^{61} - 0{,}455 \cdot 10^{61}\,\mathrm{i};\quad Q_1(p_6) = -0{,}233 \cdot 10^{61} + 0{,}455 \cdot 10^{61}\,\mathrm{i};$$

$$Q_1(p_7) = 0{,}61 \cdot 10^{39} + 0{,}32 \cdot 10^{40}\,\mathrm{i};\quad Q_1(p_8) = 0{,}61 \cdot 10^{39} - 0{,}32 \cdot 10^{40}\,\mathrm{i};$$

$$Q_1(p_9) = 0{,}61 \cdot 10^{39} + 0{,}11 \cdot 10^{42}\,\mathrm{i};\quad Q_1(p_{10}) = 0{,}61 \cdot 10^{39} - 0{,}11 \cdot 10^{42}\,\mathrm{i};$$

$$Q_1(p_{11}) = 0{,}61 \cdot 10^{39} + 0{,}855 \cdot 10^{42}\,\mathrm{i};\quad Q_1(p_{12}) = 0{,}61 \cdot 10^{39} - 0{,}855 \cdot 10^{42}\,\mathrm{i};$$

$$R_1(p_1) = -0{,}237 \cdot 10^{17}; \quad R_1(p_2) = -0{,}202 \cdot 10^{16},$$

$$R_1(p_3) = 0{,}302 \cdot 10^{19} - 0{,}945 \cdot 10^{18} \cdot i; \quad R_1(p_4) = 0{,}302 \cdot 10^{19} - 0{,}945 \cdot 10^{18} \cdot i;$$

$$R_1(p_5) = 0{,}302 \cdot 10^{19} + 0{,}945 \cdot 10^{18} \cdot i; \quad R_1(p_6) = 0{,}302 \cdot 10^{19} + 0{,}945 \cdot 10^{18} \cdot i,$$

$$R_1(p_7) = -0{,}116 \cdot 10^5; \quad R_1(p_8) = -0{,}116 \cdot 10^5,$$

$$R_1(p_9) = -0{,}123 \cdot 10^5; \quad R_1(p_{10}) = -0{,}123 \cdot 10^5,$$

$$R_1(p_{11}) = -0{,}119 \cdot 10^5; \quad R_1(p_{12}) = -0{,}119 \cdot 10^5,$$

$$R_2(p_1) = 0{,}593 \cdot 10^{17}; \quad R_2(p_2) = 0{,}593 \cdot 10^{17},$$

$$R_2(p_3) = -0{,}127 \cdot 10^{19} - 0{,}918 \cdot 10^{18} \cdot i; \quad R_2(p_4) = -0{,}127 \cdot 10^{19} - 0{,}918 \cdot 10^{18} \cdot i,$$

$$R_2(p_5) = -0{,}127 \cdot 10^{19} + 0{,}918 \cdot 10^{18} \cdot i; \quad R_2(p_6) = -0{,}127 \cdot 10^{19} + 0{,}918 \cdot 10^{18} \cdot i,$$

$$R_2(p_7) = -0{,}941 \cdot 10^4; \quad R_2(p_8) = -0{,}941 \cdot 10^4;$$

$$R_2(p_9) = -0{,}104 \cdot 10^4; \quad R_2(p_{10}) = -0{,}104 \cdot 10^5,$$

$$R_2(p_{11}) = -0{,}103 \cdot 10^5; \quad R_2(p_{12}) = -0{,}103 \cdot 10^5,$$

$$R_3(p_1) = -0{,}236 \cdot 10^{17}; \quad R_3(p_2) = -0{,}291 \cdot 10^{16},$$

$$R_3(p_3) = -0{,}121 \cdot 10^{19} + 0{,}414 \cdot 10^{18} \cdot i; \quad R_3(p_4) = -0{,}121 \cdot 10^{19} + 0{,}414 \cdot 10^{18} \cdot i,$$

$$R_3(p_5) = -0{,}121 \cdot 10^{19} - 0{,}414 \cdot 10^{18} \cdot i; \quad R_3(p_6) = -0{,}121 \cdot 10^{19} - 0{,}414 \cdot 10^{18} \cdot i,$$

$$R_3(p_7) = -0{,}767 \cdot 10^4; \quad R_3(p_8) = -0{,}767 \cdot 10^4,$$

$$R_3(p_9) = -0{,}791 \cdot 10^4; \quad R_3(p_{10}) = -0{,}791 \cdot 10^4;$$

$$R_3(p_{11}) = -0{,}744 \cdot 10^4; \quad R_3(p_{12}) = -0{,}744 \cdot 10^4,$$

$$(i = \sqrt{-1}).$$

Pentru un t fixat se obţin deplasările transversale la diferite momente.

3. CONCLUZII

Rezultatele prezentate permit să se obțină răspunsul dinamic al elementelor cinematice rectilinii deformabile ale mecanismelor plane, reducînd problema la rezolvarea unui sistem de ecuații ordinare. Modelul matematic, deși simplificat, este mult mai ușor de rezolvat decît modelele aferente barelor cu masa continuu repartizată.

Primită la redacție la 1 decembrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. M. BUCULEI, D. BAGNARU, *Équations nonlinéaires dans l'élastocinématique des mécanismes à barres*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. appl., **26**, 1 (1981).
2. M. BUCULEI, D. MARGHITU, *Ecuații neliniare pentru vibrațiile elementelor nerectilinii ale mecanismelor plane*, St. cerc. mec. apl., 5 (1982).
3. M. BUCULEI, *Sur les équations de l'élastodynamique des mécanismes à barres*, Rev. Roum., Sci. Techn.-Méc. appl., **28**, 3 (1983).
4. M. BUCULEI, D. MARGHITU, *Decoupled nonlinear, equations in the elastokinematics of bar mechanisms*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **26**, 4 (1981).
5. CHR. PELECUDI, *Precizia mecanismelor*, Edit. Acad. R. S. România, București, 1975.

STUDIUL CÎMPULUI DE TEMPERATURĂ A MAȘINILOR-UNELTE

de MARCEL POPA

Institutul Politehnic, Cluj-Napoca

Lucrarea prezintă abordarea matematică a cunoașterii cîmpului de temperatură generat în subansamblurile unei mașini-unelte datorat izvoarelor termice, utilizînd metoda elementului finit. Se pornește de la ecuația lui Fourier, structura mașinii-unelte fiind discretizată în elemente paralelipipedice.
Pentru determinarea soluției aproximative se folosesc o serie de funcții de bază asociate elementului, respectiv nodurilor acestuia.
Rezolvînd ecuațiile determinate pentru toate nodurile, se obține scrierea condensată a sistemului sub formă matriceală. Programul de calcul construit a fost testat pe modele, el putînd fi aplicat cazurilor reale de procese de transfer termic care apar la mașini-unelte.

Problema calculului cîmpului termic la mașini-unelte, la noi în țară, a fost abordată în mai mică măsură, iar programe de calcul ale temperaturilor la mașini-unelte au apărut relativ recent [2]. Determinările teoretice ale distribuției de temperatură în unele organe și subansambluri de mașini, au apelat, în general, la metode analitice [3], sau la metoda numerică cu diferențe finite. Pentru calculul cîmpului termic în structura mașinii-unelte, în prezentul studiu s-a utilizat metoda elementului finit (MEF).

Determinarea pe cale teoretică a cîmpului termic, dezvoltat într-o structură oarecare, presupune definirea ecuațiilor care descriu clasa de fenomene de transfer termic și condițiile la limită aferente cazului. Scrierea și rezolvarea ecuațiilor transferului termic, permit determinarea variației de temperatură și a cantităților de căldură transmise în timp pentru un punct (zonă) arbitrar, al corpului material.

Deși MEF este o cale de calcul prin aproximare, rezultatele ei sînt în general în bună concordanță cu cele determinate experimental, prezentînd o serie de avantaje (mai ieftină și precisă) față de metoda diferențelor finite [4]. Analiza structurii se reduce la studiul părților elementare, rezultate din discretizare. Acest aspect relevă originalitatea MEF, al cărui aspect fundamental este legat de generalizarea metodei Rayleigh-Ritz și Ritz-Galerkin.

Principalele etape parcurse folosind MEF au fost : discretizarea structurii, alegerea tipurilor de elemente finite, alcătuirea ecuației matriceale, ce exprimă proprietățile concrete ale elementului, asamblarea, rezolvarea sistemului de ecuații și unele calcule auxiliare. Se poate aprecia că MEF este un procedeu de determinare a unor spații finitdimanesionale, în care se caută soluția aproximativă a unei probleme la limită dată, prin metoda lui Galerkin, mai precis se determină funcția spline, în aceste subspații finitdimensionale, care aproximează soluția exactă a problemei la limită. Pentru fenomenul de transfer termic de conducție se aplică ecuația lui Fourier, urmînd apoi stabilirea condițiilor la limită corespunzătoare :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\,\Delta t + \frac{\dot{Q}}{\rho \cdot c} \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 2, 1986, P. 197—203

sau

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{\dot{Q}(x, y, z, \tau)}{\rho c}, \tag{2}$$

unde $t = t(x, y, z, \tau)$ reprezintă cîmpul de temperatură variabil în spaţiu (x, y, z) şi timp (τ); $a = \lambda/\rho c$ — difuzivitatea termică, m^2/s; ρ — densitatea, kg/m^3; λ — conductivitatea termică, $W/m.K$; c — căldura masică (specifică), $J/kg.K$; $\dot{Q}$ — cantitatea de căldură dezvoltată în unitatea de timp, pe unitatea de volum, W/m^3.

Se consideră că suprafaţa laterală S, care delimitează corpul de volum V, este împărţită în subsuprafeţele :

S_1, care participă la un schimb de căldură convectiv descris de ecuaţia :

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = -\alpha(t - t_2); \tag{3}$$

— S_2, străbătută de un flux termic constant :

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = -q; \tag{4}$$

— S_3, pentru care se impune valoarea temperaturii :

$$t = t_1, \tag{5}$$

unde n este normala exterioară la suprafaţa laterală S; α — coeficientul de schimb termic prin convecţie; t_2 — temperatura fluidului (mediului ambiant) care participă la schimbul de căldură convectiv; q — intensitatea fluxului de căldură impus pentru suprafaţa S_2.

La timpul τ_0 condiţia la limită iniţială se defineşte :

$$t(x, y, z, \tau_0) = t_0(x, y. z), \tag{6}$$

unde t_0 reprezintă cîmpul de temperatură la momentul τ_0.

Aplicarea formei variaţionale ataşate ecuaţiei (2) se face considerînd τ fixat arbitrar (parametru) şi x, y, t variabile independente, integralele ce definesc forma variaţională fiind integrale de volum şi de suprafaţă.

Dacă se notează prin $H^{01}(V)$ spaţiul Sobolev al funcţiilor care îndeplinesc condiţiile la limită, atunci forma variaţională, asociată ecuaţiei (2), este [4] :

$$\lambda \iiint_V \left(\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_V \left(-\dot{Q}u + \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} u\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \alpha \iint_{S_1} (t_{S_1} - t_2)\, u\, \mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \iint_{S_2} qu\, \mathrm{d}\sigma = 0, \quad \forall u \in H^{01}(V), \tag{7}$$

unde u este o funcţie definită prin relaţia (12), iar $d\sigma$ este elementul de suprafaţă. Subansamblul maşinii-unelte se discretizează prin elemente de tipul celui din figura 1, unde prin s s-a notat numărul elementului şi prin s_k^0, $k = 1 \div 8$, numărul nodului.

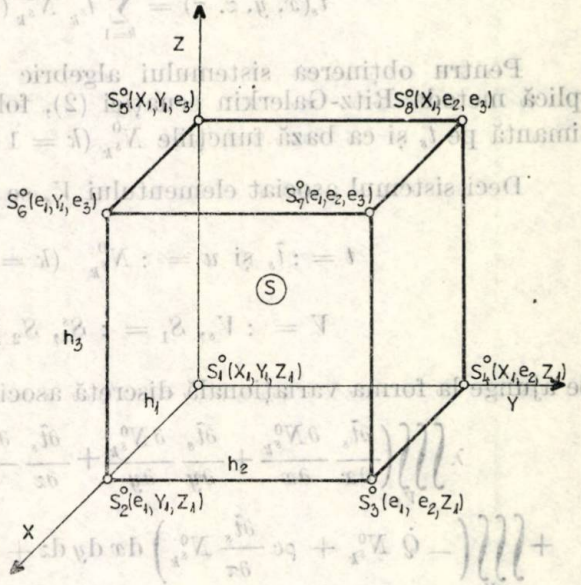


Fig. 1. — Elementul paralelipipedic utilizat.

Funcţiile de bază utilizate pentru determinarea soluţiei aproximative a ecuaţiei (2), respectiv (7), asociate elementului V_s, respectiv nodurilor acestuia, s-au calculat după cum urmează :

$$N_{s_1}^0 = -h_4(x - e_1)(y - e_2)(z - e_3);\ N_{s_2}^0 = h_4(x - x_1)(y - e_2)(z - e_3),$$
$$N_{s_3}^0 = -h_4(x - x_1)(y - y_1)(z - e_3);\ N_{s_4}^0 = h_4(x - e_1)(y - y_1)(z - e_3), \tag{8}$$
$$N_{s_5}^0 = h_4(x - e_1)(y - e_2)(z - z_1);\ N_{s_6}^0 = -h_4(x - x_1)(y - e_2)(z - z_1),$$
$$N_{s_7}^0 = h_4(x - x_1)(y - y_1)(z - z_1);\ N_{s_8}^0 = -h_4(x - e_1)(y - y_1)(z - z_1),$$

unde s-au notat cu h_1, h_2, h_3 dimensiunile paralelipipedului V_s, cu x_1, y_1, z_1 coordonatele nodului s_1^0, iar $e_1 = x_1 + h_1$, $e_2 = y_1 + h_2$, $e_3 = z_1 + h_3$ şi $h_4 = 1/h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$.

Funcţia

$$\tilde{t} = \tilde{t}(x, y, z, \tau), \tag{9}$$

care aproximează cîmpul de temperatură, se defineşte după cum urmează. Dacă se notează cu

$$t_{s_k} = t(x_{s_k}, y_{s_k}, z_{s_k}, \tau) \tag{10}$$

valoarea cîmpului de temperatură în nodul s_k^0 la momentul τ (considerat parametru), atunci cîmpul de temperatură asociat elementului V_s este aproximat de funcţia $\tilde{t}_s$ definită prin

$$\tilde{t}_s(x, y, z. \tau) = \sum_{k=1}^{8} t_{s_k} N_{s_k}^0(x, y, z). \tag{11}$$

Pentru obţinerea sistemului algebric asociat elementului V_s se aplică metoda Ritz-Galerkin ecuaţiei (2), folosind ecuaţia (7), ca aproximantă pe $\tilde{t}_s$ şi ca bază funcţiile $N_{s_k}^0$ $(k = 1 - 8)$.

Deci sistemul asociat elementului V_s se obţine din ecuaţia (7) prin

$$\begin{gathered} t = : \tilde{t}_s \text{ şi } u = : N_{s_k}^0 \quad (k = 1 - 8), \\ V = : V_s,\ S_1 = : S_1^s,\ S_2 = : S_2^s. \end{gathered} \tag{12}$$

Se ajunge la forma variaţională discretă asociată elementului V_s :

$$\lambda \iiint_{V_s} \left(\frac{\partial \tilde{t}_s}{\partial x} \frac{\partial N_{s_k}^0}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{t}_s}{\partial y} \frac{\partial N_{s_k}^0}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{t}_s}{\partial z} \frac{\partial N_{s_k}^0}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z +$$

$$+ \iiint_{V_s} \left(- \dot{Q} N_{s_k}^0 + \rho c \frac{\partial \tilde{t}_s}{\partial \tau} N_{s_k}^0 \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + \alpha \iint_{S_1^s} (t_{S_1^s} - t_2) N_{s_k}^0 \, \mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \iint_{S_2^s} q N_{s_k}^0 \, \mathrm{d}\sigma = 0, \quad k = 1 - 8). \tag{13}$$

Rezolvarea calculelor pentru integralele relaţiei (13) se face ţinînd seamă de relaţiile (8) şi (11), regăsindu-se în final după efectuarea şirurilor de operaţii, pentru $k = 1$.

$$\frac{\lambda}{36} h_4 \Big[4t_{s_1}(A_1 + A_2 + A_3) + 2t_{s_2}(A_1 - 2A_2 + A_3) + t_{s_3}(A_1 - 2A_2 - 2A_3) +$$

$$+ 2t_{s_4}(A_1 + A_2 - 2A_3) - 2t_{s_5}(2A_1 - A_2 - A_3) - t_{s_6}(2A_1 + 2A_2 - A_3) -$$

$$- t_{s_7}(A_1 + A_2 + A_3) - t_{s_8}(2A_1 - A_2 + 2A_3) \Big] + \frac{\rho c h_1 h_2 h_3}{216} (8\dot{t}_{s_1} + 4\dot{t}_{s_2} 2\dot{t}_{s_2} +$$

$$+ 4\dot{t}_{s_4} + 4\dot{t}_{s_5} 2\dot{t}_{s_6} + \dot{t}_{s_7} + 2\dot{t}_{s_8}) = \dot{Q} \frac{h_1 h_2 h_3}{8} - I_{S_1}^1 - I_{S_2}^1, \tag{14}$$

relaţie care s-a scris şi pentru celalte noduri $(k = 2 \div 8)$, făcîndu-se notaţiile :

$$A_1 = (h_1 h_2)^2;\ A_2 = (h_2 h_3)^2;\ A_3 = (h_1 h_3)^2;\ \dot{t}_{s_k} = \frac{\partial t_{s_k}}{\partial \tau}, \tag{15}$$

$I^1_{S_1}$ şi $I^1_{S_2}$ fiind integralele provenite din condiţiile la limită, după considerarea condiţiillor concrete de lucru.

După efectuarea şirului de calcule se obţin ecuaţii analoage pentru $k = 2 \div 8$. Astfel (de exemplu pentru $k = 8$), rezultă :

$$\frac{\lambda}{36} h_4 \Big[- t_{s_1}(2A_1 - A_2 + 2A_3) - t_{s_2}(A_1 + A_2 + A_3) - t_{s_3}(2A_1 + 2A_2 - A_3) - 2t_{s_4}(2A_1 - A_2 - A_3) + 2t_{s_5}(A_1 + A_2 - 2A_3) + t_{s_6}(A_1 - 2A_2 - 2A_3) + 2t_{s_7}(A_1 - 2A_2 + A_3) + 4t_{s_8}(A_1 + A_2 + A_3) \Big] +$$

$$+ \frac{\rho c h_1 h_2 h_3}{216} (2\dot{t}_{s_1} + \dot{t}_{s_2} + 2\dot{t}_{s_3} + 4\dot{t}_{s_4} + 4\dot{t}_{s_5} + 2\dot{t}_{s_6} + 4\dot{t}_{s_7} + 8\dot{t}_{s_8}) =$$

$$= \dot{Q} \frac{h_1 h_2 h_3}{8} - I^8_{S_1} - I^8_{S_2}. \tag{16}$$

Făcînd o discretizare a timpului, considerîndu-se temperatura t_0 la timpul τ_0 (începutul procesului) ca fiind cunoscută şi beneficiind de forma ecuaţiilor de tipul (14), care alcătuiesc sistemul, se poate aplica pentru integrarea lui $\dot{t}_{s_k}$ formula lui Leibnitz-Newton şi formula trapezelor pentru aproximarea integralelor din $t(\tau)$.

În caz general, pentru intervalul de timp τ_{i-1}, τ_i s-au obţinut ecuaţii de forma (pentru $k = 1$) :

$$P[4t_{s_{1,i}}(A_1 + A_2 + A_3) + 2t_{s_{2,i}}(A_1 - 2A_2 + A_3) + t_{s_{3,i}}(A_1 - 2A_2 - 2A_3) + 2t_{s_{4,i}}(A_1 + A_2 - 2A_3) - 2t_{s_{5,i}}(2A_1 - A_2 - A_3) - t_{s_{6,i}}(2A_1 + 2A_2 - A_3) - t_{s_{7,i}}(A_1 + A_2 + A_3) - t_{s_{8,i}}(2A_1 - A_2 + 2A_3)] + M(8t_{s_{1,i}} + 4t_{s_{2,i}} + 2t_{s_{3,i}} + 4t_{s_{4,i}} + 4t_{s_{5,i}} + 2t_{s_{6,i}} + t_{s_{7,i}} + 2t_{s_{8,i}}) = C^s_{1,i-1}, \tag{17}$$

unde s-a notat

$$P = \frac{\lambda}{36} h_4 \frac{\tau_i - \tau_{i-1}}{2}; \quad M = \frac{\rho c h_1 h_2 h_3}{216}, \tag{18}$$

$C^s_{1,i-1}$ fiind termenul liber al ecuaţiei, corespunzător lui $k = 1$.

Scriind ecuaţiile de tipul (17) şi pentru celelalte noduri ($k = 2 \div 8$), după ordonare şi notarea coeficienţilor necunoscutelor cu T^s_{kj}, unde $k =$ = const. şi $j = 1 \div 8$ (pentru fiecare nod $k = 1 \div 8$) se obţine scrierea condensată a sistemului de 8×8 (sub formă matriceală) :

$$\begin{bmatrix} T^s_{11} & T^s_{12} & \dots & T^s_{18} \\ T^s_{21} & T_{22} & \dots & T^s_{28} \\ \vdots & & & \\ & & \dots & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_{s_{1,i}} \\ t_{s_{2,i}} \\ \vdots \\ t_{s_{8,i}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C^s_{1,i-1} \\ C_{2,i-1} \\ \vdots \\ C_{8,i-1} \end{Bmatrix}. \tag{19}$$

Programul construit a fost inițial testat pe modelul unei plăci cu sursă termică centrală, apoi pe cel al unui perete încălzit pe o față a sa (parțial sau total) de diverse surse termice. S-au studiat astfel diverse cazuri de transfer global de căldură prin plăci limitate (situația unui perete de mașină-unealtă, element constructiv de bază într-o astfel de structură) așezate într-un spațiu nelimitat scăldate de un fluid (ipoteză care se apropie cel mai mult de cazul real de funcționare al mașinii).

Avînd în vedere testările efectuate s-a elaborat în continuare programul de calcul, schema logică a sa fiind cuprinsă în figura 2.

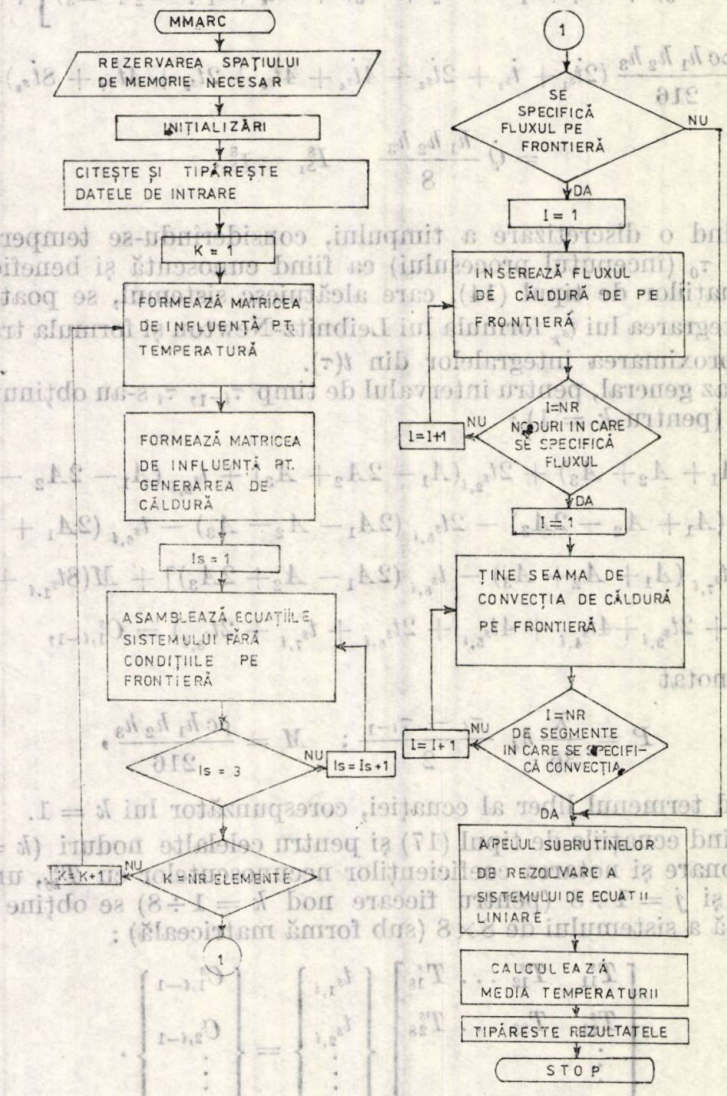


Fig. 2. — Schema logică a programului M MARC.

Trebuie subliniată flexibilitatea programului și arătat faptul că modul de concepere a lui permite aplicarea sa marii majorități a cazurilor reale de procese de transfer termic, care apar la mașini-unelte în general.

În final programul oferă cîmpul de temperatură în toate nodurile rețelei, precum și media temperaturii corpului. Programul a fost scris în limbajul FORTRAN, rulat pe calculatorul CORAL 4011, subsistemul AMS, și folosește două subrutine SOLMIX și SOLVE necesare rezolvării sistemului de ecuații liniare, prin metoda lui Gauss.

Primită la redacție la 7 august 1985

BIBLIOGRAFIE

1. M. POPA, *Cercetări privind optimizarea comportării termice a mașinilor de rectificat*, Institutul Politehnic Cluj-Napoca, Teză de doctorat, 1984.
2. A. SANDU, ș.a., *Contribuții la studiul influenței deformațiilor termice asupra preciziei mașinilor orizontale de alezat și frezat cu comandă program numerică*, Inst. Politehnic, București, Teză de doctorat, 1979.
3. J. SCHUNK, *Untersuchungen über die Auswirkung thermisch bedingter Verformungen auf die Arbeitsgenauigkeit von Werkzeugmaschinen*, Tech. Hochsch. Aachen, Diss. 1965.
4. L. ZANGS, *Berechnung des thermischen Verhaltenes von Werkzeugmaschinen*, Techn. Hochsch. Aachen, Diss. 1975.

ANALIZA STĂRII DE DEFORMAȚII A UNUI ELEMENT ELASTIC AXIAL-SIMETRIC CU PEREȚI SUBȚIRI

de DAN-MIHAI ȘTEFĂNESCU, M. AL. SANDU,
Institutul Politehnic, București

Lucrarea prezintă rezultatele analizei prin metoda elementelor finite a stării de deformații a unui element elastic de formă complexă, care se poate utiliza în construcția captoarelor pentru măsurarea forțelor și momentelor de torsiune față de o axă, folosind traductoare electrotensometrice rezistive.

1. INTRODUCERE

Elementul elastic este componenta de bază a captoarelor pentru măsurarea diferitelor mărimi mecanice. În cazul în care pe elementul elastic se lipesc traductoare electrotensometrice rezistive (TER), este necesar ca deformațiile acestuia să fie suficient de mari, pentru ca semnalele electrice obținute să fie ușor de sesizat de punțile tensometrice [2]. De aceea, TER se vor amplasa pe direcțiile și în pozițiile în care deformațiile specifice (ε) sînt maxime și neliniaritățile curbei sarcină-deformație sînt minime. De obicei, stabilirea acestor poziții se face prin metode experimentale [6] sau, pentru elemente elastice mai simple, prin calcule analitice [5].

În ultimii ani au fost elaborate programe pentru calculul de rezistență în regim static și dinamic al structurilor elastice, programe bazate pe metode numerice. Cele mai utilizate dintre acestea folosesc metoda elementelor finite [3, 11].

2. PRINCIPIUL METODEI

Ideea de bază a metodei este de a discretiza mediul continuu într-un număr de subregiuni (elemente finite), care interacționează între ele într-un număr finit de puncte (noduri). Forma elementelor finite depinde de geometria structurii din care fac parte și de particularitățile problemei ce se studiază, iar proprietățile fiecărui element trebuie să fie astfel formulate, încît să se descrie cît mai fidel comportarea ansamblului. Astfel, calculul unei structuri elastice, considerată ca mediu continuu cu număr infinit de legături, se reduce la calculul unui sistem cu un număr finit de grade de libertate.

În lucrare se exemplifică aplicarea metodei elementelor finite pentru determinarea stării de deformații dintr-un element elastic compus dintr-un înveliș toroidal situat între două învelișuri cilindrice scurte (alte exemple sînt prezentate în lucrările [8, 9]). Din cele ce urmează rezultă avantajele acestui tip nou de element elastic, propus pentru a fi utilizat în construcția captoarelor pentru măsurarea forțelor și momentelor de torsiune față de o axă.

Calculul s-a efectuat cu ajutorul programului SAP IV [1], pe un calculator FELIX C-256.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 2, 1986, P. 204—211

3. MODELUL DE CALCUL

În diferite lucrări apare ca element elastic în construcția captoarelor cu TER, pentru măsurarea forțelor pe o direcție, elementul de forma unui înveliș toroidal (fig. 1). Traductoarele sînt lipite pe direcție circumferențială, în planul median al torului. Traductoarele dinspre exterior suferă deformația specifică ε_1 (întindere), iar cele dinspre interior, deformația specifică ε_2 (scurtare).

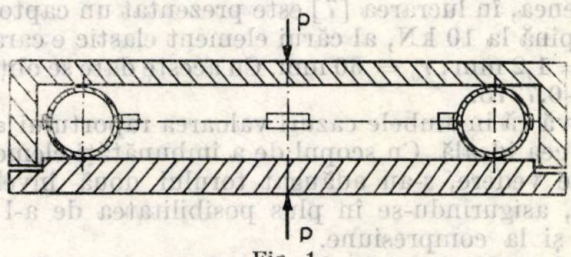


Fig. 1

În lucrarea [5] se dau următoarele relații de calcul (vezi notațiile din fig. 2):

$$\varepsilon_1 = \frac{2(1-\nu^2)\left(1+\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{8}\mu^3\right)}{\pi^2 E r_0 h\mu(1+\mu)\left(1+\frac{5}{8}\mu^2+\frac{7}{16}\mu^4+\frac{3}{2}\frac{\eta^2}{\mu^2}\right)}P, \tag{1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2(1-\nu^2)\left(-1+\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{8}\mu^3\right)}{\pi^2 E r_0 h\mu(1-\mu)\left(1+\frac{5}{8}\mu^2+\frac{7}{16}\mu^4+\frac{3}{2}\frac{\eta^2}{\mu^2}\right)}P \tag{2}$$

unde

$$\mu = \frac{\rho}{r_0} \quad \text{și} \quad \eta = \frac{h}{\rho},$$

în care ν reprezintă coeficientul lui Poisson; P — forța de compresiune; ρ — raza cercului generator al torului; r_0 — raza cercului director al torului; h — grosimea învelișului toroidal.

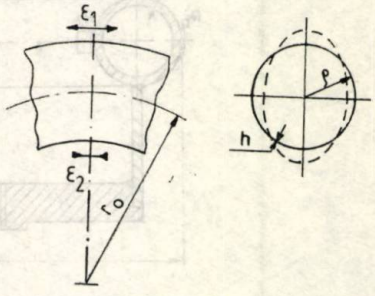


Fig. 2

Raportul celor două deformații specifice este

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{1+\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{8}\mu^3}{-1+\frac{1}{4}\mu+\frac{1}{8}\mu^3}. \tag{3}$$

Ideal ar fi ca acest raport să fie egal cu -1, adică ε_1 și ε_2 să fie egale în modul și de semne contrare, pentru că atunci se obține sensibilitatea maximă a captorului. Se observă din (3) că $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \to 1$, numai dacă $\mu \to 0$, adică $r_0 \gg \rho$, ceea ce ar atrage creșterea considerabilă a dimensiunilor elementului elastic. De aceea, se adoptă soluții de compromis.

Elementul elastic al captorului pentru măsurarea forțelor pînă la 38 kN, fabricat de firma Davy and United Instruments [4], are următoarele dimensiuni: $\rho = 8$ mm; $h = 0{,}914$ mm; $r_0 = 72$ mm. În acest caz: $\mu = 0{,}1111$ și rezultă $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = -0{,}8565$.

De asemenea, în lucrarea [7] este prezentat un captor pentru măsurarea forțelor pînă la 10 kN, al cărui element elastic e caracterizat de $\rho = 10$ mm; $h = 1{,}2$ mm; $r_0 = 60$ mm. Cu aceste date se obține $\mu = 0{,}1666$, deci $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = -0{,}7773$.

Se observă că în ambele cazuri valoarea raportului $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ este destul de departe de cea ideală. Cu scopul de a îmbunătăți elementul elastic din acest punct de vedere, s-au adăugat torului două învelișuri cilindrice scurte (fig. 3), asigurîndu-se în plus posibilitatea de a-l solicita atît la întindere, cît și la compresiune.

Dintre cele nouă tipuri de elemente finite cu care lucrează programul SAP IV, la această problemă s-a folosit tipul 4 : element de stare plană — varianta axial simetrică (fig. 4). Datorită simetriei geometrice și de încărcare este suficient să se studieze starea de deformații dintr-un plan axial.

S-a elaborat un model de calcul (fig. 5), care conține 264 noduri și 198 elemente. Pentru fiecare nod au fost precizate coordonatele în raport cu un sistem de axe rectangulare *YOZ*. Nodurilor care descriu elemente de tip 4 le sînt permise două grade libertate : translații după axele sistemului

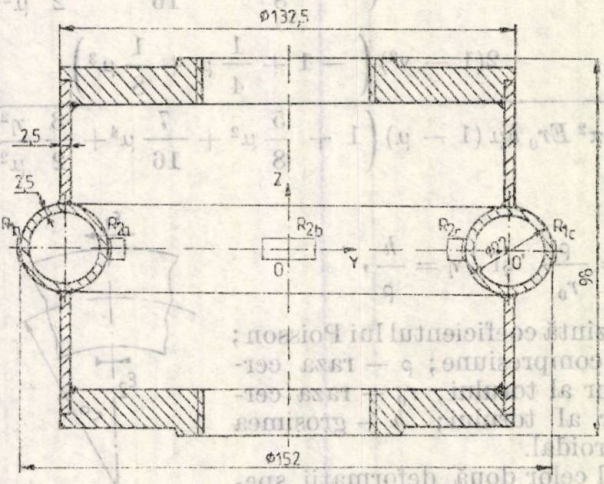
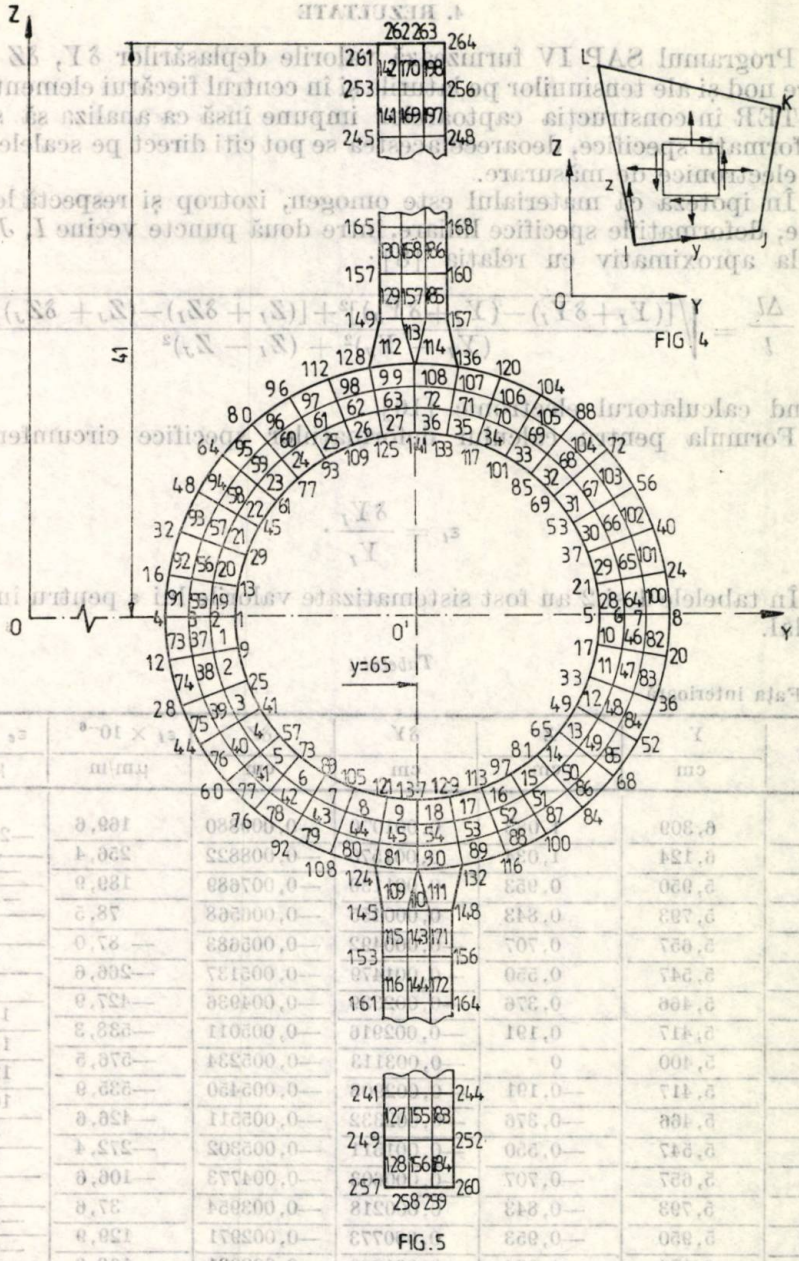


Fig. 3

ales. Elementul elastic s-a considerat încastrat la bază (nodurile 257—260 complet blocate) și ghidat pe verticală la vîrf (nodurilor 261—264 le este suprimată translația δY). Pentru elemente s-au precizat nodurile care le definesc și, ca date de material, modul de elasticitate(E) și constanta lui Poisson (ν).



Încărcarea exterioară a fost dată prin forțe concentrate egale, aplicate în nodurile 261—264 și orientate pe direcția $-Z$ (compresiune). Au fost stabilite patru cazuri de încărcare, pentru a putea aprecia din rezultate (tensiuni) forța maximă ce se poate măsura, așa încît să nu fie depășită limita de elasticitate în nici un punct al structurii.

4. REZULTATE

Programul SAP IV furnizează valorile deplasărilor δY, δZ pentru fiecare nod şi ale tensiunilor pe laturile şi în centrul fiecărui element. Folosirea TER în construcţia captoarelor impune însă ca analiza să se facă în deformaţii specifice, deoarece acestea se pot citi direct pe scalele aparatelor electronice de măsurare.

În ipoteza că materialul este omogen, izotrop şi respectă legea lui Hooke, deformaţiile specifice liniare, între două puncte vecine I, J se pot calcula aproximativ cu relaţia [8]:

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} = \sqrt{\frac{[(Y_I+\delta Y_I)-(Y_J+\delta Y_J)]^2+[(Z_I+\delta Z_I)-(Z_J+\delta Z_J)]^2}{(Y_I-Y_J)^2+(Z_I-Z_J)^2}} - 1, \tag{4}$$

folosind calculatorul electronic [10].

Formula pentru calculul deformaţiilor specifice circumferenţiale este:

$$\varepsilon_t = \frac{\delta Y_I}{Y_I}. \tag{5}$$

În tabelele 1 şi 2 au fost sistematizate valorile lui ε pentru învelişul toroidal.

Tabelul 1

Faţa interioară

Nod	Y cm	Z cm	δY cm	δZ cm	$\varepsilon_t \times 10^{-6}$ μm/m	$\varepsilon_e \times 10^{-6}$ μm/m
128	6,309	1,083	0,001070	—0,009880	169,6	—2133,0
112	6,124	1,034	0,001570	—0,008822	256,4	—393,3
96	5,950	0,953	0,001130	—0,007689	189,9	—449,1
80	5,793	0,843	0,000455	—0,006568	78,5	248,5
64	5,657	0,707	—0,000492	—0,005683	— 87,0	637,9
48	5,547	0,550	—0,001479	—0,005137	—266,6	949,8
32	5,466	0,376	—0,002339	—0,004936	—427,9	1152,6
16	5,417	0,191	—0,002916	—0,005011	—538,3	1248,9
4	5,400	0	—0,003113	—0,005234	—576,5	1217,6
12	5,417	—0,191	—0,002903	—0,005450	—535,9	1073,7
28	5,466	—0,376	—0,002332	—0,005511	—426,6	826,3
44	5,547	—0,550	—0,001511	—0,005302	—272,4	471,8
60	5,657	—0,707	—0,000603	—0,004773	—106,6	24,4
76	5,793	—0,843	0,000218	—0,003954	37,6	—536,2
92	5,950	—0,953	0,000773	—0,002971	129,9	—983,1
108	6,124	—1,034	0,001000	—0,002031	163,3	—2054,0
124	6,309	—1,083	0,000775	—0,001330	122,8	

Cu rezultatele astfel obţinute, au fost trasate diagramele de variaţie ale deformaţiilor specifice circumferenţiale (fig. 6) şi longitudinale (fig. 7), pe suprafeţele interioară şi exterioară, în zona centrală a elementului elastic.

Tabelul 2

Fața exterioară

Nod	Y cm	Z cm	δY cm	δZ cm	$\varepsilon_t \times 10^{-6}$ μm/m	$\varepsilon_e \times 10^{-6}$ μm/m
136	6,691	1,083	0,000783	—0,009669	117,0	—1927,0
120	6,876	1,034	0,000615	—0,008859	89,4	—772,6
104	7,050	0,953	0,000904	—0,007878	128,2	—406,8
88	7,207	0,843	0,001480	—0,006915	205,4	66,2
72	7,343	0,707	0,002265	—0,006144	308,5	145,1
56	7,453	0,550	0,003086	—0,005654	414,1	370,2
40	7,534	0,376	0,003791	—0,005449	503,2	589,2
24	7,583	0,191	0,004252	—0,005469	560,7	792,6
8	7,600	0	0,004385	—0,005610	576,9	785,8
20	7,583	—0,191	0,004166	—0,005742	549,4	703,8
36	7,534	—0,376	0,003627	—0,005738	481,4	561,6
52	7,453	—0,550	0,002857	—0,005497	383,3	326,5
68	7,343	—0,707	0,001993	—0,004965	271,4	9,3
84	7,207	—0,843	0,001188	—0,004158	164,8	—478,8
100	7,050	—0,953	0,000613	—0,003172	87,0	—866,4
116	6,876	—1,034	0,000344	—0,002195	50,0	—2020,0
132	6,691	—1,083	0,000538	—0,001414	80,4	

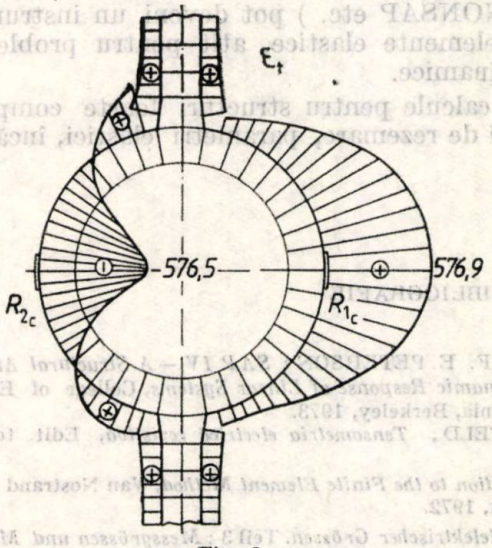


Fig. 6

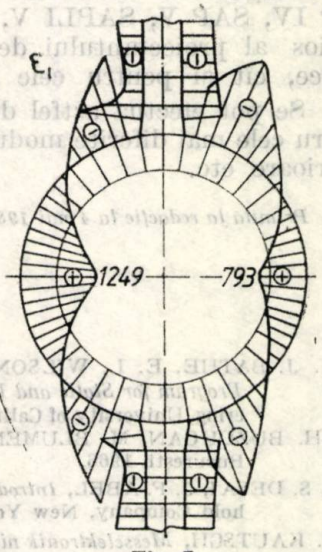


Fig. 7

Apare clar faptul că poziţiile circumferenţiale, la interior şi exterior, în planul median al torului, sînt cele mai avantajoase pentru amplasarea TER, deoarece deformaţiile respective sînt uniforme şi mari ca valoare.

În plus, din figura 6 se observă că s-a obţinut o valoare foarte apropiată de cea ideală (—1), pentru raportul :

$$\frac{\varepsilon_{t_1}}{\varepsilon_{t_2}} = \frac{576{,}9}{576{,}5} = -1{,}0007.$$

Deformaţiile longitudinale, deşi sînt mai mari decît cele circumferenţiale, nu sînt uniforme şi ating valori maxime la îmbinările cilindru — tor (efect al concentrării tensiunilor), unde nu se pot lipi traductoare tensometrice.

Valorile de pe diagrame au fost obţinute pentru o încărcare a elementului elastic : $P = 50$ kN, sarcină pentru care structura lucrează în domeniu elastic (lucru constatat din examinarea tensiunilor listate pe imprimantă pentru toate elementele).

În cazul în care se lipesc traductoare şi pe învelişurile cilindrice (pe direcţii la 45° faţă de axa de simetrie), se pot măsura şi momente de torsiune [2, 6, 7]. Aşadar, se poate realiza un captor complex pentru măsurarea forţelor (de tracţiune şi compresiune) şi momentelor de torsiune în raport cu axa de simetrie a elementului elastic.

5. CONCLUZII

Folosirea metodei elementelor finite permite o analiză completă şi rapidă a stărilor de deformaţii şi tensiuni ale elementelor elastice de forme complicate.

Programele de calcul prin metoda elementelor finite (SAP II, SAP IV, SAP V, SAPLI V, NONSAP etc.) pot deveni un instrument preţios al proiectantului de elemente elastice, atît pentru problemele statice, cît şi pentru cele dinamice.

Se pot efectua astfel de calcule pentru structuri foarte complexe, pentru cele mai diferite moduri de rezemare, parametri elastici, încărcări exterioare etc.

Primită la redacţie la 4 mai 1984

BIBLIOGRAFIE

1. K. J. BATHE, E. L. WILSON, F. E. PETERSON : *SAP IV — A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems*, College of Engineering, University of California, Berkeley, 1973.
2. GH. BUZDUGAN, M. BLUMENFELD, *Tensometria electrică rezistivă*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1966.
3. C. S. DESAI, J. F. ABEL, *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1972.
4. R. KAUTSCH, *Messelektronik nichtelektrischer Grössen*. Teil 3 : *Messgrössen und Messeinrichtungen*, Hans Holzmann Verlag, Bad Wörishofen, 1981.

5. G. F. MALIKOV, A. L. ȘNEIDERMAN, A. M. ȘULEMOVICI, *Rasceti uprugiih tensometriceskih elementov*, Izd. Mașinostroenie, Moskva. 1964.
6. D. R. MOCANU, (sub red.), *Analiza experimentală a tensiunilor*. vol. I și II, Edit.tehnică, București, 1977.
7. C. ROHRBACH, *Handbuch für elektrisches Messen mechanischer Grössen*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1967.
8. M. AL. SANDU, D. M. ȘTEFĂNESCU, *Determinarea stării de deformații și tensiuni într-un element elastic de tip taler*, Sesiunea jubiliară de comunicări științifice, Institutul politehnic București, 12 decembrie 1981.
9. D. M. ȘTEFĂNESCU, M. AL. SANDU, *Determinarea stării de deformații și tensiuni într-un element elastic tubular cu fante*, Idem.
10. D. M. ȘTEFĂNESCU, *Metode numerice în analiza deformațiilor elementelor elastice ale captoarelor*. Revista transporturilor și telecomunicațiilor, în curs de publicare.
11. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finit Element Method*, McGraw-Hill Book Company (UK) LTD, London, 1977.

H. GOERING, H.-G. ROOS, L. TOBISKA, *FINITE-ELEMENT-METHODE. Eine Einführung* (Metoda elementelor finite. O introducere), Akademie Verlag, Berlin 1985, 193 pagini, 51 figuri, 13 tabele, 30 indicații bibliografice

Analiza cu elemente finite a fost concepută inițial pentru studiul structurilor inginerești, domeniu în care a ajuns să fie astăzi de importanță fundamentală. Destul de repede a devenit însă clar că metoda elementelor finite oferă o tehnică foarte generală și eficientă pentru rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale și cu derivate parțiale. Aplicațiile și dezvoltările matematice ale metodei sînt în prezent tot atît de importante ca aplicațiile inginerești tradiționale.

Cartea de față, editată ca volumul 285 al cărților științifice de buzunar ale Editurii Academiei R.D.G., se adresează în primul rînd inginerilor și altor specialiști nematematicieni, fiind scrisă de matematicieni. În consecință, se accentuează realizarea practică a metodei, prezentîndu-se însă și principalele aspecte matematice ce contribuie la înțelegerea și aplicarea ei corectă și eficientă.

În centrul celor zece capitole stau problemele staționare, bidimensionale de ordinul doi, sînt tratate însă și unele probleme nestaționare și de ordin superior. Capitolul introductiv prezintă pe scurt domeniile în care se aplică metoda, evoluția ei și formulările inițiale. Conceptul de bază al metodei este dezvoltat pe larg în capitolul al 2-lea, cel mai extins. Se prezintă deducerea funcțiilor de formă pentru elemente finite triunghiulare și dreptunghiulare de tip Lagrange și Serendip, cît și generarea matricelor caractersitice și asamblarea lor, funcție de metoda de rezolvare a sistemului de ecuații obținut.

Diferite procedee directe (Gauss, Cholesky, soluția frontală) și indirecte (Gauss-Seidel, gradienți conjugați) pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare sînt prezentate în capitolul al 3-lea, punîndu-se în evidență avantajele și dezavantajele lor.

Capitolul al 4-lea este rezervat criteriilor pentru aprecierea convergenței h, la reducerea dimensiunilor elementelor finite. Se presupune că integralele pot fi calculate exact și domeniul de definiție este mărginit și poligonal. Problema integrării numerice este abordată în capitolul al 5-lea, ce cuprinde și formule de integrare pentru elemente finite triunghiulare și dreptunghiulare de diferite tipuri, cu specificarea ordinului de mărime al erorilor. Aproximarea frontierelor curbe face obiectul captoilului 6, ce se referă în context și la elementele finite izoparametrice.

Variante neconforme ale metodei sînt prezentate în capitolul al 7-lea, insistîndu-se asupra testelor pentru aprecierea convergenței Patch-Test ș.a.). Se dau exemple de elemente finite neconforme triunghiulare și dreptunghiulare. Pe lîngă aplicarea la ecuația Laplace se tratează și ecuația biarmonică. Procedee mixte pentru rezolvarea celor două tipuri de ecuații sînt introduse în capitolul al 8-lea. Capitolul al 9-lea cuprinde probleme nestaționare.

Ultimul capitol prezintă rezultate numerice pentru două probleme : o problemă de valori marginale pentru o ecuație de ordinul doi și o problemă de curgere staționară a unui mediu vîscos compresibil.

Cartea constituie o introducere foarte bună în principalele aspecte ale metodei elementelor finite. Este una din puținele lucrări ce-și propune și reușește să apropie dezvoltările matematice ale metodei de practică aplicării ei la rezolvarea problemelor inginerești. Expunerea este clară și concisă, cu exemplificări și rezumate ale rezultatelor teoretice în principalele capitole, ce permit — la o primă lectură — trecerea peste paragrafele mai teoretice. Pentru înțelegerea ei completă sînt suficiente cunoștințele de matematici superioare predate în institutele de învățămînt superior tehnic. Cititorului interesat i se indică lucrări ce aprofundează aspectele matematice ale metodei elementelor finite, actualmente cel mai puternic mijloc de rezolvare a unui spectru larg de probleme științifice și tehnice.

R. Friedrich

KIPER GERD (în colaborare cu Bruchwald, Edward), *Katalog einfachster Getriebebauformen mit bis zu drei Antriebsgelenken und bis zu drei Abtriebsgliedern*, Catalogul mecanismelor de structură minimă, cu maximum trei elemente conducătoare articulate și cu maximum trei elemente conduse, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982, 1040 pagini + 48 figuri.

Pornind de la necesitatea adaptării, în procesul de proiectare a unui mecanism, a structurii cinematice celei mai simple care să satisfacă condițiile cinematice impuse, autorul prezintă, sub forma unui catalog structurile minime de mecanisme avînd maximum trei elemente conducătoare

articulate, legate sau nu la bază și maximum trei elemente conduse, de asemenea legate sau nu la bază.

Autorul introduce un sistem simplu de codificare, a fiecărei structuri, astfel că proiectantul pornind de la condițiile cinematice impuse prin teme de proiectare, poate determina numerele de cod ce satisfac cerințele respective și deci are la dispoziție în catalog totalitatea celor mai simple structuri de mecanisme ce corespund temei date, pe baza acestor structuri urmează celelalte etape de proiectare a mecanismului căutat.

Valoarea practică a lucrării crește datorită prezentării modului de luare în considerație a unor cazuri speciale : cuple superioare, structuri spațiale, articulații multiple, elemente de lungime nulă, structuri complexe, mai mult de trei elemente conducătoare sau conduse ; de asemenea, sînt prezentate cinci exemple de soluționare, utilizînd catalogul, a unor probleme tehnice concrete și se fac referiri comparative asupra mecanismelor existente și a celor de structură minimă determinate prin metoda propusă de autor.

Vladimir Racoviță

W. A. LEES, *Adhesives in Engineering Design* (Adezivi în proiectarea tehnică), The Design Council London, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

În proiectarea modernă își fac din ce în ce mai mult apariția adezivii ca mijloace de ansamblare datorită avantajelor economice și tehnice pe care-i pot oferi. Utilizarea cu succes a adezivilor ca mijloace de ansamblare presupune însă cunoașterea posibilităților și limitelor acestora, utilizarea unor materiale adecvate, și a tipurilor de adezivi celor mai potriviți precum și realizarea îmbinărilor celor mai potrivite din punct de vedere al fluxului forțelor.

Scopul acestei cărți, după cum arată autorul, este de a pune la dispoziția inginerului proiectant sau din producție informațiile care să-i permită de a lua o decizie rațională privind posibilitatea utilizării adezivilor de la un caz la altul.

Volumul cuprinde o introducere și capitolele : 1. Adezivi, utilizarea și funcția lor ; 2— Proiectarea — ilustrații ; 3 — Rolul special al adezivilor anaerobici în ingineria mecanică ; 4. Pregătirea suprafețelor ; 5. Alegerea adezivilor ; 6. Evaluarea performanțelor ; 7. Probleme tehnologice. Volumul mai cuprinde Anexa 1. Aspecte fundamentale ale aderenței de K.W. Allen. Anexa 2. Un ghid privind rezistența adezivilor anaerobici la coroziune și medii agresive. Anexa 3. Conversiunea unităților de măsură și un Index.

Cartea prezentată este de un real folos tuturor celor ce au de rezolvat probleme de ansamblări cu ajutorul adezivilor.

G. Winter

S. WINKELMANN, H. HARMUTH, *Schaltbare Reibkupplungen* (Ambreiaje cu fricțiune), Springer-Verlag—Berlin, Heidelberg, New York—Tokyo, 1985, 196 pg., 157 figuri

Autorii tratează în această carte problematica ambreiajelor care transmit cuplul prin fricțiune.

Această categorie de ambreiaje, mult utilizată în construcția de mașini și cu precădere la autovehicule, este descrisă sub aspectul tuturor detaliilor constructive, dar și al posibilităților de aplicare.

Dinamica procesului de ambreiere și solicitările care apar sînt analizate fără utilizarea unui aparat matematic complicat, deci cu o orientare accentuată către practică. Sînt tratate sistemele cu una și cu două mase în ceea ce privește cuplul, timpii și lucrul de ambreiere, solicitarea termică a suprafețelor de fricțiune etc.

Cuprinsul este următorul :

Indexul notațiilor folosite.

1. Introducere ; 2. Baze teoretice ; 3. Ambreiajul în aplicații practice ; 4. Calcule în vederea aplicațiilor practice ; 5. Proiectarea componentelor importante ale ambreiajelor ; 6. Ambreiaje realizate ; 7. Particularități ale ambreiajelor de autovehicule ; 8. Elaborarea ambreiajelor de autovehicule ; 9. Proiectarea ambreiajelor de autovehicule ; 10. Exemple ale unor construcții tipice de ambreiaje ; 11. Sisteme de fricțiune fără suprafețe de fricțiune plane ; Bibliografie ; Index.

Cartea se adresează cu precădere inginerilor din proiectare, execuție și din domeniul cercetării autovehiculelor.

G. Winter

articulate, legate sau nu la bază și maximum trei elemente conduse, de asemenea legate sau nu la bază.

Autorul introduce un sistem simplu de codificare, a fiecărei structuri, astfel că proiectantul pornind de la condițiile cinematice impuse prin teme de proiectare, poate determina numerele de cod ce satisfac cerințele respective și deci are la dispoziție în catalog totalitatea celor mai simple structuri de mecanisme ce corespund temei date, pe baza acestor structuri urmează celelalte etape de proiectare a mecanismului căutat.

Valoarea practică a lucrării crește datorită prezentării modului de luare în considerație a unor cazuri speciale: cuple superioare, structuri spațiale, articulații multiple, elemente de lungime nulă, structuri complexe, mai mult de trei elemente conducătoare sau conduse; de asemenea, sînt prezentate cinci exemple de soluționare, utilizînd catalogul, a unor probleme tehnice concrete și se fac referiri comparative asupra mecanismelor existente și a celor de structură minimă determinate prin metoda propusă de autor.

Vladimir Racoviță

W. A. LEES, *Adhesives in Engineering Design* (Adezivi în proiectarea tehnică), The Design Council London, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.

În proiectarea modernă își fac din ce în ce mai mult apariția adezivii ca mijloace de ansamblare datorită avantajelor economice și tehnice pe care-i pot oferi. Utilizarea cu succes a adezivilor ca mijloace de ansamblare presupune însă cunoașterea posibilităților și limitelor acestora, utilizarea unor materiale adecvate, și a tipurilor de adezivi celor mai potriviți precum și realizarea îmbinărilor celor mai potrivite din punct de vedere al fluxului forțelor.

Scopul acestei cărți, după cum arată autorul, este de a pune la dispoziția inginerului proiectant sau din producție informațiile care să-i permită de a lua o decizie rațională privind posibilitatea utilizării adezivilor de la un caz la altul.

Volumul cuprinde o introducere și capitolele: 1. Adezivi, utilizarea și funcția lor; 2— Proiectarea — ilustrații; 3— Rolul special al adezivilor anaerobici în ingineria mecanică; 4. Pregătirea suprafețelor; 5. Alegerea adezivilor; 6. Evaluarea performanțelor; 7. Probleme tehnologice. Volumul mai cuprinde Anexa 1. Aspecte fundamentale ale aderenței de K.W. Allen. Anexa 2. Un ghid privind rezistența adezivilor anaerobici la coresiune și medii agresive. Anexa 3. Conversiunea unităților de măsură și un Index.

Cartea prezentată este de un real folos tuturor celor ce au de rezolvat probleme de ansamblări cu ajutorul adezivilor.

G. Winter

S. WINKELMANN, H. HÄRMUTH, *Schaltbare Reibkupplungen* (Ambreiaje cu fricțiune), Springer-Verlag—Berlin, Heidelberg, New York—Tokyo, 1985, 196 pg., 157 figuri

Autorii tratează în această carte problematica ambreiajelor care transmit cuplul prin frictiune.

Această categorie de ambreiaje, mult utilizată în construcția de mașini și cu precădere la autovehicule, este descrisă sub aspectul tuturor detaliilor constructive, dar și al posibilităților de aplicare.

Dinamica procesului de ambreiere și solicitările care apar sînt analizate fără utilizarea unui aparat matematic complicat, deci cu o oricuiare accentuată către practică. Sînt tratate sistemele cu una și cu două mase în ceea ce privește cuplul, timpii și lucrul de ambreiere, solicitarea termică a suprafețelor de frictiune etc.

Cuprinsul este următorul:

Indexul notațiilor folosite.

1. Introducere; 2. Baze teoretice; 3. Ambreiajul în aplicații practice; 4. Calcule în vederea aplicațiilor practice; 5. Proiectarea componentelor importante ale ambreiajelor; 6. Ambreiaje realizate; 7. Particularități ale ambreiajelor de autovehicule; 8. Elaborarea ambreiajelor de autovehiculé; 9. Proiectarea ambreiajelor de autovehicule; 10. Exemple ale unor construcții tipice de ambreiaje; 11. Sisteme de frictiune fără suprafețe de frictiune plane; Bibliografie; Index.

Cartea se adresează cu precădere inginerilor din proiectare, execuție și din domeniul cercetării autovehiculelor.

G. Winter

RESTRICȚII TERMODINAMICE ÎN TERMOVÎSCOELASTICITATEA LINIARĂ

de IOANA LUCA
(ICECHIM),
EUGEN SOÓS
(INCREST)

Pe baza termodinamicii de tip Coleman a materialelor cu memorie slăbită se arată că tensorul termoelastic $\mathcal{E}$ este simetric, iar tensorul de relaxare $\mathcal{K}(0)$, ce caracterizează răspunsul instantaneu al materialului, este simetric și pozitiv semidefinit. Rezultatele obținute le extind pe cele analoage date de Coleman, în cazul izoterm, la procesele în care pot apărea variații de temperatură.

§1. INTRODUCERE

În cadrul unei teorii pur mecanice, Coleman și Noll au introdus în [1] conceptul de material simplu cu memorie slăbită. În [2], cei doi autori au indicat condițiile în care teoria liniară de tip Boltzmann-Volterra a materialelor vîscoelastice se regăsește ca un caz particular al modelului elaborat în [1]. O tratare termodinamică a materialelor cu memorie slăbită a fost realizată de Coleman în lucrarea [3], în care se deduc restricții impuse asupra funcționalelor constitutive neliniare de cea de a doua lege a termodinamicii, mai precis de inegalitatea lui Clausius-Duhem în forma stipulată de Truesdell și Toupin. În [4] același autor reia problema analizată în [2] și deduce restricțiile termodinamice ce se impun asupra funcției de relaxare, limitîndu-se însă la cazul proceselor *izoterme*. În această lucrare vom analiza problema cercetată în [2] și [4], fără să impunem particularizarea amintită; cu alte cuvinte, vom cerceta locul termovîscoelasticității liniare în cadrul teoriei materialelor simple cu memorie slăbită și conducție de căldură. Analiza efectuată arată, în particular, că rezultatele obținute de Coleman în [4] rămîn valabile și în cazul în care temperatura variază în cursul procesului.

Vom desemna prin $\mathbf{F}$, ρ, θ, η, ψ respectiv gradientul deformației, densitatea de masă, temperatura absolută, entropia specifică și energia liberă specifică la momentul t în particula X. Vom nota

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - 1), \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\rho}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}, \quad T = \theta - \theta_0 \quad (1.1)$$

unde $\mathbf{T}$ este tensorul tensiune al lui Cauchy la momentul t în particula X, iar θ_0 este temperatura absolută în configurația de referință de care depind $\mathbf{F}$ și funcționalele de răspuns, dependență care nu va fi menționată explicit în continuare.

Pe mulțime $\mathscr{A}$ a perechilor $\Lambda = (\mathbf{A}, a)$, unde $\mathbf{A}$ este un tensor de ordinul doi, iar a este un număr real, introducem operații care îi conferă structură de spațiu vectorial cu produs interior:

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \quad a_1 + a_2), \quad \alpha\Lambda = (\alpha\mathbf{A}, \alpha a), \quad \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathscr{A}, \quad \alpha \in R,$$

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 + a_1 a_2, \quad |\Lambda| = (\Lambda \cdot \Lambda)^{1/2} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + a^2)^{1/2}.$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 3, 1986, P. 217–226

MŰSZAKI EGYETEM 1848

O pereche de tipul celei de mai înainte este $\mathbf{\Omega} = (\mathbf{G}, T)$, cu $\mathbf{G}$ și T dați de $(1.1)_2$, respectiv $(1.1)_4$.

Dacă notăm

$$\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{S}, -\eta), \quad \mathcal{G} = (\mathcal{S}, -\ell),$$

atunci ecuațiile constitutive pentru materiale simple cu conducție de căldură

$$\mathbf{S}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}}(\mathbf{G}^t(s), \theta^t(s)), \quad \eta(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\ell}}(\mathbf{G}^t(s), \theta^t(s)), \quad \psi(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\mathbf{G}^t(s), \theta^t(s)).$$

a căror dependență de $\mathbf{G}^t(s)$ este o consecință a principiului obiectivității, se pot scrie compact astfel

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{\Omega}^t(s)), \quad \psi(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\mathbf{\Omega}^t(s)), \tag{1.2}$$

funcția $\mathbf{\Omega}^t(s) = \mathbf{\Omega}(t-s)$, $0 \leqslant s < \infty$, reprezentînd istoria totală pînă la momentul t a lui $\mathbf{\Omega}$. Ipoteza constitutivă privind fluxul de căldură este cea din lucrarea [2] a lui Coleman, dar ea nu intervine explicit în considerațiile noastre și, în consecință, nu o menționăm.

Introducînd istoria diferență

$$\mathbf{\Omega}_d^t(s) = \mathbf{\Omega}^t(s) - \mathbf{\Omega}(t)\,1^+(s),$$

unde $1^+(s) = 1$, $0 \leqslant s < \infty$, ecuațiile (1.2) iau forma

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{\Omega}_d^t(s)\,;\,\mathbf{\Omega}(t)), \quad \psi(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\mathbf{\Omega}_d^t(s)\,;\,\mathbf{\Omega}(t)). \tag{1.3}$$

Vom mai utiliza notația

$$\mathbf{0}^+(s) = (\mathbf{0}\,1^+(s),\ 01^+(s)),\ 0 \leqslant s < \infty.$$

§2. MATERIALE CU MEMORIE SLĂBITĂ. REZULTATE DIN [3] și [4]

Pentru considerațiile din paragraful următor este necesară o prezentare succintă a unor rezultate din [3] și [4].

Fie h o funcție de influență ($h : [0, \infty) \to (0, \infty)$, monoton descrescătoare, continuă și astfel încît $\lim_{s\to\infty} s^{1/2+\delta} h(s) = 0$, cu $\delta > 0$) și $\mathbf{\Lambda}_1(\ )$, $\mathbf{\Lambda}_2(\ )$ două funcții definite pe axa reală pozitivă cu valori în $\mathscr{A}$; produsul lor scalar $<\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2>$ este definit prin relația

$$<\mathbf{\Lambda}_1, \mathbf{\Lambda}_2> = \int_0^\infty h^2(s)\,\mathbf{\Lambda}_1(s)\cdot\mathbf{\Lambda}_2(s)\,ds.$$

Norma generată de acest produs scalar este dată de

$$\|\Lambda\| = \left(\int_0^\infty \hbar^2 (s) |\, \Lambda (s) |^2 \, ds \right)^{1/2}.$$

Dacă valorile lui $\Lambda_1(\quad)$ și $\Lambda_2(\quad)$ diferă numai pe o mulțime de măsură nulă spunem că ele sînt echivalente și notăm $\Lambda_1(\quad) = \Lambda_2(\quad)$. Mulțimea claselor de echivalență astfel definite, cu normă finită, formează un spațiu Hilbert, notat cu $\mathscr{H}$.

Principiul memoriei slăbite a lui Coleman (vezi [3]) constă în presupunerea că funcționalele Π și $\mathcal{G}$ din (1.3) au un domeniu comun de definiție $\mathscr{D} \subset \mathscr{H}$ în vecinătatea istoriei nule $\mathbf{0}^+(\quad)$ și pe un $\mathscr{D}$ au derivate Fréchet și derivate parțiale *continue* de ordinul 2 și respectiv 1; mai precis, au loc relațiile

$$\prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t (s) + \Phi (s) ; \Omega (t) + \Theta) = \prod_{s=0}^{\infty} (_d^t\Omega (s) ; \Omega (t)) + \delta \prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t(s) ; \Omega(t) |\, \Phi (s)) +$$

$$+ \partial_\Omega \prod_{s=0}^{\infty} (\, \Omega_d^t (s) ; \Omega(t)) \cdot \Theta + \frac{1}{2} \delta^2 \prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t (s) ; \Omega(t) |\, \Phi (s), \Phi (s)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \partial_\Omega^2 \prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t (s) \; ; \Omega (t)) \, [\Theta, \Theta] + o (\|\Phi\|^2 + |\Theta|^2), \qquad (2.1)$$

$$\mathcal{G}_j \prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t (s) + \Phi (s) ; \Omega (t) + \Theta) = \mathcal{G}_j \prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t (s) ; \Omega (t)) + \delta \mathcal{G}_j \prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t (s) ; \Omega(t) |\, \Phi(s)) +$$

$$+ \partial_\Omega \mathcal{G}_j (\Omega_d^t (s) ; \Omega(t)) \, [\Theta] + o(\| \Phi \| + |\Theta|). \qquad (2.2)$$

Pentru un element arbitrar Λ din $\mathscr{A}$, funcția $\Lambda 1^+(s)$ este din $\mathscr{H}$, iar pentru $\Omega(t)$ și $\Omega_d^t(\quad)$ fixați, scalarul $\delta \prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t(s) ; \Omega(t) |\, \Lambda 1^+(s))$ este o funcțională liniară de ∇. Urmează că există o unică funcțională $\nabla \prod_{s=0}^{\infty}$, cu valori în $\mathscr{A}$, astfel încît

$$\delta \prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t (s) ; \Omega(t) |\, \Lambda 1^+ (s)) = \nabla \prod_{s=0}^{\infty} (\Omega_d^t (s) ; \Omega(t)) \cdot \Lambda.$$

Urmîndu-l pe Coleman [3], definim un operator liniar D care aplică funcționale cu valori scalare $\prod_{s=0}^{\infty}$ în funcționale $D \prod_{s=0}^{\infty}$ cu valori vectori în $\mathscr{A}$ prin relația

$$D \prod_{s=0}^{\infty} = \partial_\Omega \prod_{s=0}^{\infty} - \nabla \prod_{s=0}^{\infty}.$$

Acest operator mai poate fi introdus prin relaţiile:

$$D\prod_{s=0}^{\infty}(\Omega^t(s))\cdot\Lambda = \partial_\Omega\prod_{s=0}^{\infty}(\Omega_d^t(s);\ \Omega(t)\cdot\Lambda - \delta\prod_{s=0}^{\infty}(\Omega_d^t(s);\Omega(t)\Big|\Lambda 1^+(s)) =$$

$$= -\frac{d}{d\nu}\prod_{s=0}^{\infty}(\Omega_d^t(s)+\nu\Lambda 1^+(s);\Omega(t))\Big|_{\nu=0} + \frac{d}{d\nu}\prod_{s=0}^{\infty}(\Omega_d^t(s);\Omega(t)+\nu\Lambda)\Big|_{\nu=0} =$$

$$= \frac{d}{d\nu}\prod_{s=0}^{\infty}(\Omega_d^t(s) - \nu\Lambda 1^+(s);\ \Omega(t)+\nu\Lambda)\Big|_{\nu=0}\cdot \qquad (2.3)$$

Reamintim acum două rezultate importante demonstrate de Coleman în lucrărea [3]. El a arătat (vezi [3], relaţia (6.24)) că funcţionala constitutivă $\mathcal{G}$ poate fi exprimată prin funcţionala constitutivă Π prin următoarea relaţie (analoagă celei clasice de tip Gibbs din teoria materialelor termoelastice):

$$\mathcal{G} = D\,\Pi$$

sau

$$\Gamma(t) = \prod_{s=0}^{\infty}\mathcal{G}(\Omega_d^t(s);\Omega(t)) = D\prod_{s=0}^{\infty}(\Omega_d^t(s);\ \Omega(t)). \qquad (2.4)$$

Celălalt rezultat este demonstraţia faptului că, dintre toate istoriile $\Omega^t(\ )$ care se termină cu o aceeaşi valoare $\Omega(t)$, istoriei cu istoria diferenţă nulă îi corespunde cea mai mică valoare a energiei libere (vezi [3], relaţia (8.21)); adică

$$\prod_{s=0}^{\infty}(\Omega_d^t(s);\Omega(t)) \geqslant \prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^+(s);\ \Omega(t)).$$

Urmează că, pentru orice Ω din $\mathscr{A}$ şi $\Phi(\ )$ din $\mathscr{D}$,

$$\delta\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^+(s);\ \Omega|\Phi s)) = 0\ ,\ \delta^2\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^+(s);\ \Omega|\Phi(s),\Phi(s)\geqslant 0 \qquad (2.5)$$

sau, echivalent,

$$\frac{d}{d\lambda}\prod_{s=0}^{\infty}(\lambda\Phi(s);\ \Omega)\Big|_{\lambda=0} = 0\ ;\quad \frac{d^2}{d\lambda^2}\prod_{s=0}^{\infty}(\lambda\Phi(s);\Omega)\Big|_{\lambda=0}\geqslant 0. \qquad (2.6)$$

§3. TERMOVÎSCOELASTICITATE LINIARĂ. RESTRICŢII CONSTITUTIVE

În acest paragraf vom particulariza rezultatele amintite în paragraful precedent la cazul teoriei liniare, *fără* să restrîngem analiza la situaţii pur mecanice (ca în [2]) sau la procese izoterme (ca în [4]). Adoptînd o cale

similară celei din paragrafele 7 și 8 ale lucrării, [4], vom obține expresiile tensiunii și entropiei pentru un material simplu cu memorie slăbită și conducție de căldură, expresii care apar în teoria clasică a termovîscoelasticității liniare (vezi, de exemplu, Christensen [5], cap. 3). Din analiza efectuată va rezulta că un material simplu care satisface principiul memoriei slăbite al lui Coleman se comportă, cu o bună aproximație, ca un material termovîscoelastic de tip Boltzmann-Volterra, cînd este supus la mici deformații și la mici variații de temperatură, într-un sens pe care îl vom preciza. De asemenea, vom arăta că restricții asupra funcțiilor constitutive analoage celor obținute de Coleman în [4] rezultă și în cazul în care se iau în considerație *procese neizoterme*,

Fie $\mathbf{H}$ și T definiți prin

$$\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1}, \quad T = \theta - \theta_0,$$

unde $\mathbf{F}$ și θ sînt, respectiv, gradientul deformației și temperatura absolută la momentul t în particulara X, iar θ_0 este temperatura în X în configurația de referință. Notăm

$$\varepsilon = \sup_{-\infty<\tau<\infty} \{|\mathbf{H}(\tau)| + |T(\tau)/\theta_0|\}$$

și spunem că perechea $(\mathbf{H}, T)$ este „*mică la toate timpurile*" dacă

$$\mathbf{H} = 0(\varepsilon), T = 0(\varepsilon) \quad \text{și} \quad \varepsilon \ll 1.$$

Expresia $(1.3)_1$ a lui Γ ia o formă mai simplă cînd ea se liniarizează neglijînd toți termenii de ordinul $0(\varepsilon^2)$. Pentru liniarizare sînt necesare următoarele evaluări

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = 0(\varepsilon), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) = 0(\varepsilon), \quad \mathbf{G} = \mathbf{E} + 0(\varepsilon^2),$$

$$\rho = \rho_0 (\det \mathbf{F})^{-1} = \rho_0 (1 - \operatorname{tr} \mathbf{E}) + 0(\varepsilon^2) = \rho_0 + 0(\varepsilon). \tag{3.1}$$

Mărimile $\mathbf{E}$ și $\mathbf{W}$ astfel definite se numesc, respectiv, tensorul deformației infinitezimale și tensorul rotației infinitezimale, iar ρ_0 este densitatea de masă în configurația de referință.

În continuare sînt utile relațiile

$$\Gamma_0 = (\mathbf{S}_0, -\eta_0) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{0}^+(s); \mathbf{0}), \quad \Lambda = (\mathbf{E}, T),$$

așa încît $\rho_0 \mathbf{S}_0 = \mathbf{T}_0$ reprezintă tensiunea reziduală (de tip Cauchy) și

$$\Lambda = 0(\varepsilon).$$

Pentru $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\Omega_d^t)(s)\ ;\ \Omega(t))$ avem următoarea „dezvoltare" în jurul istoriei nule (vezi 2.2).

$$\Gamma(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\Omega_d^t(s)\ ;\ \Omega(t)) =$$

$$= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s)\ ;\ \mathbf{0}) + \delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s)\ ;\ \mathbf{0}\,|\,\Omega_d^t(s)) + \partial_{\Omega}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s)\ ;\mathbf{0})[\Omega(t)] + o(\varepsilon) =$$

$$= \Gamma_0 + \delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s)\ ;\ \mathbf{0}\,|\,\Omega_d^t(s)) + \partial_{\Omega}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s)\ ;\ \mathbf{0})\ [\Omega(t)] + o(\varepsilon) =$$

$$= D\prod_{s=0}^{\infty}(\Omega_d^t(s)\ ;\ \Omega(t)). \tag{3.2}$$

Deoarece $\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s)\ ;\mathbf{0}\cdot)$ este o funcțională liniară și continuă pe spațiul hilbertian $\mathscr{H}$, ea are următoarea reprezentare integrală:

$$\rho_0\,\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s)\ ;\ \mathbf{0}\,|\,\Omega_d^t(s)) = \int_{s=0}^{\infty}\mathfrak{L}(s)\,[\Omega_d^t(s)]\,ds,$$

unde

$$\mathfrak{L}(s) \in \mathrm{Lin}\,(\mathscr{A}, \mathscr{A}),\quad 0 \leqslant s < \infty,$$

$$\int_0^{\infty} h^{-2}(s)\,|\mathfrak{L}(s)|^2\,ds < \infty,\ \text{cu}\ \ |\mathfrak{L}(s)| = \max_{|\Phi|\leqslant 1}\mathfrak{L}(s)\,[\Phi]|.$$

Funcția de relaxare $\mathfrak{R}(s)$ este introdusă prin relația

$$\mathfrak{R}(s) = -\int_s^{\infty}\mathfrak{L}(s)\,ds,$$

pe baza căreia rezultă imediat

$$\mathfrak{R}'(s) = \mathfrak{L}(s)\qquad \lim_{s\to\infty}\mathfrak{R}(s) = 0$$

și

$$\rho_0\,\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s)\ ;\ \mathbf{0}\,|\,\Omega_d^t(s)) = \mathfrak{R}(0)\,[\Omega(t)] + \int_0^{\infty}\mathfrak{R}'(s)\,[\Omega^t(s)]\,ds.$$

Înainte de a deduce expresiile tensiunii și entropiei, vom arăta *simetria* operatorilor $\mathcal{C}$ și $\mathfrak{R}(0)$, precum și *pozitiv semidefinirea* lui $\mathfrak{R}(0)$, unde

$$\mathcal{C} = \rho_6\,\partial_{\Omega}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s)\ ;\ \mathbf{0}) \in \mathrm{Lin}\,(\mathscr{A}, \mathscr{A}).$$

Proprietățile amintite le au și funcțiile constitutive, analoage celor de mai înainte, din cazul viscoelasticității liniare izoterme analizat în [4]. $\mathcal{C}$ este analogul modulului de termoelasticitate de tip Hooke, în sensul că el caracterizează răspunsul materialului în cazul în care este supus la o istorie constantă în cadrul aproximației liniare.

Demonstrăm mai întîi simetria operatorului $\mathcal{C}$. Pentru aceasta considerăm istoriile constante $\mathbf{\Phi}^t(s) = \mathbf{\Phi}1^+(s)$ și $\mathbf{\Lambda}^t(s) = \mathbf{\Lambda}1^+(s)$. Dacă ținem seama de (2.4) și (2.3) găsim

$$\mathbf{\Lambda}\cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{\Omega}_d^t(s);\mathbf{\Omega}(t)) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{\Omega}_d^t(s)+\nu\mathbf{\Lambda}1^+(s);\mathbf{\Omega}(t))\Big|_{\nu=0} +$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{\Omega}_d^t(s);\mathbf{\Omega}(t)+\nu\mathbf{\Lambda})\Big|_{\nu=0}.$$

Cu acest rezultat, cu definiția lui $\mathcal{C}$ și relația $(2.5)_1$, avem

$$\mathbf{\Lambda}\cdot\mathcal{C}[\mathbf{\Phi}] = \rho_0\,\mathbf{\Lambda}\cdot\partial_{\mathbf{\Omega}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0})[\mathbf{\Phi}] = \rho_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\mathbf{\Lambda}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\lambda\mathbf{\Phi})\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= -\rho_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\prod_{s=0}^{\infty}(\nu\mathbf{\Lambda}1^+(s);\lambda\mathbf{\Phi})\Big|_{\nu=0} +\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^+(s);\lambda\mathbf{\Phi}+\nu\mathbf{\Lambda})\Big|_{\nu=0}\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= -\rho_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\delta\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^+(s);\lambda\mathbf{\Phi}|\,\mathbf{\Lambda}1^+(s))\right\}_{\lambda=0} +$$

$$+\rho_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^+(s);\lambda\mathbf{\Phi}+\nu\mathbf{\Lambda})\Big|_{\nu=0}\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \mathbf{\Phi}\cdot\partial_{\mathbf{\Omega}}\,\partial_{\mathbf{\Omega}}\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0})[\mathbf{\Lambda}] = \mathbf{\Lambda}\cdot\partial_{\mathbf{\Omega}}\,\partial_{\mathbf{\Omega}}\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0})[\mathbf{\Phi}] = \mathbf{\Phi}\cdot\mathcal{C}[\mathbf{\Lambda}].$$

De aici rezultă simetria lui $\mathcal{C}$ și , în plus, *expresia* sa în funcție de $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathcal{C} = \rho_0\,\partial_{\mathbf{\Omega}}\,\partial_{\mathbf{\Omega}}\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}).$$

Trecem la a arăta simetria și pozitiv semidefinirea lui $\mathfrak{K}(0)$. Pentru aceasta considerăm istoria

$$\mathbf{\Phi}(\tau) = \begin{cases}\mathbf{0} & \text{pentru } -\infty < \tau < t,\\ \mathbf{\Phi} & \text{pentru } \tau = t.\end{cases}$$

Rezultă

$$\mathbf{\Phi}^t(s) \doteq \mathbf{0}^+(s),\ \mathbf{\Phi}^t_d(s) \doteq -\mathbf{\Phi}1^+(s),$$

deci

$$\int_0^\infty \mathcal{K}'(s)\,[\mathbf{\Phi}^t(s)]\,ds = \mathbf{0}$$

şi

$$\rho_0\,\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}|\mathbf{\Phi}^t_d(s)) = -\rho_0\,\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}|\mathbf{\Phi}\,1^+(s)).$$

Urmează că

$$-\mathcal{K}(0)\,[\mathbf{\Phi}] = \rho_0\,\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}\ \Big|\ \mathbf{\Phi}1^+(s)) = -\rho_0 \frac{d}{d\lambda} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\lambda\,\mathbf{\Phi}1^+(s);\mathbf{0})\Big|_{\lambda=0}.$$

Înmulţind scalar relaţia de mai sus cu $\mathbf{\Lambda}$ şi folosind (2.3.) şi (2.6) obţinem succesiv

$$-\mathbf{\Lambda}\cdot\mathcal{K}(0)\,[\mathbf{\Phi}] = \rho_0 \frac{d}{d\lambda}\left\{\mathbf{\Lambda}\cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\lambda\,\mathbf{\Phi}\,1^+(s)\,\mathbf{0}\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \rho_0 \frac{d}{d\lambda}\left\{-\frac{d}{d\nu}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\lambda\,\mathbf{\Phi}\,1^+(s) + \nu\,\mathbf{\Lambda}\,1^+(s);\mathbf{0})\Big|_{\nu=0} + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{d\nu}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\lambda\,\mathbf{\Phi}\,1^+(s);\nu\,\mathbf{\Lambda})\Big|_{\nu=0}\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= -\rho_0 \frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{d}{d\nu}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}((\lambda\mathbf{\Phi} + \nu\mathbf{\Lambda})\,1^+(s);\mathbf{0})\Big|_{\nu=0} + \right.$$

$$\left. + \rho_0 \frac{d}{d\nu}\left\{\frac{d}{d\lambda}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\lambda\,\mathbf{\Phi}\,1^+(s);\nu\,\mathbf{\Lambda})\Big|_{\lambda=0}\right\}_{\nu=0} =\right.$$

$$= -\rho_0\,\mathbf{\Lambda}\cdot\nabla\nabla\overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0})[\mathbf{\Phi}] + \rho_0 \frac{d}{d\nu}\left\{\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\mathbf{0}^+(s);\nu\,\mathbf{\Lambda}\ \Big|\ \mathbf{\Phi}1^+(s))\right\}_{\nu=0} =$$

$$= -\rho_0\,\mathbf{\Lambda}\cdot\nabla\nabla\overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0})\,[\mathbf{\Phi}] = -\rho_0\,\Phi\cdot\nabla\nabla\overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0})[\mathbf{\Lambda}].$$

De aici rezultă atît simetria lui $\mathcal{K}(0)$ cît şi expresia sa în funcţie de $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathcal{K}(0) = \rho_0\,\nabla\nabla\overset{\infty}{\underset{s=0}{\prod}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}).$$

Pozitiv semidefinirea lui $\mathcal{K}(0)$ urmează din expresia obținută mai sus și folosind inegalitatea $(2.6)_2$:

$$\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathcal{K}(0)[\boldsymbol{\Phi}] = \rho_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\prod_{s=0}^{\infty}(\lambda+\nu)\ \boldsymbol{\Phi}\,1^{+}(s);\mathbf{0})\Big|_{\nu=0}\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \rho_0 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}\prod_{s=0}^{\infty}(\lambda\,\boldsymbol{\Phi}\,1^{+}(s);\mathbf{0})\Big|_{\lambda=0} \geqslant 0.$$

Pentru operatorii $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}(s)$ și $\mathcal{K}(0)$ avem următoarele *descompuneri* la scrierea cărora ținem seama de proprietățile lui $\mathcal{C}$ și $\mathcal{K}(0)$ obținute mai înainte

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathscr{C} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & -c \end{bmatrix}, \mathcal{K}(s) = \begin{bmatrix} \mathscr{K}(s) & -\mathbf{K}(s) \\ -\mathbf{L}(s) & -k(s) \end{bmatrix}, \mathcal{K}(0) = \begin{bmatrix} \mathscr{K}(0) & -\mathbf{K}(0) \\ -\mathbf{K}(0) & -k(0) \end{bmatrix},$$

unde $\mathcal{C}$ este un tensor simetric de ordinul patru, $\mathbf{M}$ un tensor simetric de ordinul doi, c un scalar, $\mathscr{K}(s)$ un tensor de ordinul patru, $\mathbf{K}(s)$ și $\mathbf{L}(s)$ tensori simetrici de ordinul doi, $k(s)$ un scalar; $k(0) \leqslant 0$, iar $\mathscr{K}(0)$ este un tensor simetric și pozitiv semidefinit, ultimul rezultat fiind obținut de Coleman *numai* pentru procese izoterme.

Cu notațiile introduse, liniarizînd dezvoltarea (3.2) și ținînd seama de (3.1), se obține

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{E}\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0\mathbf{E} - (\operatorname{tr}\mathbf{E})\,\mathbf{T}_0 + \mathbf{W}\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\mathbf{W} + \mathscr{C}[\mathbf{E}] - \mathbf{M}T +$$

$$+\mathscr{K}(0)[\mathbf{E}] - \mathbf{K}(0)\ T + \int_0^{\infty}\{\mathscr{K}'(s)\,[\mathbf{E}^t(s)] - \mathbf{K}'(s)\,T^t(s)\}\mathrm{d}s + o(\varepsilon),$$

$$\rho_0\,\eta = \rho_0\,\eta_0 + \mathbf{M}\cdot\mathbf{E} + c\,T + \mathbf{K}(0)\cdot\mathbf{E} + k(0)\,T + \tag{3.3}$$

$$+\int_0^{\infty}\{\mathbf{L}'(s)\cdot\mathbf{E}^t(s) + k'(s)T^t(s)\}\,\mathrm{d}s + o(\varepsilon).$$

Rezultatele obținute în acest paragraf pot fi condensate în următoarea

Teoremă: *Răspunsul unui material simplu cu memorie slăbită și conducție de căldură la mici deformații și mici variații de temperatură este caracterizat de ecuațiile constitutive* (3.3), *în care tensorul termoelastic* $\mathcal{C} = \rho_0\,\partial_\Omega\,\partial_\Omega\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^{+}(s);\mathbf{0})$ *este simetric, iar tensorul de relaxare al răspunsului instantaneu* $\mathcal{K}(0) = \rho_0\,\nabla\nabla\prod_{s=0}^{\infty}(\mathbf{0}^{+}(s);\mathbf{0})$ *este simetric și pozitiv semidefinit.*

În încheiere observăm că în cadrul teoriei lui Coleman *nu* se pot demonstra pozitiv definirea tensorului termoelastic $\mathcal{C}$, simetria și pozitiv semidefinirea funcției de relaxare $\mathcal{R}(s)$ și faptul că, componentele acestui tensor sînt funcții monoton descrescătoare de s, proprietăți constatate experimental (pentru detalii vezi [6], Cap. VI). Prin urmare, dacă cerem ca termodinamica să permită deducerea pe cale teoretică a principalelor proprietăți ale funcțiilor și funcționalelor constitutive observate experimental, atunci putem spune că inegalitatea Clausius-Duhem, stipulată de Truesdell și Toupin, *nu* reprezintă forma definitivă a celei de a doua legi a termodinamicii nici în cazul materialelor simple (vezi și [7], pp. 41 — 48).

Primită la redacție la 25 mai 1985

BIBLIOGRAFIE

1. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals with application in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., **6**, 355 — 370 (1960).
2. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Foundations of linear viscoelasticity*, Rev. Modern Phys., **33**, 239 — 249, 1961.
3. B. D. COLEMAN, Thermodynamics of materials with memory, Arch. Rational Mech. Anal., **17**, 1 — 46 (1964).
4. B. D. COLEMAN, *On thermodynamics, strain impulses, and viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **17**, 230 — 254 (1964).
5. R. M. CHRISTENSEN, *Theory of viscoelasticity, An introduction*, Academic Press, New York, London 1971.
6. W. A. DAY, *The thermodynamics of simple materials with fading memory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
7. C. TRUESDELL, *Rational thermodynamics*, with an appendix by C. C. Wang, Second edition, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984.

MIȘCAREA NEPERMANENTĂ MIXTĂ A APEI ÎN GALERIILE ȘI CONDUCTELE UZINELOR HIDROELECTRICE ȘI STAȚIILOR DE POMPARE

de V. JELER, I. JELEV

Institutul de cercetări hidrotehnice București

În lucrare se prezintă o analiză comparativă a ecuațiilor mișcării nepermanente a apei în canale și conducte sub presiune, evidențiindu-se condițiile de transformare și identificare a acestora, în momentul de tranziție de la o curgere cu nivel liber la o curgere sub presiune și invers. Identitatea matematică a ecuațiilor, este confirmată de analogia existentă între curgerea cu nivel liber și curgerea sub presiune a apei într-o conductă prevăzută în lungul generatoarei superioare cu o fantă de lățime determinată.

Pe baza studiilor efectuate s-a pus la punct un program pentru calculul automat al mișcărilor nepermanente mixte ale apei în galerii și conducte.

Se prezintă rezultatele obținute pentru mai multe galerii de evacuare a apei de la uzine hidroelectrice și stații de pompare.

1. INTRODUCERE

Sistemele hidroenergetice actuale prezintă o mare complexitate atît din punct de vedere a configurației geometrice, cît și din punct de vedere hidraulic. Multe uzine hidroelectrice și stații de pompare sînt prevăzute cu conducte sau galerii de aducțiune și de evacuare a apei, în care regimurile hidraulice tranzitorii se caracterizează prin alternanța în timp și spațiu a condițiilor de curgere a apei cu nivel liber cu condițiile de curgere sub presiune. Referirile din literatura de specialitate privind studiul teoretic al unor astfel de cazuri sînt relativ reduse.

Într-un articol publicat în anul 1964 în „La Houille Blanche" [2], Cunge și Wegner reluînd o idee mai veche, a profesorului Preissmann *) [1], propun pentru rezolvarea unor astfel de mișcări mixte un model matematic bazat pe sistemul de ecuații Saint-Venant, transformînd mișcarea sub presiune într-o mișcare cu nivel liber, prin practicarea unei fante de lățime mică la partea superioară a galeriei sub presiune (fig. 1*a*, *b* și *c*).

Pentru integrarea sistemului de ecuații Saint-Venant se folosește un algoritm propus de autori pentru rezolvarea mișcărilor cu nivel liber.

Modelul propus de Cunge și Wegner în [2] a fost utilizat ulterior în cadrul SOGREAH.

În Statele Unite, Ch. Song de la Universitatea din Minnesota a dezvoltat o metodă de calcul bazată pe separarea domeniului studiat în două zone distincte, una cu nivel liber, alta sub presiune, cu urmărirea modului de propagare a suprafeței de separație dintre cele două zone, în lungul galeriilor studiate [6]. În Marea Britanie, Marsden și Fox utili-

*) În articolul citat, profesorul Preissmann, a făcut următoarea observație de natură matematică : pentru ca sistemul de ecuații Saint-Venant să descrie o mișcare sub presiune, lățimea B a secțiunii trnsversale la tavanul galeriei trebuie să fie nulă. Aceasta conduce la o nedeterminare matematică în sistemul de ecuații care descrie mișcarea nepermanentă a apei, nedeterminare care poate fi înlăturată prin introducerea unei fante de lățime mică în lungul generatoarei superioare a galeriei.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 3, 1986, P. 227—251

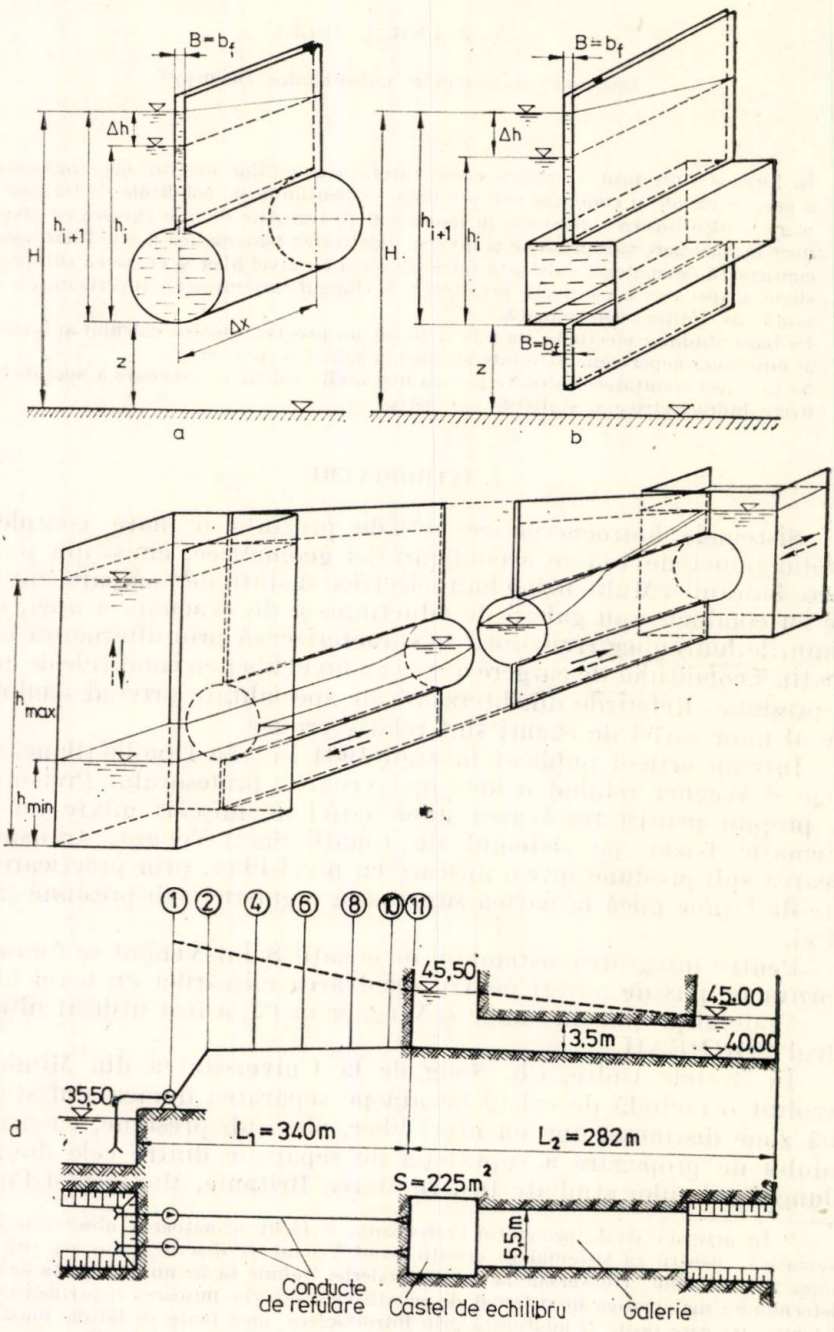


Fig. 1*a* — 1*c*. — Conducte și galerii sub presiune și cu nivel liber.
Fig. 1*d*. — Schema galeriei și conductelor de refulare.

zează metoda caracteristicilor pentru rezolvarea unor probleme de separare a coloanei de apă în punctele înalte ale unei conducte, în fenomenul de lovitură de berbec [7].

2. ECUAȚIILE MIȘCĂRII NEPERMANENTE A APEI ÎN CANALE, GALERII ȘI CONDUCTE SUB PRESIUNE

În cele ce urmează vom prezenta un mod diferit de abordare a problemei față de cel din lucrările menționate.

Mișcarea nepermanentă a apei din canale sau galerii cu curgere liberă este descrisă de sistemul de ecuații Saint-Venant,

— ecuația mișcării :

$$\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{Q^2}{K^2}-i_0=0, \tag{1.1}$$

— ecuația de continuitate :

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0, \tag{1.2}$$

unde h este adîncimea apei, v — viteza medie a apei în secțiune, A — aria secțiunii, Q — debitul apei, K — modulul de debit, i — panta fundului canalului sau galeriei, x — lungimea.

Avînd în vedere că $Q = Av$ și $\mathrm{d}A = B\,\mathrm{d}h$, sistemul de ecuații (1) se mai poate scrie

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g(I-i_0)=0,\\ \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{v}{B}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{A}{B}\frac{\partial v}{\partial x}=0,\end{gathered} \tag{2}$$

unde B este lățimea curentului apei la suprafața liberă, iar I — panta hidraulică.

Ecuațiile (2) mai pot fi scrise sub forma [8]

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g(I-i_0)=0,\\ \frac{\partial h}{\partial t}+v\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{A}{B}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{v}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}}=0.\end{gathered} \tag{3}$$

În cazul unei galerii sau unui canal prismatic cu secțiune constantă, ecuațiile (3) devin :

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g(I-i_0)=0,\\ \frac{\partial h}{\partial t}+v\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{A}{B}\frac{\partial v}{\partial x}=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Ecuațiile mișcării nepermanente în conducte sub presiune sînt:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial H}{\partial x} + gI = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + v\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a^2}{g}\frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{(H-Z)=\text{const.}} + vi_0 = 0, \tag{5}$$

unde a este celeritatea, iar H reprezintă înălțimea piezometrică față de un plan orizontal de referință.

Ținînd seama de faptul că în galeriile sub presiune (fig. 1*a* și *b*) $H = z + h$ și $i_0 = \sin \alpha_0 = -\frac{\partial z}{\partial x}$, unde z este cota fundului galeriei, iar $h = p/\gamma$ este sarcina măsurată în m.c.a. (p reprezintă presiunea măsurată la fundul galeriei, γ — greutatea specifică a apei), ecuațiile (5) devin:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + g(I - i_0) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a^2}{g}\frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}} = 0.$$

Pentru o conductă sau galerie cu secțiune constantă, ecuația (6) capătă următoarea formă simplificată

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + g(I - i_0) = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{a^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

Pentru modelarea matematică unitară și corectă a mișcării mixte a apei cu nivel liber și sub presiune cu ajutorul sistemului de ecuații Saint-Venant, este necesar ca acesta să fie identic, din punct de vedere al structurii, cu sistemul de ecuații care descrie mișcarea apei sub presiune, începînd din momentul și locul în care galeria se pune sub presiune.

Se observă că prima ecuație din sistemul (3) este identică cu prima ecuație din sistemul (6). Al treilea și al patrulea termen din ecuațiile de continuitate ale sistemelor (3) și (6) sînt diferiți. Condiția de identitate este

$$\frac{A}{B} = \frac{a^2}{g}. \tag{8}$$

Condiția (8) conduce la următoarea relație pentru determinarea mărimii B, care în acest caz devine lățimea fantei:

$$B = g\frac{A}{a^2} = b_f. \tag{9}$$

Pentru calculul lăţimii fantei, valoarea celerităţii a se determină cu ajutorul relaţiilor folosite pentru galerii şi conducte [9].

Pentru o conductă de oţel, celeritatea se calculează cu formula

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ee}}}. \tag{10}$$

Pentru o conductă cu pereţii de beton

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{E}\frac{B^2 + c^2}{c^2 - b^2}}}. \tag{11}$$

În cazul unei galerii circulare săpate în stîncă, viteza de propagare a sunetului în apă se determină cu formula

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{E_2}}}, \tag{12}$$

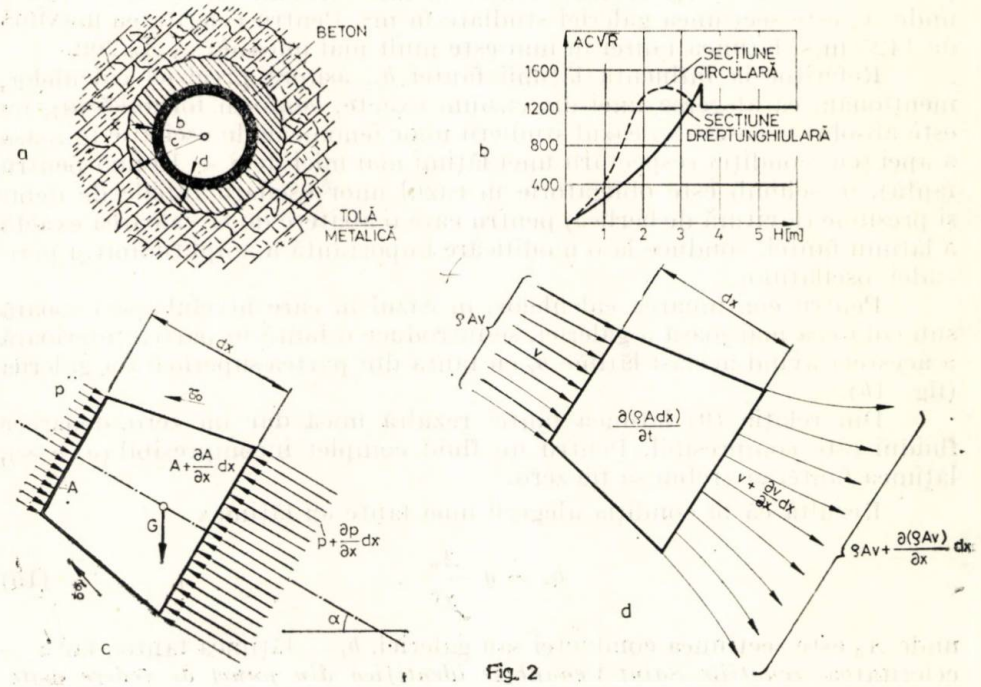


Fig. 2

Fig. 2*a*, 2*b*. — Secţiunea transversală prin galerie şi variaţia modulului de debit.
Fig. 2*c*, 2*d*. — Schemă de calcul.

iar în cazul unei galerii circulare săpată în stîncă cu manta de beton şi căptuşită cu tolă metalică (fig. 2*a*) ,

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{Ee} b (1 - \lambda_3)}}, \tag{13}$$

unde

$$\lambda_3 = \frac{\frac{b^2}{E e}}{\frac{b^2}{E e} + \frac{c^2 - b^2}{2cE_1} + \frac{(m_2 + 1)b}{m_2}}. \tag{14}$$

În relaţiile de mai sus ε este modulul de elasticitate al apei; E — modulul de elasticitate al oţelului; E_1 — modulul de elasticitate al betonului, E_2 — modulul de elasticitate al rocii în care este executată galeria; e — grosimea pereţilor de oţel; c — raza exterioară a mantalei de beton; b — raza interioară a mantalei de beton.

Întrucît pentru o conductă sau galerie atît secţiunea A cît şi celeritatea a, au valori determinate, lăţimea B a fantei are de asemenea o valoare bine determinată. De exemplu, pentru o celeritate minimă de 500 m/s şi o secţiune $A = A_0$, lăţimea fantei în mm trebuie să fie $b_f = A_0/25$, unde A_0 este secţiunea galeriei studiate în m^2. Pentru celeritatea maximă de 1425 m/s, lăţimea fantei în mm este mult mai mică, $b_f = A_0/200$.

Referitor la influenţa lăţimii fantei b_f, asupra preciziei calculelor, menţionăm că alegerea unei dimensiuni exacte, conform formulei (9), nu este absolut necesară în cazul studierii unor fenomene de oscilaţie în masă a apei (cu condiţia respectării unei lăţimi mai mici de 8 ÷ 10 mm pentru fantă), în schimb este obligatorie în cazul unor oscilaţii rapide de debit şi presiune (lovitură de berbec) pentru care o abatere de la valoarea exactă a lăţimii fantei, conduce la o modificare importantă a amplitudinii şi perioadei oscilaţiilor.

Pentru continuarea calculelor, în cazul în care nivelul apei coboară sub cota cea mai joasă a galeriei, se introduce o fantă în partea inferioară a acesteia avînd aceiaşi lăţime b_f cu fanta din partea superioară a galeriei (fig. 1*b*).

Din relaţia (9) lăţimea fantei rezultă mică dar nu zero, deoarece fluidul este compresibil. Pentru un fluid complet incompresibil ($a \to \infty$), lăţimea fantei ar trebui să fie zero.

Rezultă că în condiţia alegerii unei fante cu lăţimea

$$b_f = g \frac{A_0}{a^2}, \tag{15}$$

unde A_0 este secţiunea conductei sau galeriei, b_f — lăţimea fantei, iar a — celeritatea, *ecuaţiile Saint-Venant se identifică din punct de vedere matematic cu ecuaţiile mişcării nepermanente a fluidelor compresibile în conducte sub presiune.*

În consecință, metoda de rezolvare a unor mișcări nepermanente ale apei sub presiune, prin transformarea mișcării sub presiune într-o mișcare cu nivel liber, nu este limitată, atîta timp cît este respectată condiția (9), prin alegerea corectă a lățimii b_f a fantei (conform formulei 15).

Limitele metodei depind în principal de algoritmul de calcul.

Alegerea unui algoritm adecvat oferă posibilitatea rezolvării oricărei probleme de mișcare nepermanentă a apei cu nivel liber și sub presiune, cu variații lente sau rapide de debit.

Pentru completarea expunerii se arată modul de obținere al formei generale a ecuațiilor mișcării nepermanente mixte a apei în galerii și conducte, din care prin particularizare rezultă sistemul de ecuații Saint-Venant și sistemul de ecuații ce descriu mișcarea nepermanentă a apei în conducte sub presiune. Considerînd un element fluid de lungimea dx (fig. 2 *c*) și punînd condiția de echilibru a proiecției pe direcția Ox a forțelor elementare ce acționează asupra volumului respectiv, obținem

$$pA + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial A}{\partial x}dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\left(A + \frac{\partial A}{\partial x}dx\right) + \\ + \gamma \sin\alpha\left(A + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dx - \tau_0\pi D\,dx = \\ = \rho\left(A + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dx\frac{dv}{dt}, \qquad (16)$$

unde τ_0 este efortul unitar tangențial ce acționează pe suprafața laterală a elementului fluid considerat.

Efectuînd calculele din paranteze, ecuația (16) se poate scrie desfășurat astfel:

$$pA + p\frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{(dx)^2}{2} - pA - \frac{\partial(pA)}{\partial x}dx - \\ - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x}(dx)^2 + \gamma\sin\alpha\left(A + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dx - \tau_0\pi D dx = \\ = \rho A\,dx\frac{dv}{dt} + \rho\frac{\partial A}{\partial x}\frac{(dx)^2}{2}\frac{dv}{dt}. \qquad (17)$$

După simplificări și neglijarea infiniților mici de ordinul doi, ecuația (17) devine:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\gamma}{\rho}\sin\alpha + \frac{4\tau_0}{\rho D} + \frac{dv}{dt} = 0. \qquad (18)$$

Înlocuind presiunea p cu sarcina h (sau adîncimea apei h), din (18) obținem:

$$g\frac{\partial h}{\partial x} - gi_0 + \frac{4\tau_0}{\rho D} + \frac{dv}{dt} = 0. \qquad (19)$$

Înlocuind efortul unitar tangențial τ_0 cu expresia $\tau_0 = [(\rho f)/8]v|v|$, din (19) obținem forma finală a ecuației de mișcare

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + g(I - i_0) = 0, \tag{20}$$

unde $I = \frac{f}{2gD} v|v|$ este panta hidraulică.

Ecuația de continuitate se obține ținînd seama de faptul că în cazul cel mai general secțiunea A este o funcție de coordonata longitudinală x și de sarcina h, ce la rîndul ei este o funcție de spațiu și timp : $A = A[h(x, t), x]$.

Aplicînd legea conservării masei la elementul fluid din figura 2*d*, obținem

$$\rho A v - \left[\rho A v + \frac{\partial(\rho A v)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\right] = \frac{\partial(\rho\, A\,\mathrm{d}x)}{\partial t} \tag{21}$$

sau, după simplificări,

$$-\frac{\partial(\rho\, A v)}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \frac{\partial(\rho A\,\mathrm{d}x)}{\partial t}. \tag{22}$$

Reația (22) se scrie desfășurat astfel :

$$-\mathrm{d}x\frac{\partial \rho}{\partial x} A v - \left[\frac{\partial A}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const}}\right]\rho v\,\mathrm{d}x - \frac{\partial v}{\partial x}\rho A\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} A\,\mathrm{d}x + \frac{\partial A}{\partial t}\rho\,\mathrm{d}x + \frac{\partial(\mathrm{d}x)}{\partial t}\rho A. \tag{23}$$

Împărțind toți termenii prin $\rho A\,\mathrm{d}x$, rezultă

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{A}\left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} - v\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}}\right] + \frac{\partial v}{\partial x} +$$

$$+ \frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}} + \frac{1}{\mathrm{d}x}\frac{\partial(\mathrm{d}x)}{\partial t} = 0. \tag{24}$$

Ținînd seama de faptul că $\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ și neglijînd deformațiile longitudinale ale conductei sau galeriei $\left(\frac{\partial(\mathrm{d}x)}{\partial t} = 0\right)$, (24) devine :

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{A}\left[\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} - v\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}}\right] + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}} = 0, \tag{25}$$

unde ε este coeficientul de compresibilitate al apei, iar ρ densitatea apei.

Ecuația (25) mai poate fi scrisă sub forma :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h}\left(1 - v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)\right] + \frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}} = 0. \tag{26}$$

Întrucît în general valoarea $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$ poate fi neglijată, (26) se scrie :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h}\right) + \frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}} = 0, \tag{27}$$

Se obține forma finală a ecuației de continuitate,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h}}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h}}\frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}} = 0. \tag{28}$$

În consecință, sistemul de ecuații cu derivate parțiale ce descriu mișcarea nepermanentă mixtă a apei în galerii și conducte, poate fi scris sub forma generală,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + g(I - i_0) = 0 \tag{29.1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u^2}{g}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{u^2}{g}\frac{v}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=\text{const.}} = 0, \tag{29.2}$$

unde

$$u = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\gamma A}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}h}}} \tag{29.3}$$

reprezintă viteza de propagare a unei perturbații în apă (undă de debit sau undă sonoră).

În condițiile mișcării nepermanente în canale sau galerii în care curgerea apei se produce cu nivel liber, există relația

$$\mathrm{d}A = B \cdot \mathrm{d}h, \tag{30}$$

astfel încît expresia vitezei de propagare (29.3) devine

$$u = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon B}{\gamma A}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_0^2} + \frac{B}{gA}}} \simeq \sqrt{g\frac{A}{B}} = c, \tag{31}$$

unde c reprezintă viteza de propagare a undei de debit la suprafaţa apei, iar a_0 — celeritatea într-un mediu lichid infinit (a_0 =1425 m/s).

Ţinînd seama de relaţiile (30) şi (31), sistemul (29) se identifică cu sistemul de ecuaţii Saint-Venant (3).

În cazul mişcării sub presiune într-o conductă sau galerie circulară cu diametrul D, grosimea peretelui e şi modulul de elasticitate E, termenul dA/dh are expresia :

$$\frac{dA}{dh} = \frac{\Delta R \pi D}{\Delta h} = \frac{\gamma \pi D^3}{4eE}, \tag{32}$$

unde ΔR reprezintă creşterea razei galeriei la o creştere Δh a presiunii. Relaţia (29.3) devine :

$$u = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E}\frac{D}{e}}} = a, \tag{33}$$

unde a reprezintă viteza de propagare a sunetului în apă într-o galerie sub presiune cu secţiune circulară. În cazul unei galerii cu secţiune oarecare, a reprezintă celeritatea în galerie şi se determină cu relaţia (29.3). Sistemul (29) se identifică în acest caz cu sistemul de ecuaţii (6), ce descrie mişcarea nepermanentă a lichidelor compresibile în conducte sub presiune.

Pentr o galerie sau canal cu secţiune constantă, sistemul (29) se identifică cu sistemul de ecuaţii (4) în cazul unei curgeri cu nivel liber şi cu sistemul (7) în cazul curgerii sub presiune.

În concluzie, pentru rezolvarea practică a problemei curgerilor mixte se pot utiliza trei tipuri de metode principale :

— metode utilizate strict în mişcări cu nivel liber (prin transformarea mişcării sub presiune într-o mişcare cu nivel liber) ;

— metode caracteristice numai mişcărilor nepermanente sub presiune (prin transformarea mişcării cu nivel liber într-o mişcare sub presiune) ;

— o combinaţie a primelor două metode şi anume metode caracteristice mişcărilor nepermanente cu nivel liber în zonele cu nivel liber şi metode caracteristice pentru mişcările nepermanente sub presiune în zonele de galerie aflate sub presiune.

3. ALGORITMUL UTILIZAT. APLICAREA PRACTICĂ A METODEI LA STUDIUL UNOR GALERII DE LA UZINE HIDROELECTRICE ŞI STAŢII DE POMPARE

Pentru rezolvarea cazurilor practice s-a pus la punct algoritmul şi programul de calcul al mişcărilor nepermanente ale apei în galerii şi conducte parţial sub presiune, parţial cu nivel liber. Programul numit „PRES" are la bază un algoritm de tipul celui utilizat curent la calculul mişcărilor nepermanente ale apei în canale [2], [3], [5], algoritm ce a fost modificat în scopul rezolvării unor mişcări tranzitorii mixte. Cît timp curgerea apei prin galerie este în întregime sub presiune sau în întregime cu nivel liber, nu apar probleme deosebite la integrarea sistemului de ecuaţii (29). De asemenea, nu sînt probleme deosebite de rezolvare a ecuaţiilor în cazul unei treceri lente de la o curgere cu nivel liber la una sub presiune şi invers.

Totuşi, aceste situaţii trebuie tratate cu atenţie.

Pentru a evita obţinerea unor rezultate eronate, se impune folosirea unui algoritm adecvat regimului cu variaţii rapide de debit şi nivel ale apei din galerie.

În cursul unui ciclu de iteraţii şirul de valori H, reprezentînd cota suprafeţei libere a apei, tinde spre soluţia H_p. Atunci cînd soluţia H_p se află în imediata apropiere a tavanului galeriei, este posibilă apariţia unor oscilaţii alternative ale valorilor propuse H deasupra şi dedesubtul cotei tavanului galeriei. Din punct de vedere matematic aceasta echivalează cu folosirea alternativă a ecuaţiilor mişcării nepermanente sub presiune şi ale ecuaţiilor mişcării apei cu nivel liber, fapt ce poate conduce la pierderea controlului asupra desfăşurării calculelor. În scopul evitării unei astfel de situaţii în cursul unui ciclu de iteraţii este necesar să se menţină viteza de propagare a undei în limitele celerităţii a (la trecerea de la o mişcare sub presiune la una cu nivel liber) sau în cele ale vitezei de propagare a unei unde de debit $c \ll a$ la trecerea de la o mişcare cu nivel liber la una sub presiune. Aceasta echivalează cu prelungirea artificială a fantei în jos, sub nivelul tavanului galeriei, sau invers, cu prelungirea pereţilor galeriei în sus. Întrucît în intervalul de tranziţie de la mişcarea cu nivel liber la mişcarea sub presiune, sau invers, artificiul menţionat introduce o eroare de calcul, este necesară reluarea calculului cu pasul de timp micşorat, pînă la obţinerea gradului de precizie dorit [8].

Programul, elaborat în condiţiile arătate mai sus, a fost aplicat cu bune rezultate la studiile efectuate pentru unele sisteme hidraulice şi galerii de secţiune dreptunghiulară şi circulară.

Pentru exemplificare se prezintă calculele efectuate pentru două sisteme hidraulice complexe la o staţie de pompare şi la o uzină hidroelectrică.

Staţia de pompare avînd un debit $Q = 45$ m^3/s., refulează prin două conducte $L = 340$ m, $D = 3$m, într-un bazin cu nivel liber cu suprafaţa de 225 m^2, care are rol de castel de echilibru. Bazinul se continuă cu o galerie de beton cu secţiune dreptunghiulară (5,5 m $\times$ 3,5 m) şi lungime $L = 182$ m (fig. 1*d*). Galeria se racordează la un canal cu nivel liber lung de 64 m şi lat de 5,5 m, care debuşează într-un lac aval al cărui nivel are variaţii lente la intervale mari de timp. Pentru intervalele de timp avînd acelaşi ordin de mărime cu durata fenomenelor tranzitorii din sistemul hidraulic studiat, nivelul în lac este practic constant.

Calculele s-au efectuat în ipoteza unei manevre de pornire şi oprire în condiţii de exploatare normală a staţiei de pompare şi în ipoteza unei opriri accidentale în timp de 5 secunde a întregului debit al staţiei. La pornirea şi oprirea în condiţii normale de exploatare a staţiei nu apar fenomene tranzitorii deosebite. În figura 3 *a* şi *b* se prezintă variaţia în timp a nivelului, respectiv a presiunii apei, precum şi variaţia debitului în mai multe secţiuni ale galeriei dreptunghiulare. În figurile 3*c* şi *d* s-a reprezentat variaţia aceloraşi mărimi în cazul unei galerii cu secţiune circulară.

Pentru o uzină hidroelectrică prevăzută cu castel de echilibru aval şi avînd o galerie de evacuare cu lungimea totală de 1000 m şi secţiunea transversală circulară cu o suprafaţă de 20,5 m^2 (fig. 4*a* şi 4*b*) s-a efectuat o manevră de pornire în două trepte. Timpul de creştere a debitului de la

10 m³/s la 40 m³/s, respectiv de la 40 m³/s la 75 m³/s a fost de 10 secunde. În tot acest timp galeria s-a aflat în permanență sub presiune. În figurile 4*b*, *c* și *d* se prezintă variația debitului și a presiunii în timp, precum și variația nivelului apei în lungul galeriei la diverși pași de timp. În figura 4*f* s-a reprezentat variația nivelului apei și a cotei piezometrice în lungul galeriei, pentru o manevră de pornire cu trecere de la o mișcare cu nivel liber la o mișcare sub presiune, în condițiile în care nivelul din canalul de evacuare aval variază în funcție de debit. Variația debitului în secțiunea de intrare și ieșire s-a reprezentat în figura 4*e*.

Alte rezultate privesc ipotezele opririi accidentale și a pornirii rapide a stației de pompare analizate. În ipoteza opririi accidentale a stației, în conductele de refulare metalice, apar mișcări tranzitorii rapid variabile

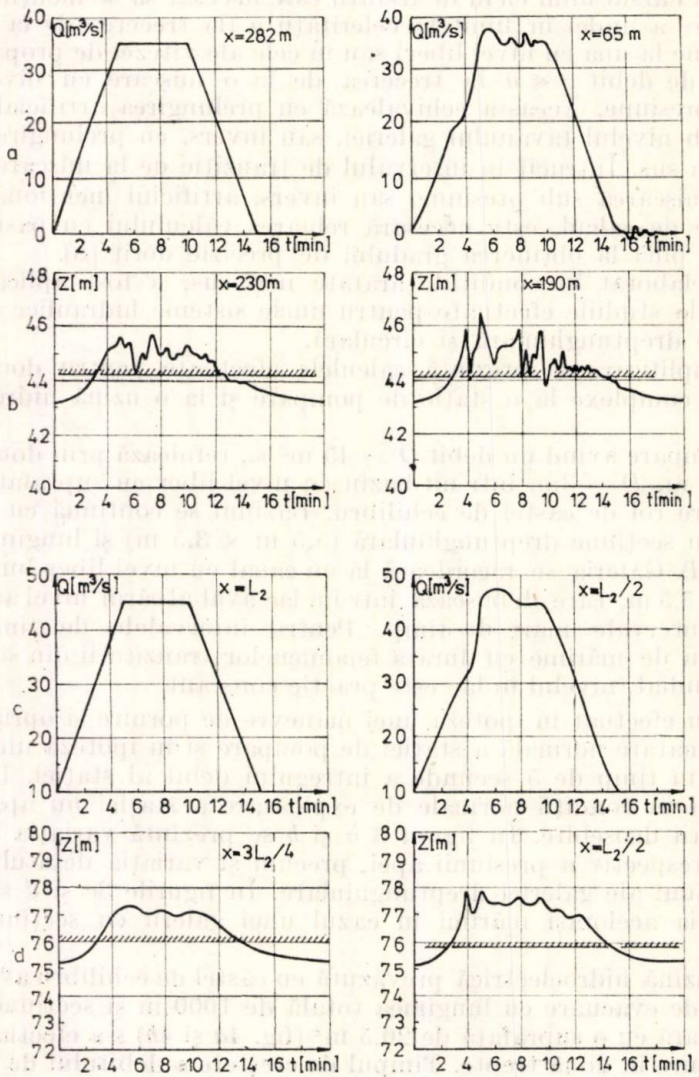


Fig.3*a*—3*d*.—Hidrografe de debite și variația nivelurilor și presiunilor în zona tavanului galeriei.

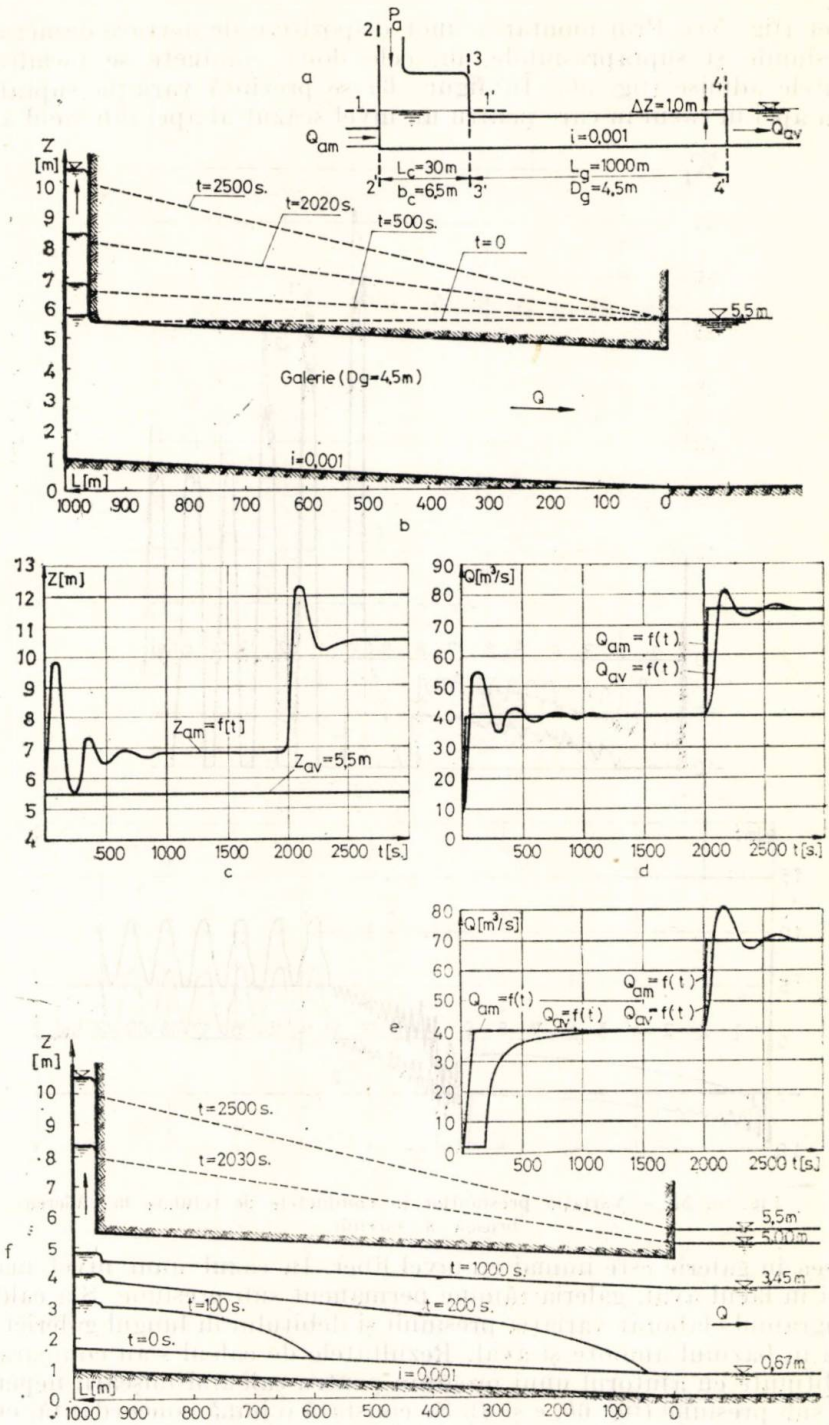
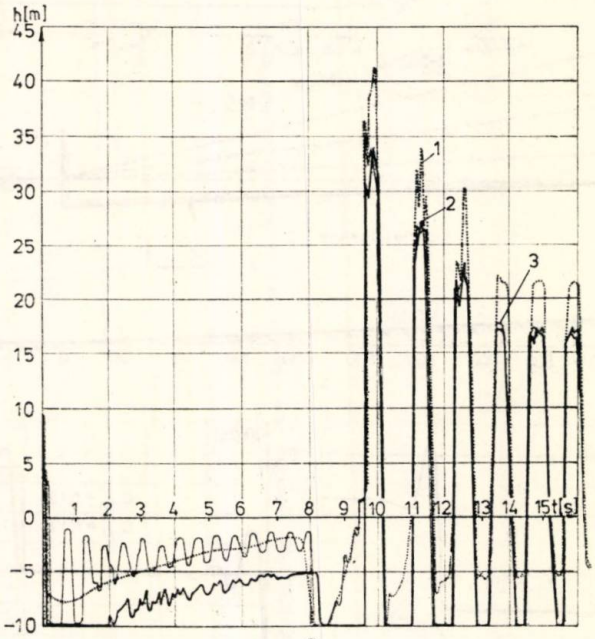


Fig.4

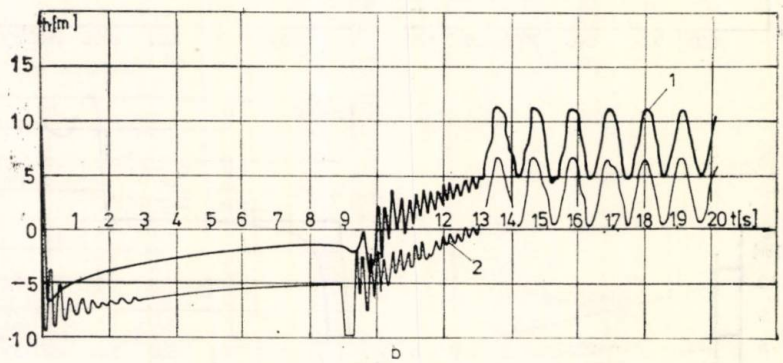
Fig. 4*a*, 4*c*, 4*f*. — Schema galeriei și variația presiunilor și nivelurilor la diverse manevre de pornire a turbinelor.

Fig. 4*b*, 4*d*, 4*e*. — Variații de debite, niveluri și presiuni în galerie, la diverse manevre de pornire a turbinelor.

ale apei (fig. 5*a*). Prin montarea unor dispozitive de aerisire-dezaerisire, subpresiunile și suprapresiunile din cele două conducte se încadrează în limitele admise (fig. 5*b*). În figura 6*a* se prezintă variația suprafeței libere a apei în cazul în care pentru un nivel scăzut al apei din lacul aval,



a



b

Fig. 5*a*, 5*b*. — Variația presiunilor în conductele de refulare la căderea bruscă a sarcinii.

curgerea în galerie este numai cu nivel liber. În cazul unui nivel maxim al apei în lacul aval, galeria rămîne permanent sub presiune. S-a calculat cu programul elaborat variația presiunii și debitului în lungul galeriei precum și în bazinul amonte și aval. Rezultatele de calcul s-au comparat cu cele obținute cu ajutorul unui program pentru calculul mișcării nepermanente sub presiune (fig. 6*b*, *c* și *d*). Se constată o bună concordanță, cu remarca că progranul pentru calculul mișcării nepermanente sub presiune,

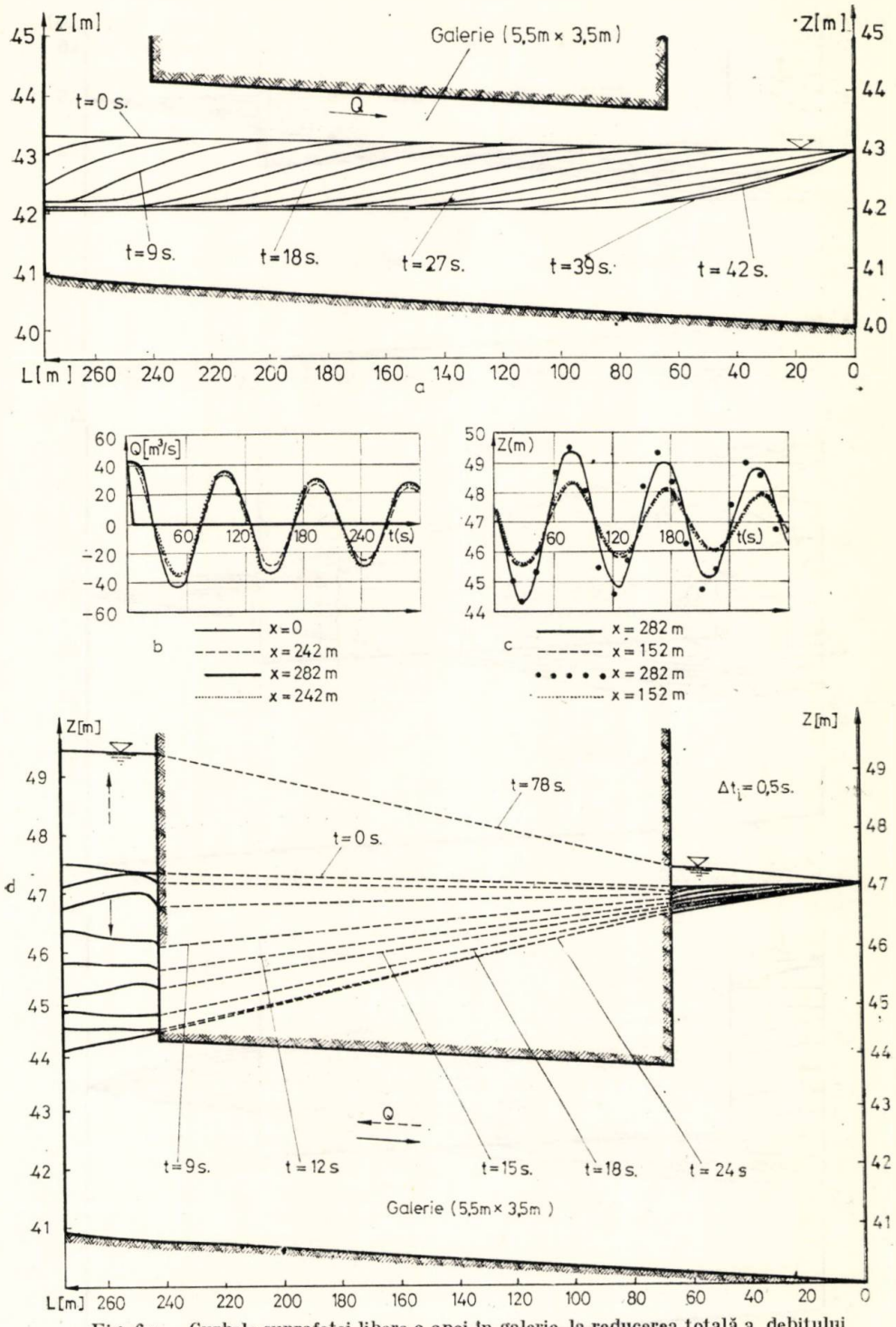


Fig. 6*a*. — Curbele suprafeței libere a apei în galerie la reducerea totală a debitului în timp de 5 secunde.

Fig. 6*b* — 6*d*. — Variația debitelor și presiunilor în galerie la reducerea totală a debitului în timp de 5 secunde.

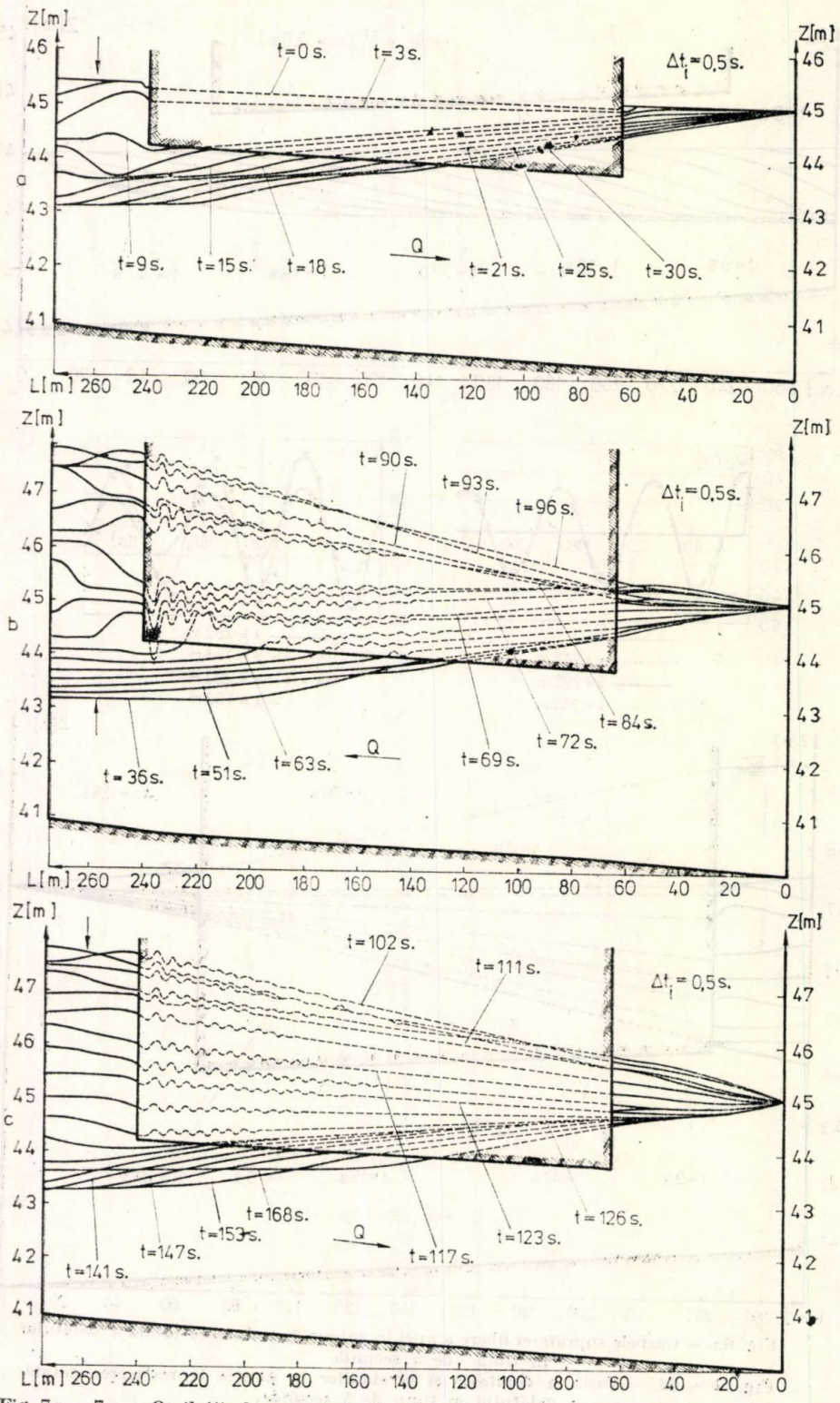


Fig. 7*a* — 7*c*. — Oscilații ale presiunilor și nivelurilor apei în galerie la diverse faze ale mișcării ($Q = 40$ m³/s; $Lg = 180$ m; oprire în 5 secunde).

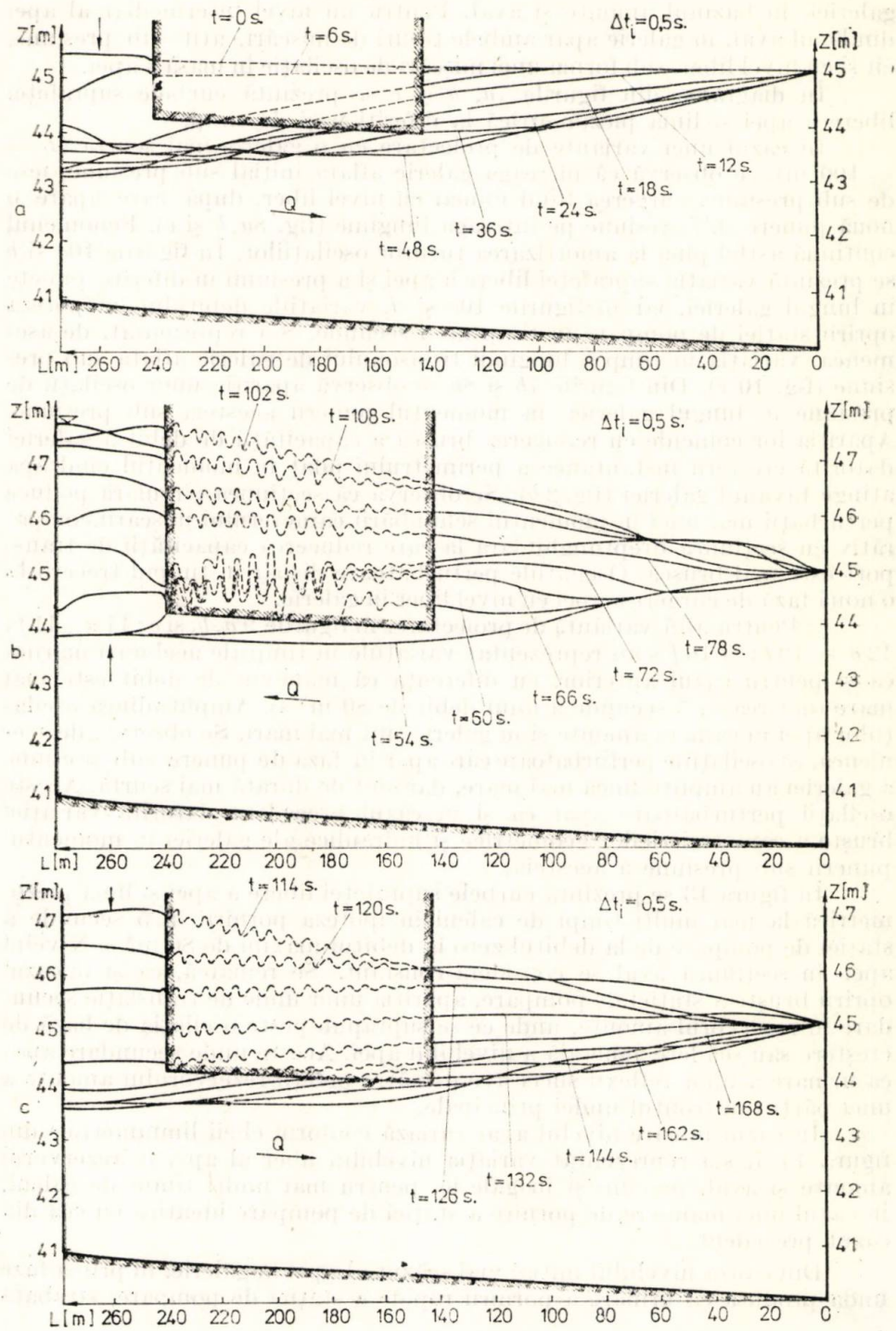


Fig. 8*a* — 8*c*. — Oscilații ale presiunilor și nivelurilor apei în galerie la diverse faze ale mișcării ($Q = 40$ m³/s; Lg = 100 m; oprire în 5 secunde).

nu poate lua în considerare denivelarea suprafeței libere a apei în lungul galeriei, în bazinul amonte și aval. Pentru un nivel intermediar al apei din lacul aval, în galerie apar ambele tipuri de mișcări, atît sub presiune, cît și cu nivel liber, sub forma unei mișcări de oscilație în masă a apei.

În diagrama din figurile 7*a*, *b* și *c* se prezintă curbele suprafeței libere a apei și linia piezometrică la diferiți pași de timp.

În cazul unei variante de proiectare cu o galerie mai scurtă (L = = 100 m), se observă că întreaga galerie aflată inițial sub presiune, iese de sub presiune, curgerea fiind numai cu nivel liber, după care apare o nouă punere sub presiune pe întreaga lungime (fig. 8*a*, *b* și *c*). Fenomenul continuă astfel pînă la amortizarea tuturor oscilațiilor. În figurile 10*a* și *b* se prezintă variația suprafeței libere a apei și a presiunii în diferite puncte în lungul galeriei, iar în figurile 10*c* și *d*, variațiile debitului în ipoteza opririi stației de pompare în timp de 5 secunde. S-a reprezentat, de asemenea, variația în timp a lungimii tronsonului de galerie aflată sub presiune (fig. 10 *e*). Din figurile 7*b* și 8*b* se observă apariția unor oscilații de presiune în lungul galeriei, în momentul punerii acesteia sub presiune. Apariția lor coincide cu reducerea bruscă a capacității de debit a galeriei datorită creșterii instantanee a perimetrului udat în momentul cînd apa atinge tavanul galeriei (fig. 2 *b*). Se observă că secțiunea circulară poduce perturbații mai mici în momentul schimbării caracterului mișcării,comparativ cu secțiunea dreptunghiulară la care reducerea capacității de transport este mai bruscă. Oscilațiile perturbatoare dispar în timpul trecerii la o nouă fază de curgere a apei cu nivel liber în galerie.

Pentru altă variantă de proiectare, în figurile 9 *a*, *b*, și *c*; 11 *a* ÷ 11 *f*; 12 *a* ÷ 12 *f*; și 10 *f* s-au reprezentat variațiile în timp ale acelorași mărimi ca și pentru cazul anterior, cu diferența că manevra de debit este mai mare (oprirea în 5 secunde a unui debit de 80 m³/s). Amplitudinea oscilațiilor apei în camera amonte și în galerie sînt mai mari. Se observă, de asemenea, că oscilațiile perturbatoare care apar în faza de punere sub presiune a galeriei au amplitudinea mai mare, dar sînt de durată mai scurtă. Aceste oscilații perturbatoare apar ca și în cazul precedent datorită variației bruște a caracteristicilor geometrice și hidraulice ale galeriei în momentul punerii sub presiune a acesteia.

În figura 13 se prezintă curbele suprafeței libere a apei și linia piezometrică la mai mulți timpi de calcul în ipoteza pornirii în 5 secunde a stației de pompare de la debitul zero la debitul maxim de 80 m³/s. Nivelul apei în secțiunea aval se consideră constant. Se remarcă, ca și în cazul opririi bruște a stației de pompare, apariția unor unde de translație secundare în rezervorul amonte, unde ce se suprapun peste oscilația de bază de creștere sau scădere generală a nivelului apei. Aceste unde secundare apar ca urmare a unor reflexii succesive de către pereții rezervorului amonte a unei părți din frontul undei principale.

În cazul în care nivelul aval variază conform cheii limnimetrice din figura 14 a, s-a reprezentat variația nivelului liber al apei în rezervorul amonte și aval, precum și în galerie, pentru mai mulți timpi de calcul, în cazul unei manevre de pornire a stației de pompare identică cu cea din cazul precedent.

Din cauza nivelului inițial mai scăzut al apei în galerie, în prima faze unda produsă ca urmare a pornirii rapide a stației de pompare, străbată

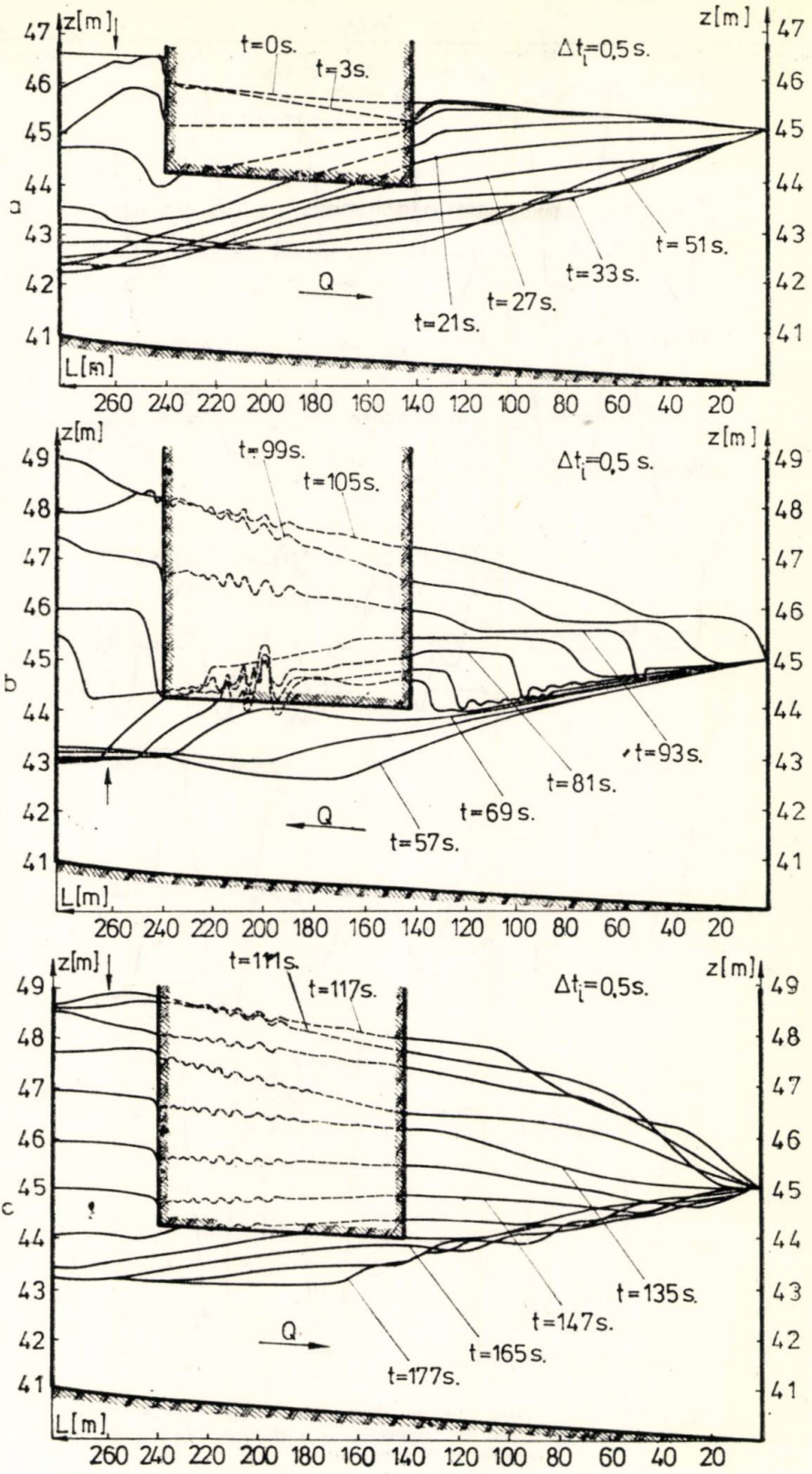


Fig. 9*a* — 9*c*. — Oscilații ale presiunilor și nivelurilor apei în galerie la diverse faze ale mișcării ($Q = 80$ m³/s.; $Lg = 100$ m; oprire în 5 secunde).

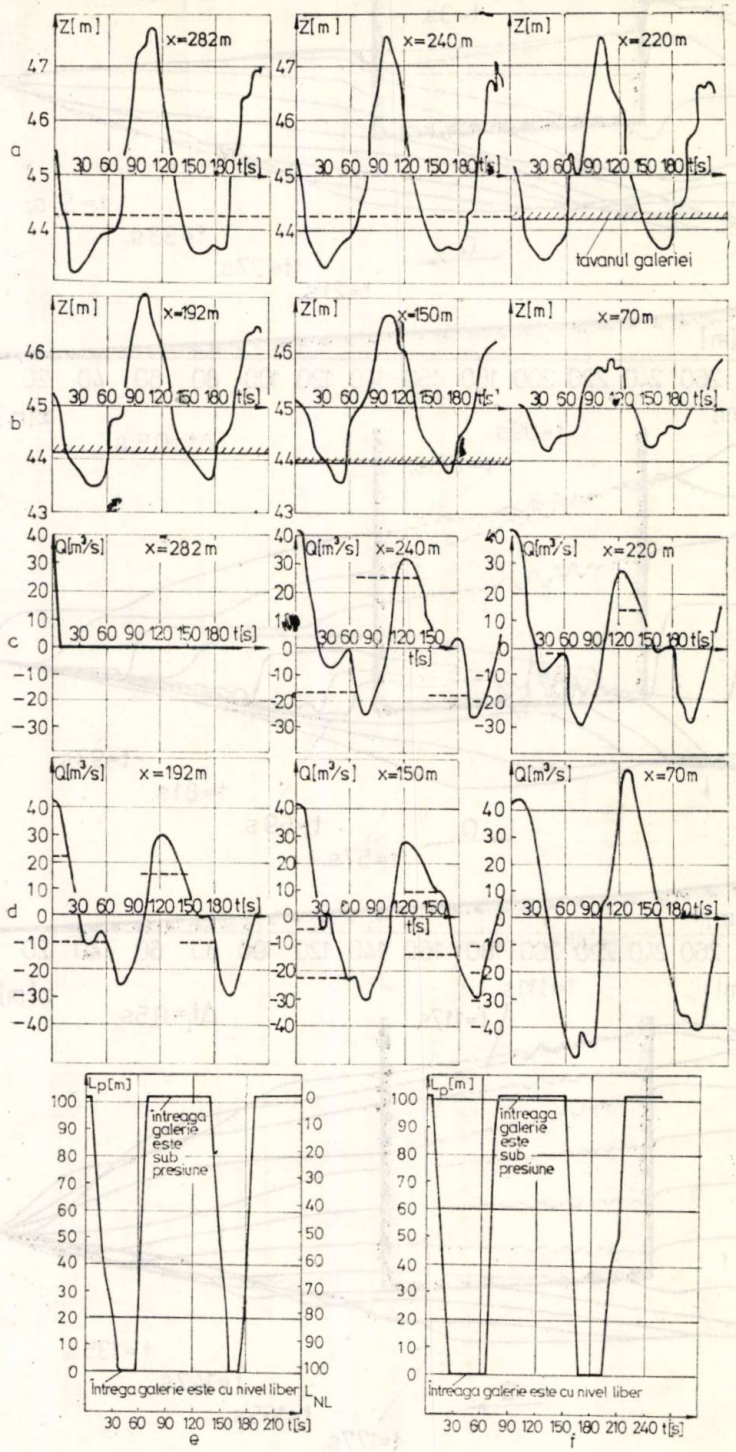


Fig. 10*e*, 10*f*. — Variația lungimii de punere sub presiune a galeriei ($Q = 40$ m³/s; $Lg = 100$ m, respectiv $Q = 80$ m³/s; $Lg = 100$ m; oprire în 5 secunde).

Fig. 10*a*— 10*d*. — Variația în timp a debitelor, nivelurilor și presiunilor în galerie ($Q = 40$ m³/s; $Lg = 100$ m; oprire în 5 secunde).

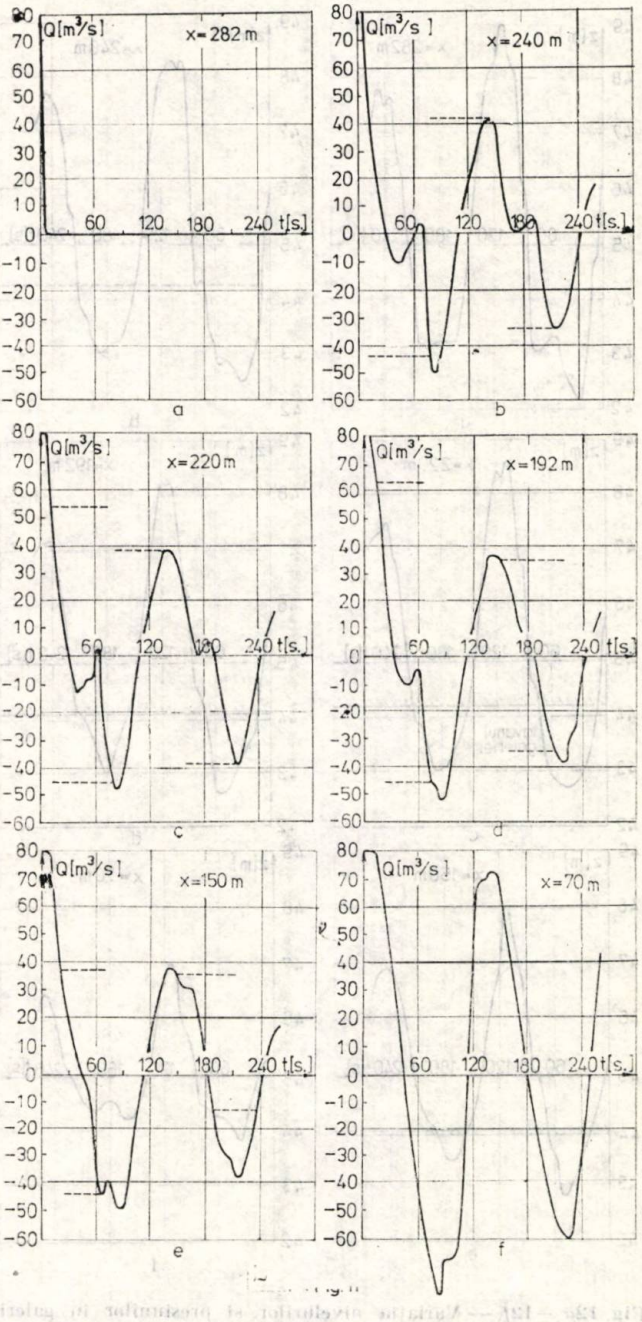


Fig. 11*a*. — 11*f*. — Variația în timp a debitelor în galerie ($Q = 80$ m³/s; $Lg = 100$ m; oprire în 5 secunde).

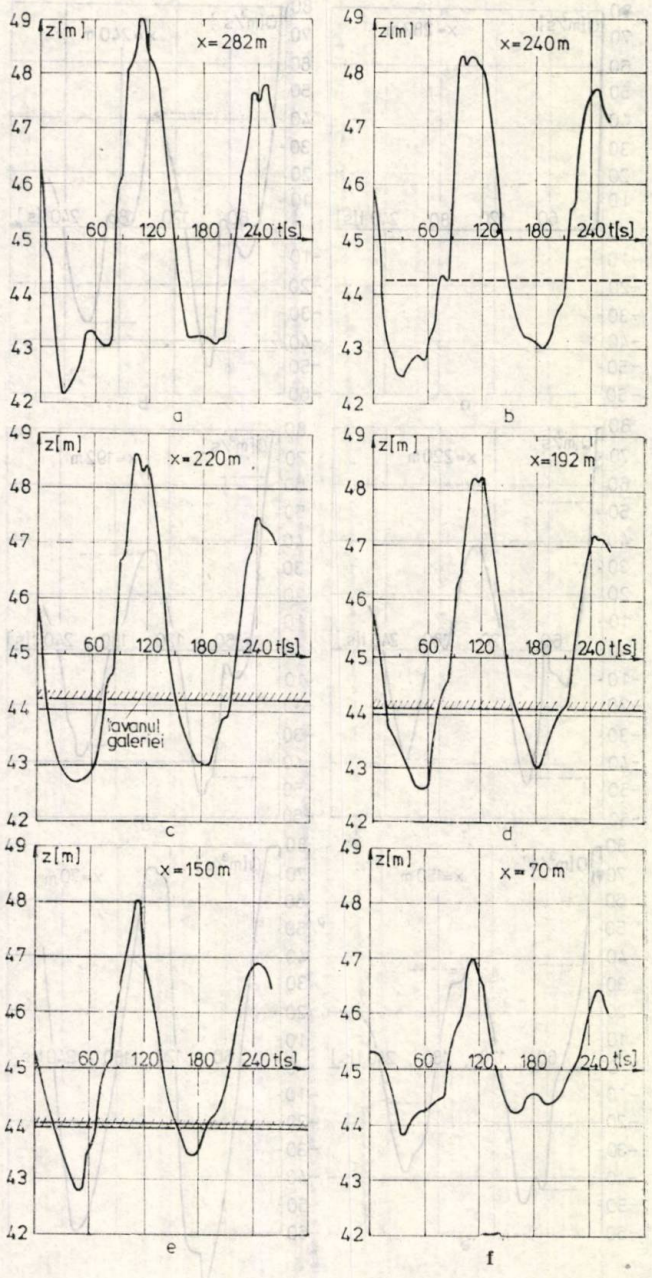


Fig. 12*a* —12*f*. — Variația nivelurilor și presiunilor în galerie ($Q = 80$ m³/s; $Lg = 100$m; oprire în 5 secunde).

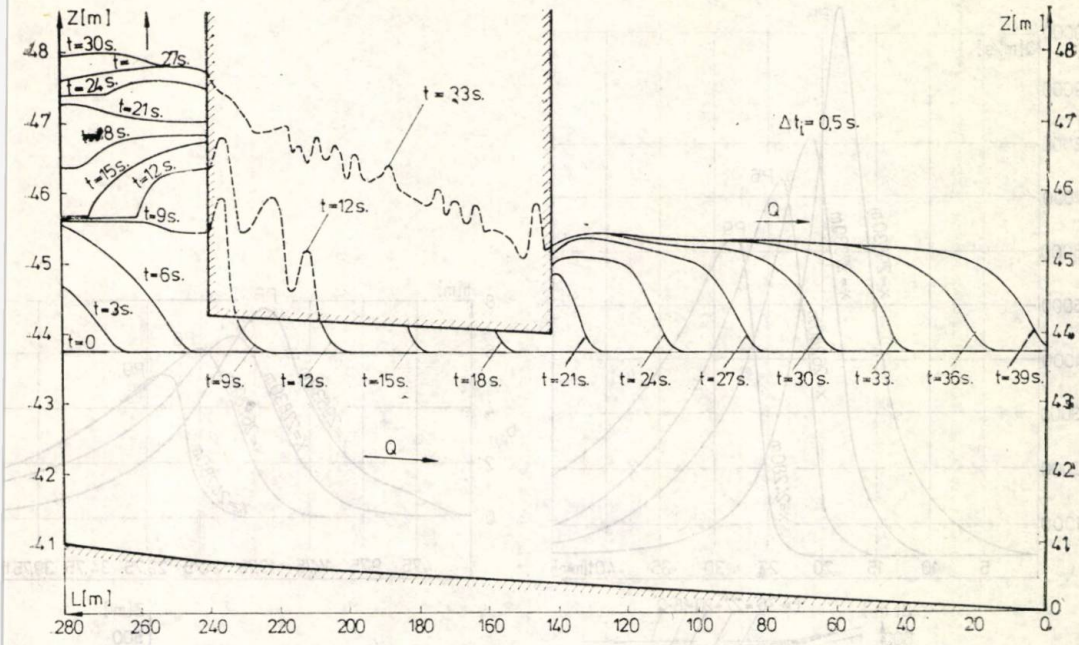


Fig 13. — Variaţia nivelului suprafeţei libere a apei şi linia piezometrică la diverşi timpi de calcul (pornire în 5 secunde de la $Q = 0$ la $Q = 80$ m³/s; nivel aval constant).

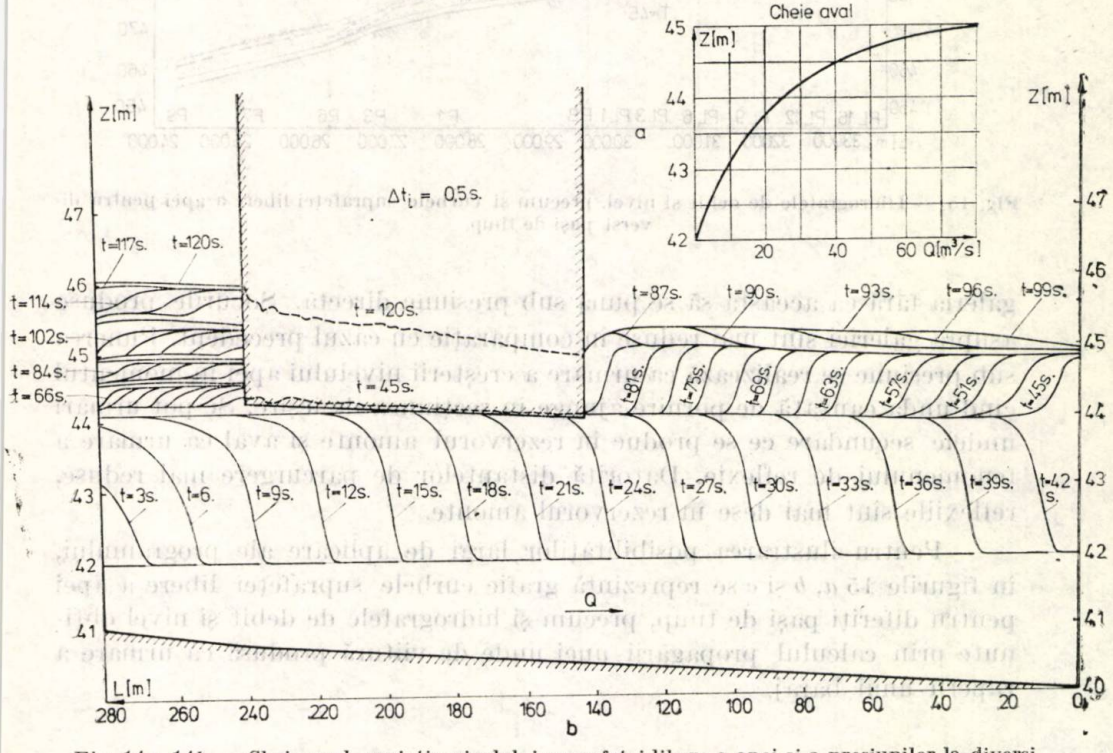


Fig. 14*a*, 14*b*. — Cheie aval, variaţia nivelului suprafeţei libere a apei şi a presiunilor la diverşi timpi de calcul (pornire în 5 secunde de la $Q = 0$ la $Q = 80$ m³/s).

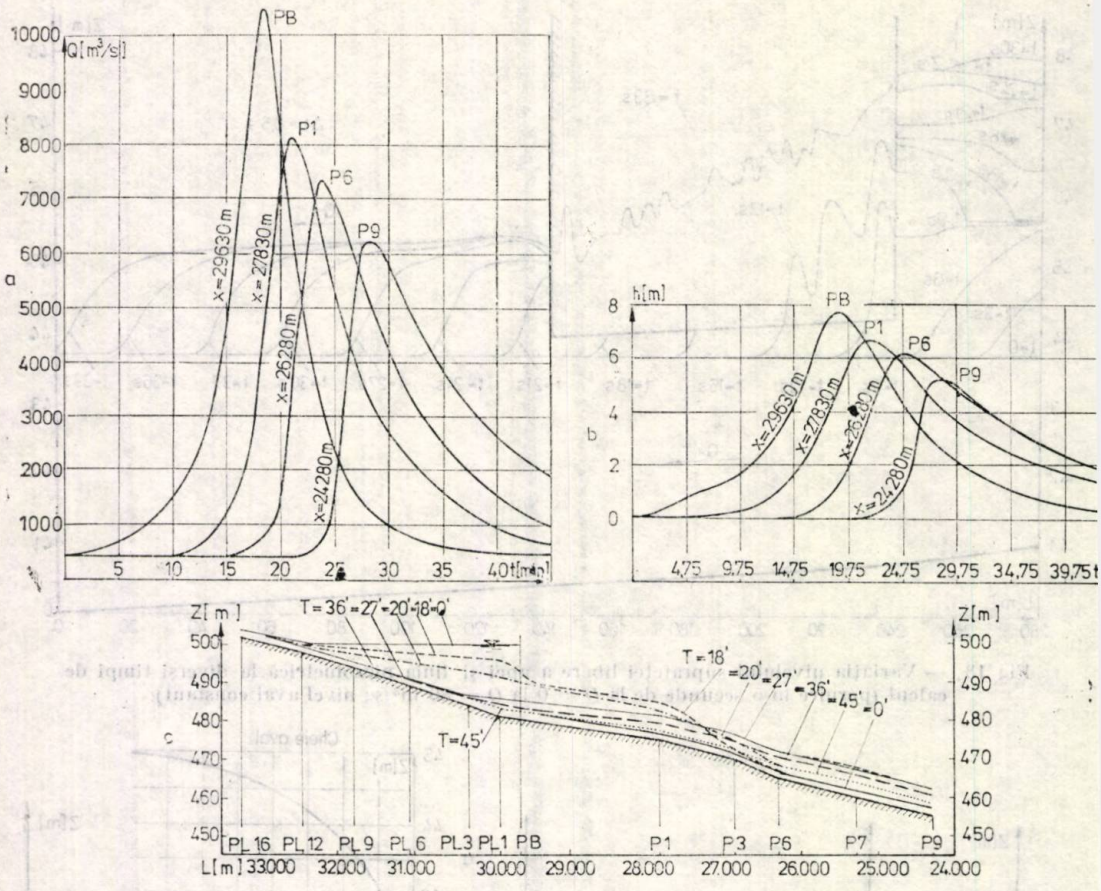


Fig. 15. — Hidrografele de debit şi nivel, precum şi curbele suprafeţei libere a apei pentru diverşi paşi de timp.

galeria fără ca aceasta să se pună sub presiune directă. Şocurile produse asupra galeriei sînt mai reduse în comparaţie cu cazul precedent. Punerea sub presiune se realizează ca urmare a creşterii nivelului apei în momentul cînd unda cauzată de pornire ajunge în secţiunea de ieşire. Se pot urmări undele secundare ce se produc în rezervorul amonte şi aval ca urmare a fenomenului de reflexie. Datorită distanţelor de parcurgere mai reduse, reflexiile sînt mai dese în rezervorul amonte.

Pentru ilustrarea posibilităţilor largi de aplicare ale programului, în figurile 15 *a*, *b* şi *c* se reprezintă grafic curbele suprafeţei libere a apei pentru diferiţi paşi de timp, precum şi hidrografele de debit şi nivel obţinute prin calculul propagării unei unde de viitură produsă ca urmare a ruperii unui baraj.

CONCLUZII

S-a pus la punct un program pentru calculul mișcării nepermanente mixte a apei în galerii și conducte aflate parțial sub presiune, parțial cu nivel liber. Se prezintă ecuațiile de mișcare și se arată condițiile de valabilitate a metodei de calcul utilizate pentru rezolvarea unor astfel de tipuri de mișcări. Se stabilește relația exactă pentru calculul lățimii fantei ce permite studiul fenomenelor tranzitorii mixte.

S-au studiat mai multe cazuri concrete de astfel de mișcări. Programul elaborat permite controlul debitelor, al presiunilor și al suprafețelor libere ale apei în orice moment și în orice punct al galeriei studiate.

Primită la redacție la 11 octombrie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. A. PREISSMANN, J. A. CUNGE, *Calcul des intumescences sur machines électroniques*, IX-e Assemblée Générale de l'AIRH, Dubrovnik, 1961.
2. J. A. CUNGE, M. WEGNER, *Intégration numeriques des équations d'écoulement de Barré de Saint-Venant par un schéma implicite de différences finies. Applications au cas d'une galerie tantôt en eharge tantôt à surface libre*, La Houille Blanche 1, 1964.
3. S. HÂNCU, V. JELER, PAUL DAN. *Un model de calcul numeric al mișcării nepermanente a apei în albiile riurilor*, Lucrări științifice, Vol. XVI, 1973, I.A.N.B.
4. I. YELEV, *Studiul șocului hidraulic într-o conductă sub presiune protejată cu rezervoare de aer și castele de echilibru folosind un calculator numeric.* (Partea I și Partea II, *Programul*). St. cerc. mec. apl. **2, 34,** (1975), și **35, 1,** (1976).
5. M. B. ABBOTT, F. IONESCU, *On the numerical computation of nearly horizontal flows*, J. Hyd. Res., 5, p. 97 — 117, 1967.
6. C. S. SONG CHARLES, *Two-phase flow hydraulic transient model for Storm sewar systems*, Second International Conference on Pressure Surges, London, England, sept. 1976.
7. N. J. MARSDEN, J. A. FOX, *An alternative approach to the problem of column separation in an elevated section of pipeline*, Second International Conference on Pressure Surges, London, England, sept. 1976.
8. J. A. CUNGE, P. M. HOLLY JR., A. VERWEI, *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Chapter 9, Pitman Publishing Ltd., 1980.
9. CH. JAEGER, *Fluid transients in Hydro-Electric Engineering Practice*, Blackie, Glasgow and London, 1977.

CALCULUL GEOMETRIC AL TRANSMISIEI CU CUPLAJE TRIPODE. II

de NICOLAE I. PANDREA

Institutul de Învățămînt Superior, Pitești

În prima parte a lucrării se analizează mecanismele simple cu cuplaje tripode unghiulare și se stabilesc relațiile de legătură dintre parametrii de poziție, iar în partea finală se studiază geometria transmisiilor cu cuplaje tripode pentru care se determină relații exacte precum și relații aproximative necesare unui calcul dinamic complex.

4. CALCULUL CINEMATIC AL MECANISMELOR SIMPLE CU CUPLAJE TRIPODE UNGHIULARE

4.1. RELAȚII ÎNTRE PARAMETRII GEOMETRICI AI CUPLAJULUI TRIPOD UNGHIULAR

Unele transmisii mecanice sînt realizate atît cu cuplaje tripode unghiular-axiale, cît și cu cuplaje tripode unghiulare (autoturismul DACIA 1300).

În figura 17 se prezintă schema cinematică a unei astfel de transmisii.

După cum s-a arătat cuplajul unghiular optim se realizează constructiv prin condiția ca un plan P perpendicular pe axa arborelui lalea (corpul *2*) să rămînă tangent la o sferă care are centrul situat în centrul O_3 al tripodei *3*. Pentru a putea stabili proprietățile geometrice ale unui astfel de cuplaj este necesar a se studia mișcarea relativă dintre elemente.

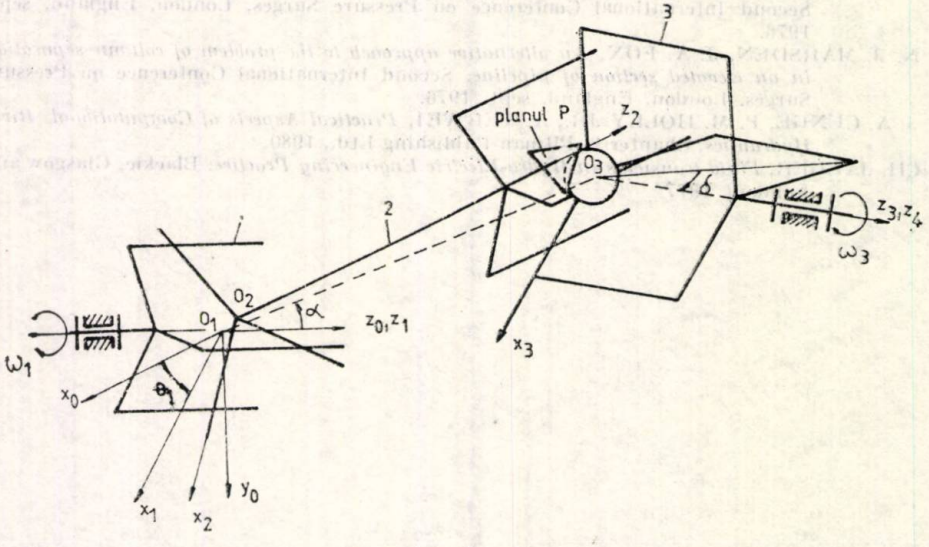


Fig. 17. — Transmisie cu cuplaj tripod axial unghiular (cuplajul dintre corpurile *1* și *2*) și cuplaj tripod unghiular (cuplajul dintre corpurile *2* și *3*).

În figura 18 se consideră tripoda *1* și arborele lalea *2*.

Condiția de realizare a cuplajului unghiular optim, în reprezentarea din figura 18 se reduce la condiția geometrică ca planul mobil $O_2x_2y_2$ să treacă prin punctul fix O_1.

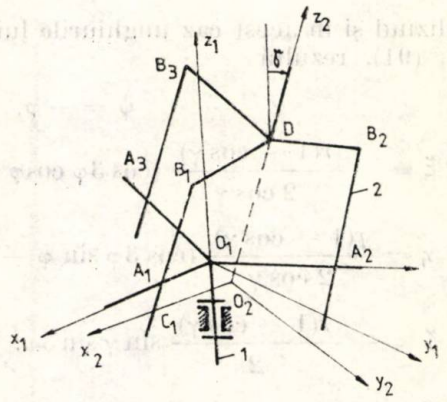


Fig. 18. — Cuplaj tripod unghiular (punctul O_2 este situat în planul $O_1x_1y_1$)

Dacă $A_i (i = 1, 2, 3)$ sînt punctele de contact între axe, iar $C_i (i = 1, 2, 3)$ punctele în care axele B_iA_i intersectează planul $O_2x_2y_2$, notînd cu λ_i distanțele O_1A_i, iar cu μ_i distanțele C_iA_i, atunci coordonatele punctelor A_i în sistemele de referință $O_1x_1y_1z_1$, respectiv $O_2x_2y_2x_2$ sînt:

$$(\lambda_i \cos \delta_i ;\ \lambda_i \sin \delta_i, 0) ;\ (r \cos \delta_i, r \sin \delta_i ;\ \mu_i),$$

unde

$$\delta_i = 0,\ 120^\circ,\ 240^\circ,\ r = DB_i \text{ (fig. 18)}$$

Rezultă relațiile

$$\begin{aligned} \lambda_i \cos \delta_i &= \xi + \alpha_1 r \cos \delta_i + \alpha_2 r \sin \delta_i + \alpha_3 \mu_i, \\ \lambda_i \sin \delta_i &= \eta + \beta_1 r \cos \delta_i + \beta_2 r \sin \delta_i + \beta_3 \mu_i, \\ 0 &= \zeta + \gamma_1 r \cos \delta_i + \gamma_2 r \sin \delta_i + \gamma_3 \mu_i, \end{aligned} \tag{88}$$

în care ξ, η, ζ sînt coordonatele punctului O_2, iar α_i, β_i, γ_i sînt cosinusurile directoare ale axelor sistemului $O_2x_2y_2z_2$ față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$.

Condiția ca planul $O_2x_2y_2z_2$ să treacă prin punctul O_1 se scrie:

$$\xi\alpha_3 + \eta\beta_3 + \zeta\gamma_3 = 0. \tag{89}$$

Din sistemul (88) prin eliminarea parametrilor μ_i, λ_i rezultă

$$\begin{aligned} &\gamma_3(-\xi \sin \delta_i + \eta \cos \delta_i) + r[\sin \delta_i \cos \delta_i(\alpha_1 - \beta_2) + \beta_1 \sin^2 \delta_i - \\ &- \alpha_2 \cos^2 \delta_i] + \zeta(-\beta_3 \cos \delta_i + \alpha_3 \sin \delta_i) = 0. \end{aligned} \tag{90}$$

Condiția de compatibilitate a sistemului de ecuații în ξ, η, ζ, format din relația (90) pentru $\delta_i = 0$, 120°, 240°, este

$$\alpha_2 = \beta_1. \tag{91}$$

Utilizînd și în acest caz unghiurile lui Euler și ținînd seama de relațiile (89), (91), rezultă

$$\psi = -\varphi, \tag{92}$$

$$\xi = -\frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}(\cos 3\varphi\cos\varphi + \cos^2\gamma\sin 3\varphi\sin\varphi), \tag{93}$$

$$\eta = \frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}(\cos 3\varphi\sin\varphi - \cos^2\gamma\sin 3\varphi\cos\varphi), \tag{94}$$

$$\zeta = -\frac{r(1-\cos\gamma)}{2}\sin\gamma\sin 3\varphi. \tag{95}$$

După cum se constată, în acest caz, cupla cinematică este de clasa a patra deoarece parametrii geometrici de poziție se exprimă prin intermediul a numai doi parametri independenți (γ, φ).

Dacă unghiul γ rămîne constant, atunci proiecția traiectoriei punctului O_2 pe planul $O_1x_1y_1$ este tot o trohoidă de modul egal cu trei avînd punctul cel mai depărtat de punctul O_1 situat la distanța $e_1 = \frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}$, iar punctul cel mai apropiat la distanța $e_2 = \frac{r(1-\cos\gamma)}{2}\cos\gamma$.

4.2. STUDIUL MECANISMULUI CARE APROXIMEAZĂ TRANSMISIA CU CUPLAJ TRIPOD UNGHIULAR

În figura 17 se prezintă o transmisie cu cuplaj tripod unghiular-axial și cu cuplaj tripod unghiular.

Cinematica unei astfel de transmisii depinde atît de unghiul de dezbatere α, cît și de unghiul de bracare δ.

În majoritatea cazurilor, aceste transmisii se realizează cu unghiul de dezbatere $\alpha < 20°$ și cu unghiul de bracare $\delta < 45°$.

Pentru unghiul $\alpha = 20°$ și distanța $r = 20$ mm rezultă că distanța punctului O_2 față de axa O_1z_1 nu depășește valoarea de 0,64 mm.

Aceasta ne permite a aproxima că mișcarea punctului O_2 are loc chiar pe axa O_1z.

În această situație schema cinematică a mecanismului model pentru studiul aproximativ al cuplajului unghiular este redată în figura 19.

Punctul O_2 (fig. 19) se deplasează pe axa O_1z_1 situată în planul fix $O_0y_0z_0$. Notînd cu l lungimile segmentelor egale $O_1O_3 = O_2O_2' = l$, rezultă din condiția de optim geometric pentru cuplajul unghiular că planul perpendicular pe axa O_2O_2' trece prin punctul fix O_3.

Cu notațiile din figura 19 rezultă că punctele O_1, O_2 în sistemul fix de referință $O_0x_0y_0z_0$ au coordonatele:

$$(0, -l\sin\alpha, -l\cos\alpha), (0, -l\sin\alpha, -l\cos\alpha - \Delta\zeta).$$

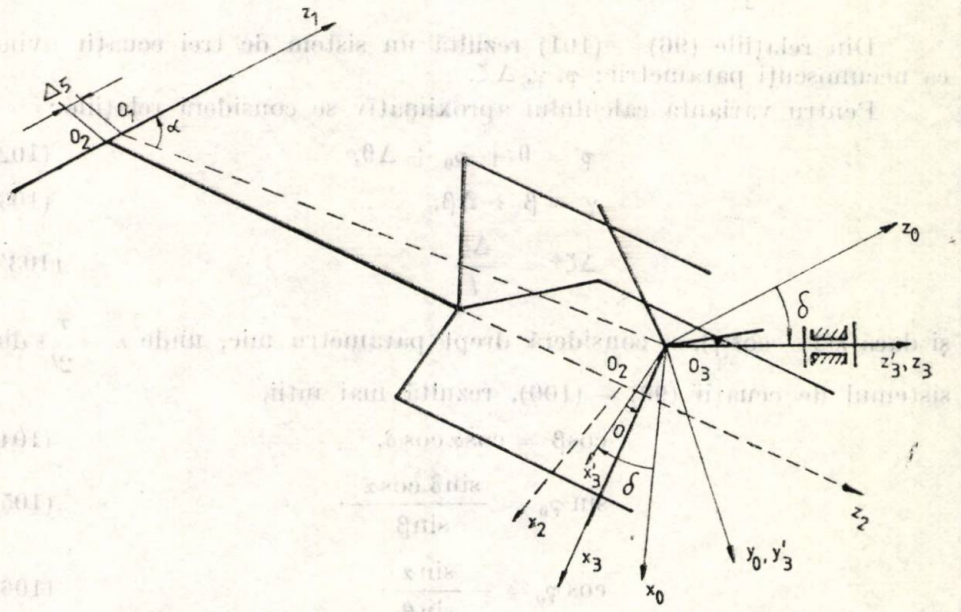


Fig. 19. — Mecanism simplu cu cuplaj tripod unghiular.

Prin bracarea de unghi δ în jurul axei O_3y_0 se obține sistemul de referință fix $O_3x'_3y'_3z'_3$. Acesta din urmă dacă se rotește în jurul axei $O_3z'_3$ cu unghiul θ ajunge în poziția $O_3x_3y_3z_3$ în care axa O_3x_3 se suprapune cu unul din brațele tripodei.

Ținînd seama de rotațiile precizate rezultă că punctul O_2 are în sistemul $O_3x_3y_3z_3$, coordonatele:

$$x_{0_2} = -l\sin\alpha\sin\theta + l\sin\delta\cos\alpha\cos\theta + \Delta\zeta\sin\delta\cos\theta, \tag{96}$$

$$y_{0_2} = -l\sin\alpha\cos\theta - l\sin\delta\cos\alpha\sin\theta - \Delta\zeta\sin\delta\sin\theta, \tag{97}$$

$$z_{0_2} = -l\cos\alpha\cos\delta - \Delta\zeta\cos\delta. \tag{98}$$

Considerînd de asemenea relația vectorială

$$\overline{O_3O_2} = \overline{O_3O'_2} + \overline{O'_2O_2}$$

și ținînd seama de matricea de rotație (17) și de relațiile (92) — (95), rezultă:

$$x_{0_2} = -\frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}(\cos 3\varphi\cos\varphi + \cos^2\gamma\sin 3\varphi\sin\varphi) + l\sin\gamma\sin\varphi, \tag{99}$$

$$y_{0_2} = -\frac{r(1-\cos\gamma)}{2\cos\gamma}(-\cos 3\varphi \sin\varphi + \cos^2\gamma \sin 3\varphi \cos\varphi) + l\sin\gamma\sin\varphi, \quad (100)$$

$$z_{0_2} = -\frac{r(1-\cos\gamma)}{2}\sin\gamma\sin 3\varphi - l\cos\gamma. \quad (101)$$

Din relațiile (96) — (101) rezultă un sistem de trei ecuații avînd ca necunoscuți parametrii : φ, γ, $\Delta\zeta$.

Pentru varianta calculului aproximativ se consideră relațiile :

$$\varphi = \theta + \varphi_0 + \Delta\theta, \quad (102)$$

$$\gamma = \beta + \Delta\beta, \quad (103)$$

$$\Delta\zeta^* = \frac{\Delta\zeta}{l} \quad (103')$$

și dacă $\lambda(1-\cos\gamma)$, se consideră drept parametru mic, unde $\lambda = \frac{r}{2l}$, din sistemul de ecuații (99) — (100), rezultă mai întîi,

$$\cos\beta = \cos\alpha\cos\delta, \quad (104)$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{\sin\delta\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad (105)$$

$$\cos\varphi_0 = -\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad (106)$$

iar în final se obțin :

$$\Delta\zeta^* = 0, \quad (107)$$

$$\Delta\beta = \lambda(1-\cos\beta)\sin 3(\theta+\varphi_0), \quad (108)$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda(1-\cos\beta)}{\cos\beta\sin\beta}\cos 3(\theta+\varphi_0). \quad (109)$$

Mărimea $\Delta\beta$ constituie o măsură a unghiului de deviație a arborelui lalea de la poziția fixă O_1O_3. Se constată că aceasta variază invers proporțional cu lungimea acestui arbore.

Distanța d între punctele O_3, O_3' este dată de expresia $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ și rezultă că maximul și minimul distanței d se pot evalua prin :

$$d_{max} \approx \frac{r(1-\cos\beta)}{2\cos\beta}; \quad d_{min} \approx \frac{r(1-\cos\beta)}{2}.$$

În cazul unui exemplu numeric, considerînd $r = 20$ mm, $\alpha = 30°$, $\delta = 45°$, rezultă : $\beta = 52{,}24°$,

$$d_{max} = 6{,}33 \text{ mm și } d_{min} = 3{,}8 \text{ mm}.$$

Se desprinde de aici ideea că abaterile radiale maxime sînt mai mari la cuplajul unghiular față de abaterile din cuplajul unghiular-axial.

5. CALCULUL GEOMETRIC AL TRANSMISIEI CU CUPLAJ UNGHIULAR TRIPOD ȘI CUPLAJ UNGHIULAR AXIAL TRIPOD

5.1. A PECTE GENERALE

După cum s-a arătat, majoritatea lucrărilor care tratează transmisia cu cuplaje tripode, fac apel la modele simplificate.

În această parte a lucrării vom prezenta modelul de calcul general pentru transmisia completă și vom stabili funcțiile de legătură între mărimea de intrare (unghiul de rotație θ_1) și ceilalți parametrii cinematici.

Rezultatele ce se vor obține pot fi utilizate atît la sinteza, cît și la analiza dinamică a unei astfel de transmisii.

5.2. ECUAȚIILE MATRICEALE DE POZIȚIE

Se consideră transmisia a cărei schemă cinematică este prezentată în figura 17, în poziția de funcționare cu unghiul de dezbatere α și unghiul de bracare δ.

În acest sistem (fig. 17) mișcarea se transmite de la corpul *1* la corpul *3* prin intermediul arborelui lalea *2*, corpurile *1* și *3* avînd mișcări de rotație în jurul axelor fixe O_1z_0, O_3z_4.

Dacă lungimea axului intermediar *2* este $O_2O_2' = l$, atunci sistemul de referință fix $O_1x_0y_0z_0$ (fig. 20) se alege astfel încît $O_1O_3 = O_2O_2' = l$.

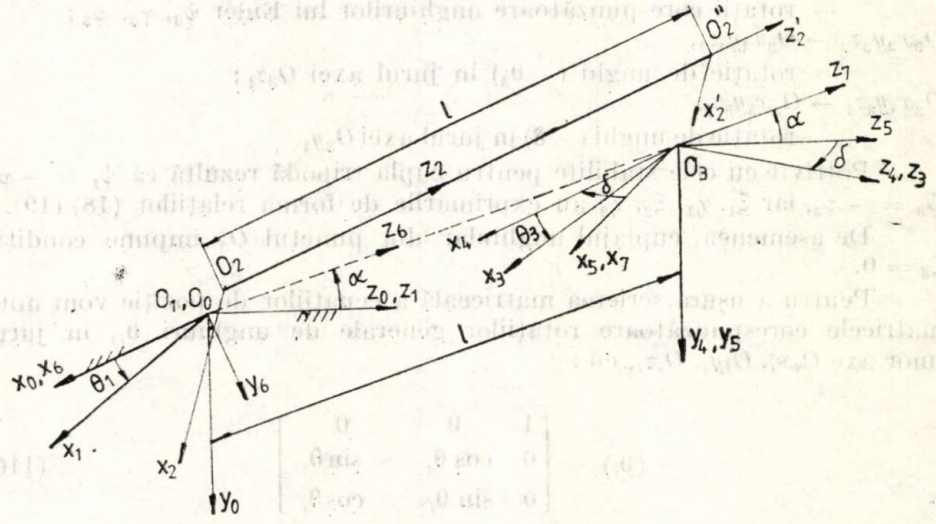


Fig. 20. — Alegerea sistemelor de referință pentru calculul geometric al transmisiei cu cuplaje tripode.

Se aleg sistemele mobile $O_1x_1y_1z_1$, $O_3x_3y_3z_3$ ale corpurilor *1*, *3* cu axele O_1z_1, O_3z_3, în lungul axelor fixe O_1z_0, O_3z_4 și se notează cu θ_1, θ_3 unghiurile de rotație. Pentru corpul *2* (arborele lalea) se consideră sistemul mobil $O_2x_2y_2z_2$ cu originea în extremitatea O_2, axa O_2z_2 în lungul arborelui precum

și sistemul $O_2'x_2'y_2'z_2'$, cu originea în cealaltă extremitate O_2', avînd axele paralele cu axele sistemului $O_2x_2y_2z_2$.

Alegînd axele O_2x_2, O_3x_3 în lungul unor brațe ale tripodelor (fig. 17) se obțin sisteme de axe analoage cu cele folosite la studiul cuplei tripode.

Se mai consideră, de asemenea, sistemul fix $O_3x_5y_5z_5$ care are originea în O_3 și axele paralele cu axele sistemului $O_0x_0y_0z_0$, sistemul fix $O_0x_6y_6z_6$ în care axa O_0x_6 coincide cu axa O_0x_0, iar axa O_0z_0 coincide cu axa O_1O_3, sistemul fix $O_3x_4y_4z_4$ care se obține prin rotirea de unghi δ în jurul axei O_3y_5 a sistemului $O_3x_5y_5z_5$ și sistemul fix $O_3x_7y_7z_7$ care are axele paralele cu axele sistemului $O_0x_6y_6z_6$.

Deplasările finite care se realizează pentru a ajunge din poziția $O_1x_0y_0z_0$ în poziția $O_3x_5y_5z_5$ sînt :

$O_1x_0y_0z_0 \rightarrow O_1x_1y_1z_1$,

— rotație de unghi θ_1 în jurul axei O_1z_0 ;

$O_1x_1y_1z_1 \rightarrow O_2x_2y_2z_2$,

— translație de vector $\overline{O_1O_2}$ de coordonate ξ_1, η_1, ζ_1 față de sistemul $O_1x_1y_1z_1$,

— rotații corespunzătoare unghiurilor lui Euler ψ_1, γ_1 φ_1 ;

$O_2x_2y_2z_2 \rightarrow O_2'x_2'y_2'z_2'$,

— translație de vector $\overline{O_2O_2'}$ de coordonate 0, 0, l ;

$O_2'x_2'y_2'z_2' \rightarrow O_3x_3y_3z_3$,

— translație de vector $O_2'O_3$ de coordonate ξ_2, η_2, ζ_2 față de sistemul $O_2'x_2'y_2'z_2'$.

— rotații corespunzătoare unghiurilor lui Euler ψ_3, γ_3, φ_3 ;

$O_3x_3y_3z_3 \rightarrow O_3x_4y_4z_4$,

— rotație de unghi $(-\theta_3)$ în jurul axei O_3z_4 ;

$O_3x_4y_4z_4 \rightarrow O_3x_5y_5z_5$,

— rotație de unghi $(-\delta)$ în jurul axei O_3y_4.

Potrivit cu cele stabilite pentru cupla tripodă rezultă că $\psi_1 = -\varphi_1$, $\psi_3 = -\varphi_3$, iar ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 au exprimările de forma relațiilor (18) (19).

De asemenea, cuplajul unghiular din punctul O_3 impune condiția $\zeta_3 = 0$.

Pentru a ușura scrierea matriceală a ecuațiilor de poziție vom nota matricele corespunzătoare rotațiilor generale de unghiuri θ_i, în jurul unor axe O_ix_i, O_iy_i, O_iz_i, cu :

$$(\theta_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ 0 & \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \tag{110}$$

pentru rotația în jurul axei O_ix_i,

$$\{\theta_i\} = \begin{bmatrix} -\cos\theta_i & 0 & \sin\theta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_i & 0 & \cos\theta_i \end{bmatrix} \tag{111}$$

pentru rotația în jurul axei $O_i y_i$,

$$[\theta_i] = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{112}$$

pentru rotația în jurul axei $O_i z_i$.

În aceste condiții matricele de rotație ce corespund transformărilor precizate sînt date de relațiile:

$$[T_{10}] = [\theta_1];\ [T_{21}] = [\varphi_1]^{-1}(\gamma_1)[\varphi_1];\ [T_{2'2}] = [I]_0,$$

$$[T_{32'}] = [\varphi_3]^{-1}(\gamma_3)[\varphi_3];\ [T_{43}] = [\theta_3]^{-1};\ [T_{54}] = \{\delta\}^{-1},$$

$$[T_{05}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I]. \tag{113}$$

Să considerăm un punct oarecare M ale cărui coordonate în sistemul notat cu indicele i sînt x_i, y_i, z_i.

Convenim să notăm:

$$(M)_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}. \tag{114}$$

Cu aceste notații se pot scrie relațiile succesive:

$$(M)_0 = [T_{10}](M)_1, \tag{115}$$

$$(M)_1 = (O_2)_1 + [T_{21}](M)_2, \tag{116}$$

$$(M)_2 = (O_2')_2 + [T_{2'2}](M)_{2'}, \tag{117}$$

$$(M)_{2'} = (O_3)_{2'} + [T_{32'}](M)_3, \tag{118}$$

$$(M)_3 = [T_{43}](M)_4, \tag{119}$$

$$(M)_4 = [T_{54}](M)_5, \tag{120}$$

$$(M)_5 = [T_{05}](M)_0. \tag{121}$$

Ținînd seama că matricele de rotație, pe un contur, verifică ecuația de închidere,

$$[T_{10}]\cdot[T_{21}]\cdot[T_{2'2}]\cdot[T_{32'}]\cdot[T_{43}]\cdot[T_{54}]\cdot[T_{05}] = [I], \tag{122}$$

din relațiile (115) — (121) se obține ecuația matriceală

$$(O_2)_1 + [T_{21}]\,(O_2')_2 + [T_{21}][T_{2'2}]\,(O_3)_{2'} = [T_{01}]\,(O_3)_0. \tag{123}$$

Relațiile (122) (123) constituie ecuațiile de poziție pentru transmisia tripodă din figura 17.

5.3. ECUAȚIILE SCALARE DE POZIȚIE

Cu notațiile (113), ecuația matriceală (122) se poate scrie:

$$(\gamma_1)[\varphi_1][\varphi_3]^{-1}(\gamma_2) = [\varphi_1][\theta_1]^{-1}\{\delta\}[\theta_3][\varphi_3]^{-1}. \tag{124}$$

Efectuînd calculele, se obțin cinci relații,

$$-\sin\gamma_1 \sin\gamma_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \cos\gamma_1 \cos\gamma_3 = \cos\delta, \tag{125}$$

$$-\cos\gamma_1 \sin\gamma_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) - \sin\gamma_1 \cos\gamma_3 = \sin\delta \sin(\varphi_1 - \theta_1), \tag{126}$$

$$\sin\gamma_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = \sin\delta \cos(\varphi_1 - \theta_1), \tag{127}$$

$$\sin\gamma_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) = -\sin\delta \cos(\varphi_3 - \theta_3), \tag{128}$$

$$\sin\gamma_1 \cos\gamma_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + \cos\gamma_1 \sin\gamma_3 = -\sin\delta \sin(\varphi_3 - \theta_3), \tag{129}$$

din care numai trei sînt independente.

Ținînd seama de relațiile (18), (19) și notînd cu r_1, r_3 razele corespunzătoare tripodelor din punctele O_1, O_3 (fig. 17), rezultă

$$(O_2)_1 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix} = [\varphi_1]^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \dfrac{1 - \cos\gamma_1}{2\cos\gamma_1} \cos 3\varphi_1 \\ r_1 \dfrac{1 - \cos\gamma_1}{2} \sin 3\varphi_1 \cos\gamma_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}, \tag{130}$$

$$(O_3)_{2'} = \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \eta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{r_3(1 - \cos\gamma_3)}{2\cos\gamma_3} [\varphi_3]^{-1} \begin{bmatrix} \cos 3\varphi_3 \\ \cos\gamma_3 \sin 3\varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{131}$$

$$(O_2')_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix}; \quad (O_3)_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -l\sin\alpha \\ l\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{132}$$

şi din relaţia (123) se obţin ecuaţiile :

$$\frac{r_1(1-\cos\gamma_1)}{2\cos\gamma_1}\cos 3\varphi_1 + \frac{r_3(1-\cos\gamma_3)}{2\cos\gamma_3}[\cos 3\varphi_3\cos(\varphi_1-\varphi_3) -$$

$$-\cos\gamma_3\sin 3\varphi_3\sin(\varphi_1-\varphi_3)] - l\sin\alpha\sin(\varphi_1-\theta_1) = 0, \tag{133}$$

$$\frac{r_1(1-\cos\gamma_1)}{2}\sin 3\varphi_1 + \frac{r_3(1-\cos\gamma_3)\cos\gamma_1}{2\cos\gamma_3}[\cos 3\varphi_3\sin(\varphi_1-\varphi_3) +$$

$$+\cos\gamma_3\sin 3\varphi_3\cos(\varphi_1-\varphi_3)] - l\sin\gamma_1 + l\sin\alpha\cos(\varphi_1-\theta_1) = 0, \tag{134}$$

$$\zeta_1 + \frac{r_3(1-\cos\gamma_3)\sin\gamma_1}{2\cos\gamma_3}[\cos 3\varphi_3\sin(\varphi_1-\varphi_3) +$$

$$+\cos\gamma_3\sin 3\varphi_3\cos(\varphi_1-\varphi_3)] + l\cos\gamma_1 - l\cos\alpha = 0. \tag{135}$$

Relaţiile (125) — (129), (133) — (135) constituie un sistem de şase ecuaţii independente din care se obţin necunoscutele φ_1, γ_1, ζ_1, φ_3, γ_3, θ_3 ca funcţii de unghiul θ_1.

5.4. REZOLVAREA SISTEMULUI

Considerînd aproximările

$$\varphi_1 \approx \theta_1; \quad \gamma_1 \approx \alpha, \tag{136}$$

$$\gamma_3 \approx \beta \tag{137}$$

unde

$$\beta = \arccos(\cos\alpha\cos\delta), \tag{138}$$

din ecuaţiile (126) — (127) rezultă condiţiile :

$$\cos(\varphi_1-\varphi_3) \approx -\frac{\sin\alpha\cos\delta}{\sin\beta}, \tag{139}$$

$$\sin(\varphi_1-\varphi_3) \approx \frac{\sin\delta}{\sin\beta}. \tag{140}$$

Notînd

$$\sin\tilde{\psi} = \frac{\sin\delta}{\sin\beta}; \quad \cos\tilde{\psi} = \frac{\sin\alpha\cos\delta}{\sin\beta}, \tag{141}$$

din condiţiile (139)—(140) se obţine

$$\varphi_1 - \varphi_3 \approx \pi - \tilde{\psi}. \tag{142}$$

În mod analog, dacă se notează

$$\sin\tilde{\psi}^* = \frac{\cos\alpha\sin\delta}{\sin\beta}; \quad \cos\tilde{\psi}^* = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \tag{143}$$

din ecuațiile (128), (129) rezultă

$$\cos(\varphi_3 - \theta_3) \approx -\cos\tilde{\psi}^*; \quad \sin(\varphi_3 - \theta_3) \approx -\sin\tilde{\psi}^* \tag{144}$$

și se obține

$$\varphi_3 - \theta_3 \approx \tilde{\psi}^* - \pi. \tag{145}$$

Rezultă, într-o primă aproximație, următoarele soluții:

$$\varphi_1 \approx \theta_1; \quad \varphi_3 \approx \theta_1 + \tilde{\psi} - \pi; \quad \gamma_1 \approx \alpha; \quad \gamma_3 \approx \beta,$$
$$\theta_3 \approx \theta_1 + \tilde{\psi} - \tilde{\psi}^*. \tag{146}$$

În aceste condiții, din relația (135) mai rezultă

$$\zeta_1 = -r_3 \frac{(1-\cos\beta)\cos\alpha}{\cos\beta}[-\cos\tilde{\psi}\cos(3\theta_1 + 3\tilde{\psi}) + \cos\beta\cos\tilde{\psi}\sin(3\theta_1 + 3\psi)]. \tag{147}$$

Abaterile

$$\Delta\gamma_1 = \gamma_1 - \alpha; \quad \Delta\gamma_3 = \gamma_3 - \beta; \quad \Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \theta_1,$$
$$\Delta\varphi_3 = \varphi_3 - (\theta_1 + \tilde{\psi} - \pi); \quad \Delta\theta_3 = \theta_3 - (\theta_1 + \tilde{\psi} - \tilde{\psi}^*), \tag{148}$$

se pot calcula de asemenea din sistemul de ecuații (125) — (129), (133) — — (135), din care aproximînd pentru unghiuri mici sinusul prin argument, iar cosinusul prin 1, rezultă:

$$\Delta\gamma_1 = \frac{r_1(1-\cos\alpha)}{2l\cos\alpha}\sin 3\theta_1 + \tag{149}$$
$$+ \frac{r_3(1-\cos\beta)}{2l\cos\beta}[-\sin\tilde{\psi}\cos(3\theta_1 + 3\tilde{\psi}) + \cos\beta\cos\tilde{\psi}\sin(3\theta_1 + 3\tilde{\psi})],$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{r_1(1-\cos\alpha)}{2l\cos\alpha\sin\alpha}\cos 3\theta_1 + \tag{150}$$
$$+ \frac{r_3(1-\cos\beta)}{2l\sin\alpha\cos\beta}[\cos\tilde{\psi}\cos(3\theta_1 + 3\tilde{\psi}) + \cos\beta\sin\tilde{\psi}\sin(3\theta_1 + 3\tilde{\psi})],$$

$$\Delta\gamma_3 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}(\Delta\gamma_1\cos\delta + \Delta\varphi_1\sin\delta), \tag{151}$$

$$\Delta\varphi_3 = \Delta\varphi_1 - \Delta\gamma_3\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\sin\alpha\sin\beta}, \tag{152}$$

$$\Delta\theta_3 = \Delta\gamma_1\frac{1}{\sin\delta} + \Delta\varphi_3\left(1 + \frac{\sin^2\alpha\cos\delta}{\sin^2\delta\cos\alpha}\right) - \Delta\varphi_1\frac{\sin^2\alpha\cos\delta}{\sin^2\delta\cos\alpha}. \tag{153}$$

Cu aceste relații se obține pentru deplasarea ζ_1 expresia

$$\frac{\zeta_1}{l} = \frac{r_1(1 - \cos\alpha)}{2\cos\alpha} \sin\alpha \sin 3\theta_1. \tag{154}$$

Coordonatele punctului O_2 sub formă matriceală, în sistemul de referință $O_1x_1y_1z_1$, se scriu :

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix} = \frac{r_1(1 - \cos\alpha)}{2\cos\alpha} [\varphi_1]^{-1} \begin{bmatrix} \cos 3\varphi_1 \\ \cos\alpha \sin 3\varphi_1 \\ \sin\alpha \sin 3\varphi_1 \end{bmatrix}. \tag{155}$$

În sistemul de referință fix $O_0x_6y_6z_6$, punctul O_2 are coordonatele x_{26}, y_{26}, z_{26}, care rezultă din transformarea :

$$\begin{bmatrix} x_{26} \\ y_{26} \\ z_{26} \end{bmatrix} = \frac{r(1 - \cos\alpha)}{2\cos\alpha} [T_{06}][T_{10}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}. \tag{156}$$

Cum

$$[T_{06}] = (-\alpha); \quad [T_{10}] = [\theta_1], \tag{157}$$

dacă se aproximează $\varphi_1 \approx \theta_1$, din relația (156) rezultă

$$x_{26} = \frac{r_1(1 - \cos\alpha)}{2\cos\alpha} \cos 3\theta_1; \quad y_{26} = \frac{r_1(1 - \cos\alpha)}{2\cos\alpha} \sin 3\theta_1; \quad z_{26} = 0. \tag{158}$$

Relațiile (158) arată că punctul O_2, în sistemul de referință fix $O_0x_6y_6z_6$, descrie un cerc cu raza egală cu $\frac{r_1(1 - \cos\alpha)}{2\cos\alpha}$.

Coordonatele punctului O_3 în sistemul $O'_2x'_2y'_2z'_2$, potrivit cu relația (20), sînt

$$\begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{r_3(1 - \cos\gamma_3)}{2\cos\gamma_3} [\varphi_3]^{-1} \begin{bmatrix} \cos 3\varphi_3 \\ \cos\gamma_3 \sin 3\varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{159}$$

Coordonatele x'_{23}, y'_{23}, z'_{23} ale punctului O'_2 în sistemul de axe $O_3x_3y_3z_3$ se scriu :

$$\begin{bmatrix} x'_{23} \\ y'_{23} \\ z'_{23} \end{bmatrix} = -[T_{32'}]^{-1} \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{r_3(1 - \cos\gamma_3)}{2\cos\gamma_3} [\varphi_3]^{-1}(\gamma_3)^{-1}[\varphi_3][\varphi_3]^{-1} \begin{bmatrix} \cos 3\varphi_3 \\ \cos\gamma_3 \sin 3\varphi_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{160}$$

Coordonatele x'_{27}, y'_{27}, z'_{27} ale punctului O'_2 în sistemul de referință fix $O_3x_7y_7z_7$ se pot scrie,

$$\begin{bmatrix} x'_{27} \\ y'_{27} \\ z'_{27} \end{bmatrix} = [T_{57}][T_{45}][T_{34}] \begin{bmatrix} x'_{23} \\ y'_{23} \\ z'_{23} \end{bmatrix}. \tag{161}$$

Efectuînd produsul matricelor și ținînd seama de relațiile (141), (142), (143) (146), rezultă

$$\begin{bmatrix} x'_{27} \\ y'_{27} \\ z'_{27} \end{bmatrix} = \frac{r_3(1-\cos\beta)}{2\cos\beta} \left[\begin{array}{cc|c} -\cos\tilde{\psi} & -\sin\tilde{\psi} & 0 \\ -\sin\tilde{\psi} & \cos\tilde{\psi} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \cos\tilde{\psi}(3\theta_1 + 3\tilde{\psi}) \\ \cos\beta\sin(3\theta_1+3\tilde{\psi}) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{162}$$

sau

$$x'_{27} = \frac{r_3(1-\cos\beta)}{2\cos\beta}[-\cos\tilde{\psi}\cos(3\theta_1+3\tilde{\psi}) - \cos\beta\sin\tilde{\psi}\sin(3\theta_1+3\tilde{\psi})],$$

$$y'_{27} = \frac{r_3(1-\cos\beta)}{2\cos\beta}[\sin\tilde{\psi}\cos(3\theta_1+3\tilde{\psi}) - \cos\beta\cos\tilde{\psi}\sin(3\theta_1+3\tilde{\psi})],$$

$$z'_{27} = 0 \tag{163}$$

Din relațiile (163) se deduce faptul că traiectoria absolută a punctului O'_2 este o elipsă avînd semiaxele $\frac{r_3(1-\cos\beta)}{2\cos\beta}$, $\frac{r_3(1-\cos\beta)}{2}$, axele de simetrie ale acesteia rezultînd prin rotirea axelor O_3x_7, O_3y_7 în jurul axei O_3z_7 cu unghiul $\pi - \tilde{\psi}$.

Considerînd valorile numerice,

$$\alpha = 30°\,;\ \delta = 45°\,;\ r_1 = r_3 = 20\text{ mm}\,;\ l = 100\text{ mm},$$

se obțin

$$\beta = 52{,}24°\,;\ \tilde{\psi} = 63{,}43°\,;\ \tilde{\psi}^* = 50{,}77°$$

și expresiile

$$\Delta\gamma_1 = 3{,}09°\cos 3(\theta_1 + 4{,}18°)\,;\ \Delta\varphi_1 = -3{,}95°\sin 3(\theta_1 + 10{,}87°),$$

$$\Delta\gamma_3 = 1{,}83°\cos 3(\theta_1 + 25{,}82°)\,;\ \Delta\varphi_3 = -2{,}80°\cos 3(\theta_1 - 3{,}85°),$$

$$\Delta\theta_3 = 1{,}35°\cos 3(\theta_1 + 8{,}78°),$$

$$x'_{27} = -4{,}476\cos 3(\theta_1 + 46{,}51°)\,;\ y'_{27} = 5{,}921\cos 3(\theta_1 + 69{,}10°),$$

$$x_{26} = 1{,}547\cos 3\theta_1\,; \qquad y_{26} = 1{,}547\sin 3\theta_1.$$

Sistemul ecuațiilor de poziție, pentru cazul numeric prezentat, a fost rezolvat și cu ajutorul unui program de calcul ce a avut la bază metoda

iterativă Newton — Raphson și s-au obținut valorile numerice ale parametrilor γ_1, φ_1, γ_3, φ_3, θ_3, în funcție de argumentul θ_1 precum și valorile numerice ale coordonatelor punctelor O_2, O_2' față de sistemele de referință fixe O_1, x_6, y_6, z_6, respectiv $O_3x_7y_7z_7$.

În figura 21 s-a reprezentat grafic abaterea $\Delta\theta_3(\theta_1)$ obținută atît pe baza formulelor aproximative, cît și pe baza calculului exact, iar în figura 22 sînt prezentate traiectoriile punctelor O_2, O_2' obținute de asemenea prin calcul aproximativ și exact.

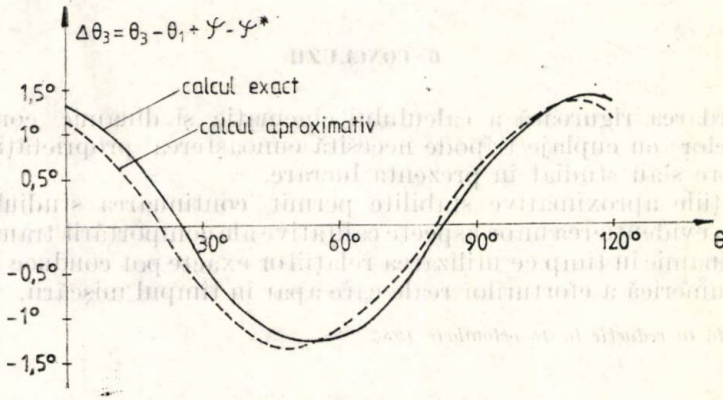


Fig. 21. — Reprezentarea grafică a abaterii $\nu\theta_3$

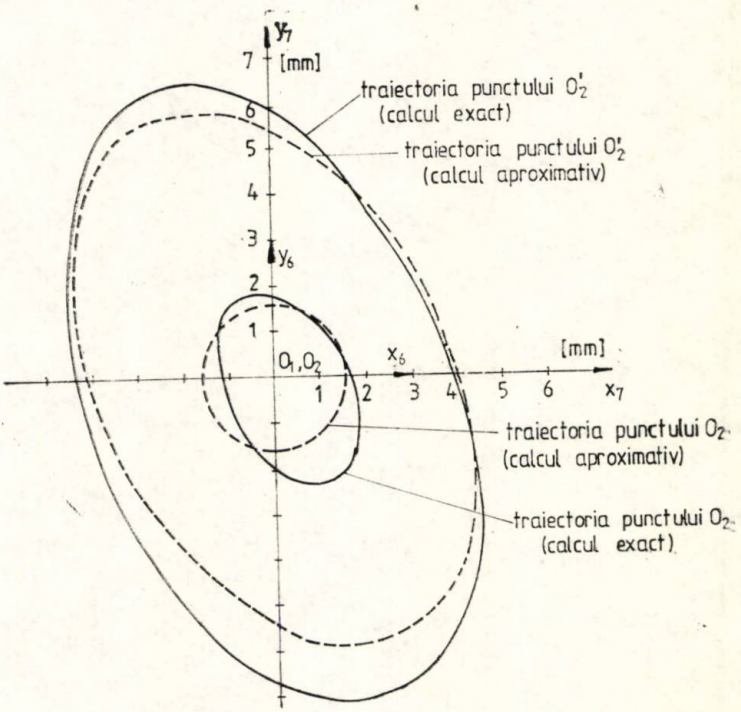


Fig. 22. — Traiectoriile punctelor O_2, O_2'

Se constată că relațiile aproximative stabilite în prezenta lucrare descriu mișcarea cu suficientă precizie pentru cazul rapoartelor $\frac{r_1}{l}, \frac{r_2}{l}$ mici care constituie cazul real întîlnit în tehnică.

Pentru rapoarte $\frac{r_1}{l}, \frac{r_2}{l}$ mai mari decît 0,05 este necesar a apela la rezolvarea sistemului ecuațiilor de poziție pe baza metodelor numerice cu ajutorul calculatorului.

6. CONCLUZII

Abordarea riguroasă a calculului cinematic și dinamic complex al mecanismelor cu cuplaje tripode necesită cunoașterea proprietăților geometrice care s-au studiat în prezenta lucrare.

Relațiile aproximative stabilite permit continuarea studiului analitic pentru evidențierea unor aspecte calitative ale comportării transmisiilor în regim dinamic în timp ce utilizarea relațiilor exacte pot conduce la determinarea numerică a eforturilor reale care apar în timpul mișcării.

Primită la redacție la 18 octombrie 1983

ECUAȚII PARAMETRICE DE STABILITATE PRIVIND FLAMBAJUL ELASTIC AL STÎLPULUI FORMAT DIN n TRONSOANE PRISMATICE COAXIALE

de T. G. REDLOV, G. IVAN

Universitatea din Brașov

Studiul abordează problema determinării sarcinii critice de flambaj elastic prin bifurcație a unui stîlp încastrat la extremitatea inferioară și liber la cea superioară, alcătuit dintr-o succesiune de n tronsoane prismatice coaxiale și încărcat cu tot atîtea forțe de compresiune centrică. Preconizîndu-se „metoda fragmentării" se prezintă avantajele utilizării unor ecuații parametrice de stabilitate, în interesul reducerii considerabile a numărului de termeni ce conțin necunoscuta problemei. Totodată se stabilesc condițiile restrictive privind valabilitatea rezultatelor obținute.

1. INTRODUCERE

Deducerea ecuațiilor de stabilitate pentru determinarea sarcinii critice de flambaj elastic prin bifurcație, în condițiile arătate în titlu, a format obiectul a numeroase cercetări, mai vechi [6] și mai recente [1], [7], evidențiindu-se dezavantajul creșterii rapide a numărului termenilor ce conțin necunoscuta problemei în funcție de numărul variațiilor de secțiune (de exemplu, de la 1 termen pentru $n = 2$ tronsoane, la 31 termeni pentru $n = 6$). Acest neajuns justifică în bună măsură recurgerea frecventă la utilizarea unor metode aproximative, mai bine adaptate cerințelor calculului electronic.

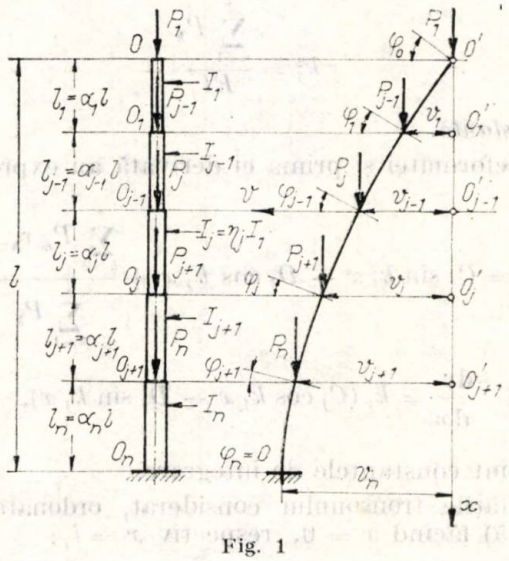


Fig. 1

În cele ce urmează, se va face uz, în vederea găsirii soluției *exacte*, de metoda integrării ecuației diferențiale a fibrei medii încovoiate, în ipoteza micilor deformații.

Stîlpul OO_n din figura 1, de lungime l, este format din n tronsoane prismatice coaxiale, avînd lungimile l_j, modulii de rigiditate EI_j și fiind

acționat la compresiune centrică prin forțele concentrate P_j. Desconsiderînd forțele axiale provenite din greutatea proprie, se pune problema determinării sarcinii totale critice de flambaj elastic. Se va admite că deformata este o curbă plană și se va exclude posibilitatea pierderii stabilității de configurație prin torsiunea stîlpului.

2. ORDONATE ȘI PANTE ALE DEFORMATEI

Raportînd tronsonul deformat, de lungime l_j, la verticala $O'x$ și orizontala $O'_{j-1}v$ [2], momentul de încovoiere în secțiunea curentă are expresia

$$M_{j-1,j} = v \sum_{h=1}^{j} P_h - \sum_{h=2}^{j} P_h v_{h-1}, \tag{1}$$

ecuația diferențială a deformatei fiind

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + k_j^2 v = \frac{\sum_{h=2}^{j} P_h v_{h-1}}{EI_j}, \tag{2}$$

în care mărimea

$$k_j^2 = \frac{\sum_{h=1}^{j} P_h}{EI_j} \tag{3}$$

se consideră *constantă*.

Ordonata deformatei și prima ei derivată au expresiile:

$$v = C_j \sin k_j x + D_j \cos k_j x + \frac{\sum_{h=2}^{j} P_h v_{h-1}}{\sum_{h=1}^{j} P_h}, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k_j (C_j \cos k_j x - D_j \sin k_j x), \tag{5}$$

în care C_j și D_j sînt constantele de integrare.

La extremitățile tronsonului considerat, ordonatele și pantele se obțin din (4) și (5) făcînd $x = 0$, respectiv $x = l_j$:

$$v_{j-1} = D_j + \frac{\sum_{h=2}^{j} P_h v_{h-1}}{\sum_{h=1}^{j} P_h}, \tag{6}$$

$$\varphi_{j-1} = k_j C_j, \tag{7}$$

$$v_j = C_j \sin k_j l_j + D_j \cos k_j l_j + \frac{\sum_{h=2}^{j} P_h v_{h-1}}{\sum_{h=1}^{j} P_h}, \tag{8}$$

$$\varphi_j = k_j(C_j \cos k_j l_j - D_j \sin k_j l_j). \tag{9}$$

Aplicînd ultimele patru relații, pe rînd, celor n tronsoane ale stîlpului, se obțin expresiile ordonatelor și pantelor deformatei, după cum urmează.

1°. *Tronsonul* OO_1 ($j = 1$). Întrucît $v_0 = 0$, rezultă :

$$D_1 = 0, \quad \varphi_0 = k_1 C_1, \tag{10}$$

$$v_1 = C_1 \sin k_1 l_1, \tag{11}$$

$$\varphi_1 = k_1 C_1 \cos k_1 l_1 \tag{12}$$

2°. *Tronsonul* O_1O_2 ($j = 2$) :

$$v_1 = \frac{P_1 + P_2}{P_1} D_2, \tag{13}$$

$$\varphi_1 = k_2 C_2 \tag{14}$$

și, ținînd cont de (13),

$$v_2 = C_2 \sin k_2 l_2 + \left(\frac{P_2}{P_1} + \cos k_2 l_2\right) D_2, \tag{15}$$

$$\varphi_2 = k_2(C_2 \cos k_2 l_2 - D_2 \sin k_2 l_2). \tag{16}$$

3°. *Tronsonul* O_2O_3 ($j = 3$) :

$$v_2 = \frac{P_2}{P_1} D_2 + \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1 + P_2} D_3, \tag{17}$$

$$\varphi_2 = k_3 C_3 \tag{18}$$

și, ținînd cont de (13) și (17),

$$v_3 = \frac{P_2}{P_1} D_2 + C_3 \sin k_3 l_3 + \left(\frac{P_3}{P_1 + P_2} + \cos k_3 l_3\right) D_3, \tag{19}$$

$$\varphi_3 = k_3(C_3 \cos k_3 l_3 - D_3 \sin k_3 l_3). \tag{20}$$

4°. *Tronsonul* O_3O_4 ($j = 4$). În mod similar se obține :

$$v_3 = \frac{P_2}{P_1} D_2 + \frac{P_3}{P_1 + P_2} D_3 + \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{P_1 + P_2 + P_3} D_4, \tag{21}$$

$$\varphi_3 = k_4 C_4, \tag{22}$$

$$v_4 = \frac{P_2}{P_1} D_2 + \frac{P_3}{P_1 + P_2} D_3 + C_4 \sin k_4 l_4 +$$

$$+ \left(\frac{P_4}{P_1 + P_2 + P_3} + \cos k_4 l_4 \right) D_4, \tag{23}$$

$$\varphi_4 = k_4 (C_4 \cos k_4 l_4 - D_4 \sin k_4 l_4), \tag{24}$$

5°. *Tronsonul* O_4O_5 $(j = 5)$

$$v_4 = \frac{P_2}{P_1} D_2 + \frac{P_3}{P_1 + P_2} D_3 + \frac{P_4}{P_1 + P_2 + P_3} D_4 + \frac{P_1 + \ldots + P_5}{P_1 + \ldots + P_4} D_5, \tag{25}$$

$$\varphi_4 = k_5 C_5, \tag{26}$$

$$v_5 = \frac{P_2}{P_1} D_2 + \frac{P_3}{P_1 + P_2} D_3 + \frac{P_4}{P_1 + P_2 + P_3} D_4 + C_5 \sin k_5 l_5 +$$

$$+ \left(\frac{P_5}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4} + \cos k_5 l_5 \right) D_5, \tag{27}$$

$$\varphi_5 = k_5 (C_5 \cos k_5 l_5 - D_5 \sin k_5 l_5). \tag{28}$$

6°. *Tronsonul* O_5O_6 $(j = 6)$.

$$v_5 = \frac{P_2}{P_1} D_2 + \frac{P_3}{P_1 + P_2} D_3 + \frac{P_4}{P_1 + P_2 + P_3} D_4 + \frac{P_5}{P_1 + \ldots + P_4} D_5 +$$

$$+ \frac{P_1 + \ldots + P_6}{P_1 + \ldots + P_5} D_6, \tag{29}$$

$$\varphi_5 = k_6 C_6. \tag{30}$$

Considerînd că stîlpul este format din șase tronsoane, în secțiunea O_6 derivata este nulă, așa încît

$$C_6 = D_6 \operatorname{tg} k_6 l_6. \tag{31}$$

3. ECUAȚIA DE STABILITATE ÎN CAZUL $n = 6$

Condițiile de continuitate ale funcțiilor v și $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ se exprimă prin eliminarea ordonatelor v_j și a pantelor φ_j între relațiile găsite mai sus, obținîndu-se astfel următoarele ecuații:

$$C_1 \sin k_1 l_1 = \frac{P_1 + P_2}{P_1} D_2, \tag{32}$$

$$C_2 \sin k_2 l_2 + D_2 \cos k_2 l_2 = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{P_1 + P_2} D_3, \tag{33}$$

$$C_3 \sin k_3 l_3 + D_3 \cos k_3 l_3 = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{P_1 + P_2 + P_3} D_4, \tag{34}$$

$$C_4 \sin k_4 l_4 + D_4 \cos k_4 l_4 = \frac{P_1 + \ldots + P_5}{P_1 + \ldots + P_4} D_5, \tag{35}$$

$$C_5 \sin k_5 l_5 + D_5 \cos k_5 l_5 = \frac{P_1 + \ldots + P_6}{P_1 + \ldots + P_5} D_6, \tag{36}$$

$$k_1 C_1 \cos k_1 l_1 = k_2 C_2, \tag{37}$$

$$k_2(C_2 \cos k_2 l_2 - D_2 \sin k_2 l_2) = k_3 C_3, \tag{38}$$

$$k_3(C_3 \cos k_3 l_3 - D_3 \sin k_3 l_3) = k_4 C_4, \tag{39}$$

$$k_4(C_4 \cos k_4 l_4 - D_4 \sin k_4 l_4) = k_5 C_5, \tag{40}$$

$$k_5(C_5 \cos k_5 l_5 - D_5 \sin k_5 l_5) = k_6 C_6. \tag{41}$$

Ecuațiile (31) ... (41) formează un sistem liniar și omogen, ale cărui necunoscute (11 constante de integrare) trebuie să aibă valori astfel încît determinantul format din coeficienții lor să fie egal cu zero. Pentru a reduce în mod convenabil ordinul acestui determinant, se elimină necunoscutele C_1, C_2, C_3, C_4, C_6 și D_6, observînd în prealabil că, în virtutea relației (3), se poate scrie :

$$P_1 + \ldots + P_j = k_j^2 EI_j. \tag{42}$$

Introducînd notațiile

$$r_j = k_j I_j, \; t_j = \operatorname{tg} k_j l_j \tag{43}$$

rezultă sistemul :

$$(r_5 t_5 t_6 - r_6) C_5 + (r_5 t_6 + r_6 t_5) D_5 = 0, \tag{44}$$

$$C_5 \sin k_4 l_4 + \frac{k_4}{k_5} D_4 - \frac{r_5}{r_4} D_5 \cos k_4 l_4 = 0, \tag{45}$$

$$-\frac{1}{r_1}(r_1 t_1 + r_2 t_2) D_2 \cos k_2 l_2 + \frac{k_3 r_3}{k_2 r_2} t_1 D_3 = 0, \tag{46}$$

$$\frac{k_2}{k_3} \frac{\sin k_3 l_3}{\cos k_2 l_2} D_2 - \frac{1}{r_2}(r_2 t_2 + r_3) t_3) D_3 \cos k_3 l_3 + \frac{k_4 r_4}{k_3 r_3} t_2 D_4 = 0, \tag{47}$$

$$\frac{k_3}{k_4} \frac{\sin k_4 l_4}{\cos k_3 l_3} D_3 - \frac{1}{r_3}(r_3 t_3 + r_4 t_4) D_4 \cos k_4 l_4 + \frac{k_5 r_5}{k_4 r_4} t_3 D_5 = 0. \tag{48}$$

Dezvoltînd determinantul, se obține următoarea *ecuație de stabilitate elastică* :

$$\frac{r_1}{r_2} t_1 t_2 + \frac{r_1}{r_3} t_1 t_3 + \frac{r_1}{r_4} t_1 t_4 + \frac{r_1}{r_5} t_1 t_5 + \frac{r_1}{r_6} t_1 t_6 + \frac{r_2}{r_3} t_2 t_3 +$$

$$+ \frac{r_2}{r_4} t_2 t_4 + \frac{r_2}{r_5} t_2 t_5 + \frac{r_2}{r_6} t_2 t_6 + \frac{r_3}{r_4} t_3 t_4 + \frac{r_3}{r_5} t_3 t_5 + \frac{r_3}{r_6} t_3 t_6 +$$

$$+\frac{r_4}{r_5}t_4t_5+\frac{r_4}{r_6}t_4t_6+\frac{r_5}{r_6}t_5t_6-\frac{r_3r_5}{r_4r_6}\frac{\Pi}{t_1t_2}-\frac{r_2r_5}{r_4r_6}\frac{\Pi}{t_1t_3}-\frac{r_2r_5}{r_3r_6}\frac{\Pi}{t_1t_4}-$$

$$-\frac{r_2r_4}{r_3r_6}\frac{\Pi}{t_1t_5}-\frac{r_2r_4}{r_3r_5}\frac{\Pi}{t_1t_6}-\frac{r_1r_5}{r_4r_6}\frac{\Pi}{t_2t_3}-\frac{r_1r_5}{r_3r_6}\frac{\Pi}{t_2t_4}-\frac{r_1r_4}{r_3r_6}\frac{\Pi}{t_2t_5}-$$

$$-\frac{r_1r_4}{r_3r_5}\frac{\Pi}{t_2t_6}-\frac{r_1r_5}{r_2r_6}\frac{\Pi}{t_3t_4}-\frac{r_1r_4}{r_2r_6}\frac{\Pi}{t_3t_5}-\frac{r_1r_4}{r_2r_5}\frac{\Pi}{t_3t_6}-\frac{r_1r_3}{r_2r_6}\frac{\Pi}{t_4t_5}-$$

$$-\frac{r_1r_3}{r_2r_5}\frac{\Pi}{t_4t_6}-\frac{r_1r_3}{r_2r_4}\frac{\Pi}{t_5t_6}+\frac{r_1r_3r_5}{r_2r_4r_6}\Pi=1, \tag{49}$$

în care

$$\Pi=t_1t_2t_3t_4t_5t_6. \tag{50}$$

Se observă că, în ecuația (49), numărul termenilor ce-l conțin pe t_j se ridică la

$$T_6^2=C^6+C_6^4+C_6^6=31. \tag{51}$$

4. ECUAȚII PARAMETRICE DE STABILITATE ÎN CAZUL $n=6$

Deși remarcabilă prin forma sa, ecuația de stabilitate (49) prezintă dezavantajul numărului mare de termeni pe care-i conține. În cele ce urmează se va realiza o reducere considerabilă a volumului de calcule, pe care-l implică rezolvarea globală a problemei studiate, înlocuind (49) prin *două ecuații parametrice de stabilitate*. În acest scop se va recurge la procedeul de calcul denumit *metoda fragmentării* (care nu este altceva decît o extindere asupra problemelor de stabilitate a metodei izolării părților, frecvent utilizată în mecanică).

În cazul stîlpului reprezentat în figura 2*a*, acesta se va fragmenta în două părți, OO_3 și O_3O_6, introducînd în secțiunea O_3 forțele și momentele de interacțiune $P_1+P_2+P_3$, respectiv M_3 (fig. 2*b* și 2*c*).

4.1. PRIMA ECUAȚIE PARAMETRICĂ DE STABILITATE ELASTICĂ

Fragmentul OO_3 lucrează, evident, în condițiile analizate la tratarea globală a stabilității stîlpului. Ținînd cont de (42) și (43), relațiile (32) și (33) se scriu sub forma:

$$C_1\sin k_1l_1=\frac{k_2r_2}{k_1r_1}D_2, \tag{32'}$$

$$C_2\sin k_2l_2+D_2\cos k_2l_2=\frac{k_3r_3}{k_2r_2}D_3. \tag{33'}$$

Eliminînd C_1, C_2 și D_2 între (32'), (33'), (37) și (38), rezultă ecuația

$$r_2(r_1t_1+r_2t_2)C_3=r_3(r_2-r_1t_1t_2)D_3. \tag{52}$$

Eliminînd acum D_3 între (20) și (52), se obține următoarea relație, care reprezintă *prima ecuație parametrică de stabilitate elastică*, relativă la stîlpul considerat:

$$\frac{\varphi_3\left(1-\frac{r_1}{r_2}t_1t_2\right)}{k_3 C_3 \cos k_3 l_3} = \psi = 1-\frac{r_1}{r_2}t_1t_2-\frac{r_1}{r_3}t_1t_3-\frac{r_2}{r_3}t_2t_3. \tag{53}$$

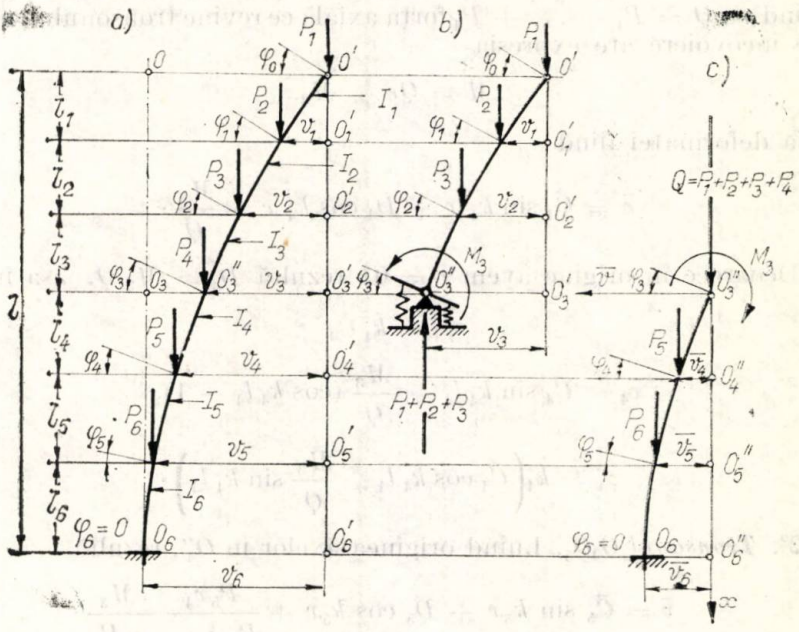


Fig. 2

Se observă că deformația barei este nedeterminată, deoarece constanta C_3 are o valoare arbitrară.

Momentul de încovoiere M_3 în secțiunea de separare dintre cele două fragmente are expresia

$$M_3 = -EI_3\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=l_3},$$

sau, ținînd cont de (43),

$$M_3 = E k_3 r_3(C_3 \sin k_3 l_3 + D_3 \cos k_3 l_3). \tag{54}$$

Eliminînd D_3 între (52) și (54), rezultă:

$$M_3 = \frac{ETk_3 C_3 \cos k_3 l_3}{1-\frac{r_1}{r_2}t_1t_2}, \tag{55}$$

în care

$$T = r_1 t_1 + r_2 t_2 + r_3 t_3 - \frac{r_1 r_3}{r_2} t_1 t_2 t_3. \tag{56}$$

4.2. A DOUA ECUAȚIE PARAMETRICĂ DE STABILITATE ELASTICĂ

1°. *Tronsonul* O_3O_4. Raportînd elementul la axele din figura 2*c* și notînd cu $Q = P_1 + \ldots + P_4$ forța axială ce revine tronsonului, momentul de încovoiere are expresia

$$M = Q\bar{v} + M_3,$$

ecuația deformatei fiind

$$\bar{v} = \bar{C}_4 \sin k_4 x + \bar{D}_4 \cos k_4 x - \frac{M_3}{Q}.$$

Deoarece în origine avem $\bar{v} = 0$, rezultă $\bar{D}_4 = M_3/Q$, așa încît

$$\varphi_3 = k_4 \bar{C}_4 \tag{57}$$

$$\bar{v}_4 = \bar{C}_4 \sin k_4 l_4 + \frac{M_3}{Q}(\cos k_4 l_4 - 1), \tag{58}$$

$$\varphi_4 = k_4\left(\bar{C}_4 \cos k_4 l_4 - \frac{M_3}{Q} \sin k_4 l_4\right). \tag{59}$$

2°. *Tronsonul* O_4O_5. Luînd originea axelor în O_4'', rezultă

$$\bar{v} = \bar{C}_5 \sin k_5 x + \bar{D}_5 \cos k_5 x + \frac{P_5 \bar{v}_4 - M_3}{P_1 + \ldots + P_5}.$$

La extremitatea superioară ($x = 0$) avem

$$\bar{v}_4 = \frac{P_1 + \ldots + P_5}{P_1 + \ldots + P_4} \bar{D}_5 - \frac{M_3}{Q}, \tag{60}$$

$$\varphi_4 = k_5 \bar{C}_5, \tag{61}$$

iar la cea inferioară ($x = l_5$), ținînd cont de (60) :

$$\bar{v}_5 = \bar{C}_5 \sin k_5 l_5 + \left(\frac{P_5}{P_1 + \ldots + P_4} + \cos k_5 l_5\right) \bar{D}_5 - \frac{M_3}{Q}, \tag{62}$$

$$\varphi_5 = k_5(\bar{C}_5 \cos k_5 l_5 - \bar{D}_5 \sin k_5 l_5). \tag{63}$$

3°. *Tronsonul* O_5O_6. Luînd originea axelor în O_5'' rezultă

$$\bar{v} = \bar{C}_6 \sin k_6 x + \bar{D}_6 \cos k_6 x + \frac{P_5 \bar{v}_4 + P_6 \bar{v}_5 - M_3}{P_1 + \ldots + P_6}.$$

La extremitatea superioară ($x = 0$) avem, ținînd cont de (60),

$$\bar{v}_5 = \frac{P_5}{P_1 + \ldots + P_4} \bar{D}_5 + \frac{P_1 + \ldots + P_6}{P_1 + \ldots + P_5} \bar{D}_6 - \frac{M_3}{Q}, \tag{64}$$

$$\varphi_6 = k_6 \bar{C}_6. \tag{65}$$

În secțiunea de încastrare ($x = l_6$) rotirea este nulă, așa încît:

$$\bar{C}_6 = \bar{D}_6 \operatorname{tg} k_6 l_6. \tag{66}$$

4°. *Relații de continuitate.* Egalînd între ele expresiile găsite mai sus pentru $\bar{v}_4$, φ_4, $\bar{v}_5$, φ_5 și ținînd cont de (42), (43) și (66), se obțin relațiile:

$$\bar{C}_4 \sin k_4 l_4 + \frac{M_3}{Q} \cos k_4 l_4 = \frac{k_5 r_5}{k_4 r_4} \bar{D}_5, \tag{67}$$

$$\bar{C}_4 \cos k_4 l_4 - \frac{M_3}{Q} \sin k_4 l_4 = \frac{k_5}{k_4} \bar{C}_5, \tag{68}$$

$$\bar{C}_5 \sin k_5 l_5 + \bar{D}_5 \cos k_5 l_5 = \frac{k_6 r_6}{k_5 r_5} \bar{D}_6, \tag{69}$$

$$\bar{C}_5 \cos k_5 l_5 - \bar{D}_5 \sin k_5 l_5 = \frac{k_6}{k_5} t_6 \bar{D}_6. \tag{70}$$

Eliminînd acum $\bar{C}_5$, $\bar{D}_5$ și $\bar{D}_6$ între cele patru ecuații de mai sus, se obține

$$k_4 \bar{C}_4 = \frac{R}{S} \frac{M_3}{E}, \tag{71}$$

în care s-a notat:

$$R = \frac{t_4}{r_4} + \frac{t_5}{r_5} + \frac{t_6}{r_6} - \frac{r_5}{r_4 r_6} t_4 t_5 t_6, \tag{72}$$

$$S = 1 - \frac{r_4}{r_5} t_4 t_5 - \frac{r_4}{r_6} t_4 t_6 - \frac{r_5}{r_6} t_5 t_6. \tag{73}$$

În virtutea relațiilor (55) și (57), se obține din (71) cea de *a doua ecuație parametrică de stabilitate elastică*, relativă la stîlpul considerat:

$$\frac{\varphi_3 \left(1 - \frac{r_1}{r_2} t_1 t_2\right)}{k_3 C_3 \cos k_3 l_3} = \psi = \frac{RT}{S}. \tag{74}$$

Ca o verificare, se constată că, eliminînd parametrul ψ între ecuațiile (53) și (74), se regăsește ecuația de stabilitate (49).

Este de observat că numărul termenilor ce-l conțin pe t_j în ambele ecuații parametrice se ridică, în cazul de față, la 14, fiind așadar cu mult inferior celui de figurează în ecuația unică ce stabilitate (31 termeni).

4.3. SARCINA CRITICĂ DE FLAMBAJ PRIN BIFURCAȚIE

Introducînd notațiile

$$l_j = \alpha_j l \quad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_6 = 1), \tag{75}$$

$$I_j = \eta_j I_1 = A_j i_j^2 \quad (\eta_1 = 1), \tag{76}$$

$$P_j = \beta_j P_1 \ (\beta_1 = 1), \tag{77}$$

rezultă din (43):

$$r_1 = k_1 I_1, \ r_2 = \frac{r_1}{A_0}, \ A_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta_2(1 + \beta_2)}},$$

$$r_3 = \frac{r_1}{B_0}, \ B_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta_3(1 + \beta_2 + \beta_3)}},$$

$$r_4 = \frac{r_1}{C_0}, \ C_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta_4(1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)}}, \tag{78}$$

$$r_5 = \frac{r_1}{D_0}, \ D_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta_5(1 + \beta_2 + \ldots + \beta_5)}},$$

$$r_6 = \frac{r_1}{E_0}, \ E_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta_6(1 + \beta_2 + \ldots + \beta_6)}};$$

$$t_j = \operatorname{tg} \varkappa_j u, \quad \varkappa_j = \alpha_j \sqrt{\frac{1 + \beta_2 + \ldots + \beta_j}{\eta_j}}, \tag{79}$$

$$u = k_1 l. \tag{80}$$

Ecuațiile parametrice de stabilitate elastică se scriu acum:

$$\psi = 1 - A_0 t_1 t_2 - B_0 t_1 t_3 - \frac{B_0}{A_0} t_2 t_3, \tag{81}$$

$$\psi = \frac{R_1 T_1}{S}, \ R_1 = r_1 R = C_0 t_4 + D_0 t_5 + E_0 t_6 - \frac{C_0 E_0}{D_0} t_4 t_5 t_6;$$

$$T_1 = \frac{T}{r_1} = t_1 + \frac{t_2}{A_0} + \frac{t_3}{B_0} - \frac{A_0}{B_0} t_1 t_2 t_3,$$

$$S = 1 - \frac{D_0}{C_0} t_4 t_5 - \frac{E_0}{C_0} t_4 t_6 - \frac{E_0}{D_0} t_5 t_6. \tag{82}$$

Problema se rezolvă prin încercări, dînd necunoscutei auxiliare u diverse valori, pînă se realizează egalitatea dintre valorile parametrului ψ, date de ecuațiile (81) și (82). Se va reține, evident, cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuațiilor parametrice de stabilitate elastică.

Sarcina critică de flambaj rezultă din (80), ținînd cont de (3) și (77) :

$$P_{1,cr} = \frac{u^2 EI_1}{l^2}, \quad (P_1 + \ldots + P_6)_{cr} = (1 + \beta_2 + \ldots + \beta_6) P_{1,cr}. \quad (83)$$

4.4. CONDIȚII RESTRICTIVE

Pentru ca ecuațiile de stabilitate să ofere soluții valabile, este necesar ca, la atingerea sarcinii critice de flambaj, tensiunile normale în secțiunile stîlpului să nu depășească limita de proporționalitate, care poate fi egalată cu limita de elasticitate σ_{el} a materialului [5] (în ipoteza că acesta respectă legea lui Hooke). Vor trebui îndeplinite, așadar, următoarele condiții restrictive :

$$\sigma_{1,cr} = \frac{(1 + \beta_2 + \ldots + \beta_j) P_{1,cr}}{A_j} \leqslant \sigma_{el}, \; j = 1, 2, \ldots, 6. \quad (84)$$

Pentru primul tronson, OO_1, rezultă, ținînd cont de (83) și (76) :

$$\sigma_{1cr} = \frac{P_{1,cr}}{A_1} = \frac{4u^2 E}{\lambda_1^2} \leqslant \sigma_{el},$$

de unde

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_{01} = 2u \sqrt{\frac{E}{\sigma_{el}}}, \quad \lambda_1 = \frac{2l}{i_1}. \quad (85)$$

Mărimea λ_1 reprezintă, prin definiție, *coeficientul convențional de subțirime corespunzător tronsonului* OO_1, fiind egal cu coeficientul de subțirime al stîlpului, în ipoteza că ar avea, în tot lungul său, secțiunea primului tronson.

Pentru tronsonul $O_{j-1} O_j$ rezultă :

$$\lambda_j \geqslant \lambda_{0j} = \lambda_{01} \sqrt{\frac{1 + \beta_2 + \ldots + \beta_j}{\eta_j}}, \; \lambda_j = \frac{2l}{i_j} = \lambda_1 \sqrt{\frac{A_j}{\eta_j A_1}}, \quad (86)$$

în care λ_j este coeficientul convențional de subțirime corespunzător tronsonului respectiv.

5. CONSIDERAȚII FINALE

Numărul T_n de termeni, care-l conțin pe t_j în ecuația unică de stabilitate, crește rapid, odată cu cel al tronsoanelor, fapt care rezultă din tabela de mai jos, întocmită fie prin particularizarea ecuației (49), fie prin rezolvare directă :

Numărul tronsoanelor, n	Numărul termenilor, T_n
2	$T_2 = C_2^2 = 1$
3	$T_3 = C_3^2 = 2T_2 + 1 = 3$
4	$T_4 = C_4^2 + C_4^4 = 2T_3 + 1 = 7$
5	$T_5 = C_5^2 + C_5^4 = 2T_4 + 1 = 15$
6	$T_6 = C_6^2 + C_6^4 + C_6^6 = 2T_5 + 1 = 31$

Un număr mai mare de șase tronsoane nu prezintă un interes practic deosebit, întrucît, chiar dacă s-ar include și greutatea proprie a stîlpului în valorile sarcinilor concentrate, erorile, care afectează rezultatele obținute prin aplicarea ecuațiilor de stabilitate (49), respectiv (81) și (82), sînt nesemnificative. De exemplu, fie q greutatea unității de lungime a unui stîlp de secțiune constantă, neîncărcat cu forțe concentrate. Pentru a determina valoarea sarcinii critice de flambaj elastic în condițiile de fixare din figura 1, se împarte piesa în șase tronsoane egale, admițînd, în mod aproximativ, că sarcina aferentă fiecărui tronson, $ql/6$, se aplică prin înjumătățire la capetele acestuia. Utilizînd ecuațiile (81) și (82), evident că rezultatul obținut nu va mai fi exact ; se găsește în cazul de față

$$\frac{l^2}{EI}(ql)_{cr} = 7{,}7474, \tag{87}$$

în loc de 7,837, valoare mai exactă, obținută cu ajutorul funcțiilor Bessel Se vede că rezultatul (87) este acoperitor, eroarea fiind de 1,1%. În cazul. existenței unei încărcări complexe — sarcini concentrate și continue — împărțirea stîlpului în șase tronsoane conduce la rezultate și mai mulțumitoare din punctul de vedere al exactității.

Primită la 6 iulie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. V. BĂNUȚ, *Stability of column with two-stage variation cross section*, 3-rd International Colloquium for Stability, Timișoara, 1982.
2. A. A. BELEȘ, R. P. VOINEA, *Rezistența materialelor* II, Editura tehnică, București, 1958.
3. O. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1963.
4. A. N. DINNIK, *Ustoicivosti arok*, Gostehizdat, Moskva, 1964.
5. G. IVAN, *Cu privire la domeniul flambajului elastic al barelor drepte cu două forțe de compresiune*, Sesiunea de comunicări tehnico-științifice, Promex, Brăila, 1984.
6. C. KOLLBRUNNER, M. MEISTER, *Knicken. Theorie und Berechnung von Knickstäben*, Springer-Verlag, Berlin, 1955.
7. D. MATEESCU. I. APPELTAUER, E. CUTEANU, *Stabilitatea la compresiune a structurilor din bare de oțel*, Editura Academiei R. S. România, București, 1980.
8. A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
9. L. STABILINI, *Tecnica delle costruzioni*, Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano, 1956.
10. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stabilității elastice*, Editura tehnică, București, 1967.

DOUĂ METODE MATRICEALE PENTRU STUDIUL ÎNCOVOIERII GRINZII CONTINUE PE REAZEME ELASTICE ÎNCLINATE

de SORIN DUMITRU MUȘAT,

Universitatea din Galați

În lucrare sînt prezentate două moduri de abordare, în formă matriceală, a problemei încovoierii grinzii continue pe reazeme elastice înclinate față de planul forțelor ; planul forțelor este unul din planele care conțin axele principale de inerție ale secțiunilor grinzii. Unul din modurile de abordare are la bază ecuația CLAPEYRON (de trei săgeți și trei momente) ; celălalt mod de abordare este în contextul metodei elementelor finite.

1. INTRODUCERE

Se consideră o grindă dreaptă supusă acțiunii unui sistem plan de forțe, raportată la sistemul de axe *Oxyz* planele *xOy* și *xOz* conținînd axele principale de inerție ale secțiunilor transversale ale grinzii ; planul forțelor este planul *xOz* (fig. 1*a*). Grinda prezintă un sistem de rezemări elastice, direcțiile de acțiune ale acestor reazeme fiind înclinate cu unghiurile φ_i, $i = 0,1, \ldots, n, \; n+1$, față de planul forțelor (în plane perpendiculare pe axa barei).

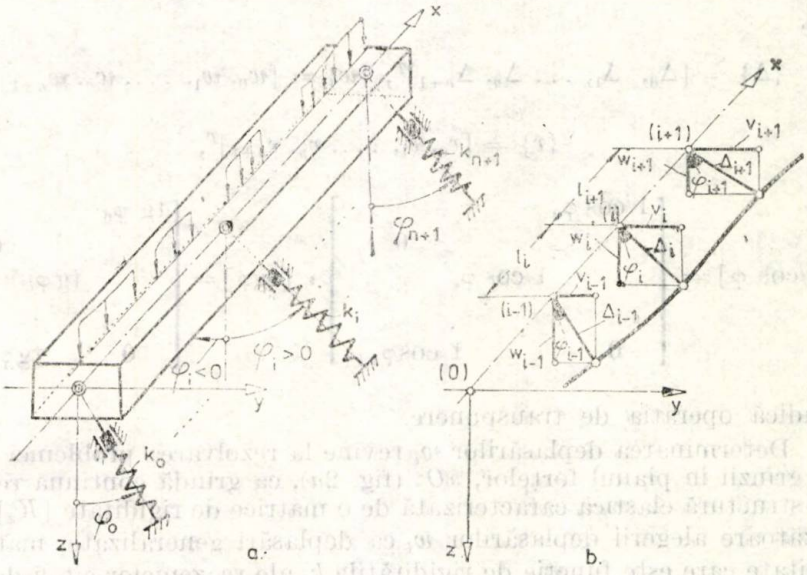


Fig. 1

Fiecare din reazemele elastice reprezintă o structură elastică de rezemare a cărei elasticitate pe direcții perpendiculare pe axa resortului simbol este neglijabilă în raport cu elasticitatea pe direcția axului resortului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 3, 1986, P. 279–293

Sub acțiunea forțelor, punctele axei grinzii aflate în secțiunile de reazem sînt obligate să se deplaseze pe direcțiile de acțiune ale reazemelor elastice cu cantitățile Δ_i, $i = 0, 1, n+1$, ale căror componente sînt săgețile w_i și v_i, $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ (fig. 1*b*); grinda va suferi, în general, o încovoiere strîmbă, rezultat al cuplării încovoierii grinzii în planul forțelor cu încovoierea în planul perpendicular pe planul forțelor. Se pot scrie relațiile:

$$v_i = \Delta_i \sin \varphi_i, \quad w_i = \Delta_i \cos \varphi_i, \quad i = 0,1,\ldots, n, n+1, \tag{1}$$

adică din cele trei deplasări dintr-o secțiune de rezemare, numai una este independentă.

2. METODĂ MATRICEALĂ PE BAZA ECUAȚIEI CLAPEYRON

2.1. FORMULAREA PROBLEMEI

Se aleg ca necunoscute principale ale problemei deplasările w_i, $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$; pe baza relațiilor (1) se pot scrie relațiile matriceale:

$$\{\Delta\} = [1/\cos \varphi]\,\{w\}, \quad \{v\} = [\operatorname{tg}\varphi]\,\{w\}, \tag{2}$$

unde

$$\{\Delta\} = [\Delta_0, \Delta_1, \ldots \Delta_n, \Delta_{n+1}]^T, \quad \{w\} = [w_0, w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}]^T,$$

$$\{v\} = [v_0, v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}]^T,$$

$$[1/\cos \varphi] = \begin{bmatrix} 1/\cos\varphi_0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1/\cos\varphi_i & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1/\cos\varphi_{n+1} \end{bmatrix}, \quad [\operatorname{tg}\varphi] = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\varphi_0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \operatorname{tg}\varphi_i & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \operatorname{tg}\varphi_{n+1} \end{bmatrix};$$

T indică operația de transpunere.

Determinarea deplasărilor w_i revine la rezolvarea problemei încovoierii grinzii în planul forțelor, xOz (fig. 2*a*), ca grindă continuă rezemată pe o structură elastică caracterizată de o matrice de rigiditate $[K_z]$, corespunzătoare alegerii deplasărilor w_i ca deplasări generalizate, matrice de rigiditate care este funcție de rigiditățile k_i ale reazemelor cît și de rigiditatea la încovoiere a grinzii în planul xOy.

Pentru determinarea matricei de rigiditate $[K_z]$ a structurii elastice echivalente, se egalează energia potențială a structurii echivalente cu suma dintre energia potențială de deformație a reazemelor elastice și energia potențială corespunzătoare încovoierii grinzii în planul xOy, corespunzătoare unui sistem de deplasări generalizate w_i, $i = 0, 1, \ldots,$

$n + 1$. Se scrie:

$$\frac{1}{2}\{w\}^T [K_z]\{w\} = \frac{1}{2}\{\Delta\}^T [K]\{\Delta\} + \frac{1}{2}\{v\}^T [K_y]\{v\}, \qquad (3)$$

unde

$$[K] = \begin{bmatrix} k_0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & k_i & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & k_{n+1} \end{bmatrix};$$

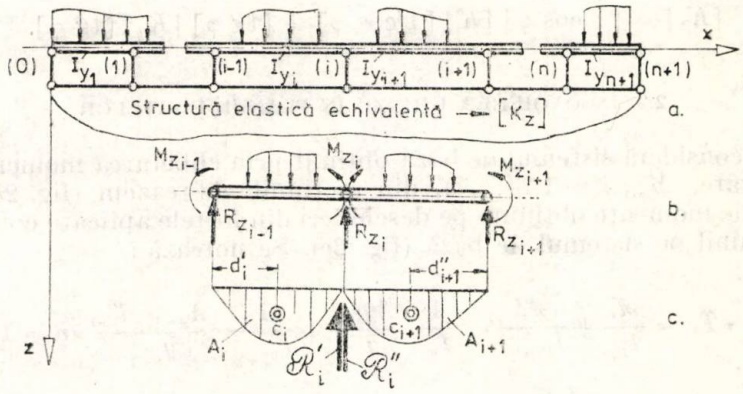


Fig. 2

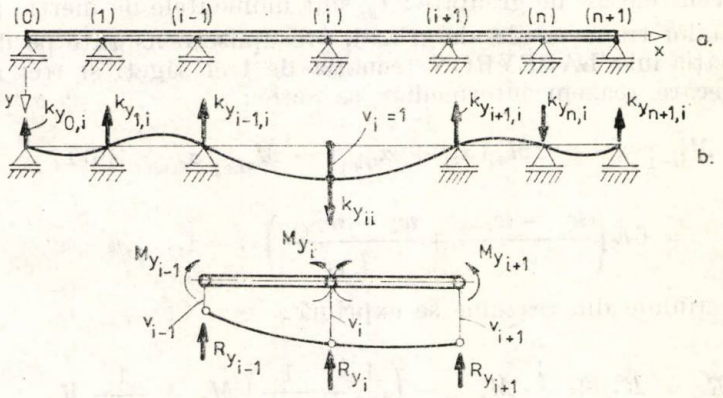


Fig. 3

în figurile 3*a*, *b* este arătat modul de obținere a unei coloane a matricei de rigiditate $[K_y]$, corespunzător semnificației fizice a elementelor matricei.

Ținînd cont de relațiile (2) și de relațiile obținute prin transpunerea acestora, adică

$$\{\Delta\}^T = \{w\}^T \ [1/\cos], \qquad \{v\}^T = \{w\}^T \ [\operatorname{tg} \varphi],$$

relația (3) se va scrie succesiv :

$$\frac{1}{2}\{w\}^T[K_z]\{w\} = \frac{1}{2}\{w\}^T[1/\cos\varphi][K][1/\cos\varphi]\{w\} +$$

$$+\frac{1}{2}\{w\}^T[\operatorname{tg}\varphi][K_y][\operatorname{tg}\varphi]\{w\} =$$

$$=\frac{1}{2}\{w\}^T([1/\cos\varphi][K][1/\cos\varphi] + [\operatorname{tg}\varphi][K_y][\operatorname{tg}\varphi])\{w\},$$

de unde

$$[K_z] = [1/\cos\varphi][K][1/\cos\varphi] + [\operatorname{tg}\varphi][K_y][\operatorname{tg}\varphi]. \tag{4}$$

2.2. ÎNCOVOIEREA GRINZII ÎN PLANUL FORȚELOR

Se consideră sistemul de bază obținut prin eliberarea momentelor de continuitate, M_{z_i}, $i = 1, \ldots, n$, din secțiunile de reazem (fig. 2*b*) și diagramele de momente obținute pe deschideri din forțele aplicate considerate ca acționînd pe sistemul de bază (fig. 2*c*). Se notează :

$$\alpha_{z_i} = \frac{l_i}{I_{y_i}},\ T_i = \frac{\mathscr{R}'_i}{I_{y_i}} + \frac{\mathscr{R}''_i}{I_{y_{i+1}}} = \frac{1}{I_{y_i}}\cdot\frac{A_i\cdot d'_i}{l_i} + \frac{1}{I_{y_{i+1}}}\cdot\frac{A_{i+1}\cdot d''_{i+1}}{l_{i+1}},\ i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

unde $\mathscr{R}'_i$, $\mathscr{R}''_i$ reprezintă componente ale „reacțiunii" obținute în secțiunea (i) pentru sistemul de bază încărcat cu diagramele de momente, C_i, C_{i+1} centrele lor de greutate ; I_{y_i} sînt momentele de inerție principale ale secțiunilor transversale ale grinzii, presupuse constante pe deschideri.

Ecuația lui CLAPEYRON (ecuația de trei săgeți și trei momente) pentru fiecare reazem intermediar se scrie :

$$M_{z_{i-1}}\cdot\alpha_{z_i} + 2M_{z_i}(\alpha_{z_i} + \alpha_{z_{i+1}}) + M_{z_{i+1}}\alpha_{z_{i+1}} + 6T_i =$$

$$= 6E\left(\frac{w_i - w_{i-1}}{l_i} + \frac{w_i - w_{i+1}}{l_{i+1}}\right), i = 1, \ldots, n \tag{6}$$

Reacțiunile din reazeme se exprimă :

$$R_{z_i} = R^0_{z_i} + \frac{1}{l_i}M_{z_{i-1}} - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)M_{z_i} + \frac{1}{l_{i+1}}M_{z_{i+1}},$$

$$i = 0, 1, \ldots, m, n+1, \tag{7}$$

unde $R^0_{z_i}$ sînt reacțiunile obținute pe sistemul de bază numai din sarcini aplicate și în care se includ și eventuale forțe concentrate acționînd chiar în secțiunile de reazem.

Se introduc matricele :

$$[L]=\begin{bmatrix} l_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -(l_1^{-1}+l_2^{-1}) & l_2^{-1} & & 0 & 0 \\ l_2^{-1} & -(l_2^{-1}+l_3^{-1}) & & 0 & 0 \\ 0 & l_3^{-1} & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & l_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & & -(l_{n-1}^{-1}+l_n^{-1}) & l_n^{-1} \\ 0 & 0 & & l_n^{-1} & -(l_n^{-1}+l_{n+1}^{-1}) \\ 0 & 0 & & 0 & l_{n+1}^{-1} \end{bmatrix}_{(n+2)\times n}, \tag{8}$$

$$[A_z]=\begin{bmatrix} 2(\alpha_{z_1}+\alpha_{z_2}) & \alpha_{z_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{z_2} & 2(\alpha_{z_2}+\alpha_{z_3}) & \alpha_{z_3} & & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{z_3} & 2(\alpha_{z_3}+\alpha_{z_4}) & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{z_4} & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \alpha_{z_{n-1}} & 2(\alpha_{z_{n-1}}+\alpha_{z_n}) & \alpha_{z_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{z_n} & 2(\alpha_{z_n}+\alpha_{z_{n+1}}) \end{bmatrix}_{n\times n}, \tag{9}$$

cu care relațiile (6) și (7) se scriu în formă matriceală :

$$[A_z]\{M_z\}+6\{T\}=-6E\,[L]^T\{w\}, \tag{10}$$

$$\{R_z\}=\{R_z^0\}+[L]\{M_z\}. \tag{11}$$

S-a notat

$$\{M_z\}=\{M_{z_1}, M_{z_2}, \ldots, M_{z_n}\}^T, \qquad \{T\}=\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}^T,$$

$$\{R_z\}=\{R_{z_0}, R_{z_1}, \ldots . R_{z_n}, R_{z_{n+1}}\}^T, \{R_z^0\}=\{R_{z_0}^0, R_{z_1}^0, \ldots, R_{z_n}^0, R_{z_{n+1}}^0\}^T.$$

Între deplasările $\{w\}$ și reacțiunile $\{R_z\}$ există relația

$$\{R_z\}=[K_z]\{w\}. \tag{12}$$

Se elimină momentele din relațiile (10), (11) și (12). Din relația (10),

$$\{M_z\} = -6[A_z]^{-1}(\{T\} + E\,[L]^T\{w\}). \tag{14}$$

Se preînmulțește relația (14) cu matricea $[L]$,

$$[L]\{M_z\} = -6\,[L]\,[A_z]^{-1}\,(\{T\} + E[L]^T\{w\}). \tag{15}$$

Din relația (11), ținînd cont și de (12),

$$[L]\{M_z\} = \{R_z\} - \{R_z^0\} = [K_z]\{w\} - \{R_z^0\}, \tag{16}$$

astfel că din (15) și (16) rezultă :

$$[K_z]\{w\} - \{R_z^0\} = -6[L]\,[A_z]^{-1}\{T\} - 6E[L]\,[A_z^{-1}]\,[L]^T\{w\}$$

sau

$$(6E[L][A_z]^{-1}[L]^T + [K_z])\{w\} = \{R_z^0\} - 6[L]\,[A_z]^{-1}\{T\}. \tag{17}$$

Se notează

$$[\widetilde{K}_z] = 6E\,[L]\,[A_z]^{-1}\,[L]^T + [K_z],$$

$$\{\widetilde{F}_z\} = \{R_z^0\} - 6[L]\,[A_z]^{-1}\{T\},$$

cu care relația (17) se scrie

$$[\widetilde{K}_z]\{w\} = \{\widetilde{F}_z\}. \tag{18}$$

Sistemul de ecuații (18) permite determinarea deplasărilor w_i, $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$. Matricea $[A_z]$ fiind simetrică, produsul $[L][A_z]^{-1}[L]^T$ are ca rezultat tot o matrice simetrică, deci și $[K_z]$ este matrice simetrică. După determinarea săgeților $\{w\}$ din (14) se pot evalua momentele.

2.3. ÎNCOVOIEREA GRINZII PERPENDICULAR PE PLANUL FORȚELOR

Încovoierea grinzii în plan perpendicular pe planul forțelor este rezultatul încărcării grinzii cu deplasările v_i, $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$, rezultate din (2).

Se notează $\alpha_{y_i} = l_i/I_{z_i}$, unde I_{z_i} sînt momente de inerție centrale principale ale secțiunilor transversale în raport cu axe paralele cu axa Oy. Ecuațiile CLAPEYRON pentru fiecare reazem intermediar (i) se va scrie :

$$M_{y_{i-1}} \cdot \alpha_{y_i} + 2M_{y_i}(\alpha_{y_i} + \alpha_{y_{i+1}}) + M_{y_{i+1}} \cdot \alpha_{y_{i+1}} =$$

$$= 6E\left(\frac{v_i - v_{i-1}}{l_i} + \frac{v_i - v_{i+1}}{l_{i+1}}\right), \tag{19}$$

iar reacţiunile din secţiunile de reazem,

$$R_{y_i} = \frac{1}{l_i} M_{y_{i-1}} - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) M_{y_i} + \frac{1}{l_{i+1}} M_{y_{i+1}}, \qquad (20)$$

$$i = 0, 1, \ldots, n, n+1,$$

Introducînd matricea

$$[A_y] =$$

$$= \begin{bmatrix} 2(\alpha_{y_1} + \alpha_{y_2}) & \alpha_{y_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{y_2} & 2(\alpha_{y_2} + \alpha_{y_3}) & \alpha_{y_3} & & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{y_3} & 2(\alpha_{y_3} + \alpha_{y_4}) & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{y_4} & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \alpha_{y_{n-1}} & 2(\alpha_{y_{n-1}} + \alpha_{y_n}) & \alpha_{y_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{y_n} & 2(\alpha_{y_n} + \alpha_{y_{n+1}}) \end{bmatrix} \qquad (21)$$

cu $\alpha_{y_i} = \frac{l_i}{I_{z_i}}$, relaţiile (19) se vor scrie condensat :

$$[A_y]\{M_y\} = -6E\,[L]^T\{v\},$$

de unde

$$\{M_y\} = -6E\,[A_y]^{-1}[L]^T\{v\}; \qquad (22)$$

relaţiile (20) se scriu :

$$\{R_y\} = [L]\{M_y\}, \qquad (23)$$

astfel că din (22) şi (23) se pot evalua momentele de continuitate şi reacţiunile corespunzător încovoierii în planul xOy.

2.4. EXEMPLIFICARE

Fie grinda pe reazeme elastice din figura 4, reazemele fiind grinzile în consolă. Elasticitatea acestora la încovoiere este mult mai mare decît cea la solicitarea axială astfel că cea din urmă se poate neglija ; resorturile echivalente vor avea direcţiile de acţiune perpendiculare pe direcţiile barelor de reazeme. În figura 5 este dată schema pentru calculul încovoierii în planul xOz, iar în figura 6*a*, *b*, *c*, *d*, este redat modul de determinare a elementelor matricei $[K_y]$).

Vom avea

$$[K] = \frac{6EI}{l^3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad [K_y] = \frac{3EI}{l^3}\begin{bmatrix}1/2 & -1 & -1/2\\ -1 & 2 & -1\\ 1/2 & -1 & 1/2\end{bmatrix},$$

$$[\cos\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \quad [\operatorname{tg}\varphi] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

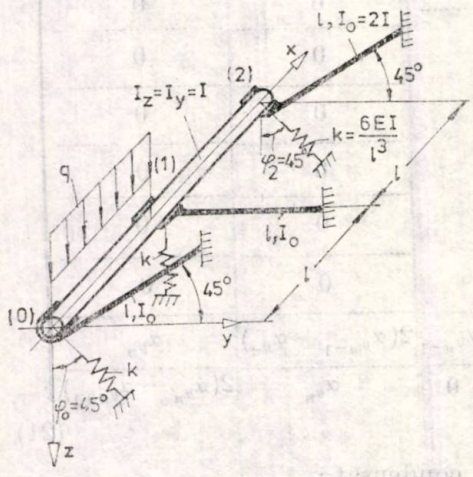


Fig. 4

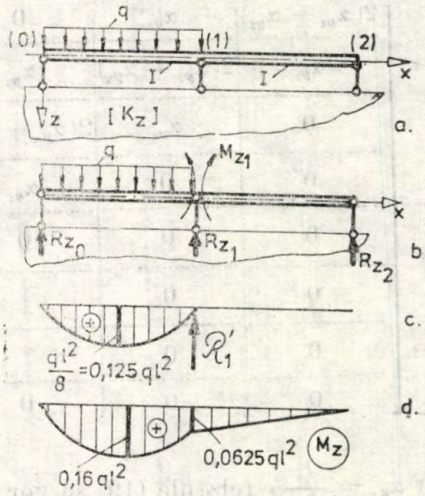


Fig. 5

Se obțin produsele

$$[1/\cos\varphi]\,[K]\,[1/\cos\varphi] = \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{bmatrix},$$

$$[\operatorname{tg}\varphi]\,[K_y]\,[\operatorname{tg}\varphi] = \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

astfel încît rezultă

$$[K_z] = \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}9 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 9\end{bmatrix}.$$

Pe baza datelor din figurile 4, 5, 6, vom mai avea :

$$[L] = \frac{1}{l}\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}, \quad [L]^T = \frac{1}{l}[1 \;\; -2 \;\; 1],$$

$$\{R_z^0\} = \frac{ql}{2}[1\ 1\ 0]^T;\ \{T\} = \{T_1\} = \left\{\frac{ql^3}{24I}\right\},$$

$$[A_z] = [A_y] = \left[4\frac{l}{I}\right],\ [A_z]^{-1} = [A_y]^{-1} = \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{I}{l}\right].$$

Se evaluează produsele $[L]\,[A_z]^{-1}\,[L]^T$ și $[L]\,[A_z]^{-1}\,\{T\}$:

$$[L]\,[A_z]^{-1}\,[L]^T = \frac{1}{l}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\frac{1}{4}\cdot\frac{I}{l}\cdot\frac{1}{l}\times$$

$$\times[1\ -2\ 1] = \frac{I}{4l^3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\-2 & 4 & -2\\1 & -2 & 1\end{bmatrix},$$

$$[L]\,[A_z]^{-1}\{T\} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\frac{1}{4}\frac{I}{l}\cdot\frac{ql^3}{24I} =$$

$$= \frac{ql}{96}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix},$$

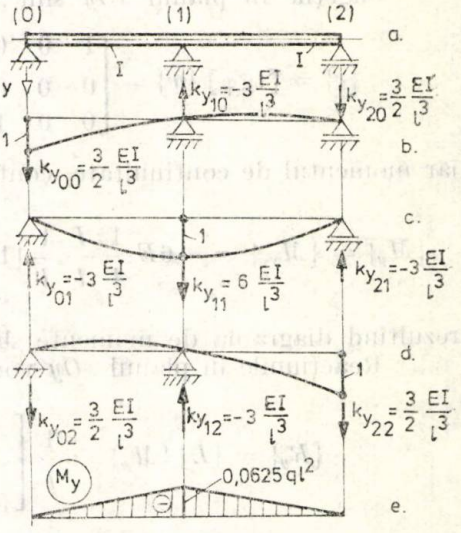


Fig. 6

cu care rezultă

$$[\widetilde{K}_z] = \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}10 & -2 & 2\\-2 & 8 & -2\\2 & -2 & 10\end{bmatrix},\quad \{\widetilde{F}_z\} = \frac{ql}{16}\begin{Bmatrix}7\\10\\-1\end{Bmatrix}.$$

Sistemul de ecuații (18) se va scrie

$$\begin{bmatrix}10 & -2 & 2\\-2 & 8 & -2\\2 & -2 & 10\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_0\\w_1\\w_2\end{Bmatrix} = \frac{ql^4}{24EI}\begin{Bmatrix}7\\10\\-1\end{Bmatrix},$$

cu soluțiile

$$\{w\} = \frac{ql^4}{24\,EI}[1\ 1{,}5\ 0]^T.$$

Reacțiunile în planul xOz vor fi :

$$\{R_z\} = [K_z]\,\{w\} = \frac{3}{2}\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}9 & 0 & 1\\0 & 4 & 0\\1 & 0 & 9\end{bmatrix}\frac{ql^4}{24EI}\begin{Bmatrix}1\\1{,}5\\0\end{Bmatrix} = \frac{ql}{16}\begin{Bmatrix}9\\6\\1\end{Bmatrix},$$

iar momentul de continuitate, conform cu (14),

$$\{M_z\} = \{M_{z_1}\} = -6\,\frac{1}{4}\,\frac{I}{l}\left(\frac{ql^3}{24\,I} + E\frac{1}{l}\,[1\ -2\ 1]\,\frac{ql^4}{24\,EI}\begin{Bmatrix}1\\1{,}5\\0\end{Bmatrix}\right) = \begin{Bmatrix}\frac{ql^2}{16}\end{Bmatrix}.$$

Rezultă diagrama de momente Mz din figura 5*d*.

Săgeţile în planul xOy sînt :

$$\{v\} = [\operatorname{tg}\varphi]\,\{w\} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\frac{ql^4}{24\,EI}\begin{Bmatrix}1\\1{,}5\\0\end{Bmatrix} = \frac{ql^4}{24\,EI}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix},$$

iar momentul de continuitate, conform cu (27),

$$\{M_y\} = \{M_{y_1}\} = -6E\,\frac{1}{4}\,\frac{I}{l}\,\frac{1}{l}\,[1\ -2\ 1]\,\frac{ql^4}{24\,EI}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-\frac{ql^2}{16}\end{Bmatrix},$$

rezultînd diagrama de momente M_y din figura 6*e*.

Reacţiunile în planul xOy vor fi :

$$\{R_y\} = [L]\,\{M_y\} = \frac{1}{l}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\left(-\frac{ql^2}{16}\right) = -\frac{ql}{16}\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix}.$$

3. ABORDAREA PROBLEMEI ÎN CADRUL METODEI ELEMENTELOR FINITE

3.1. ECUAŢIILE METODEI

Grinda se consideră divizată în elemente finite, grupate în superelemente. Un superelement (fig. 7) este cuprins între două secţiuni succesive de rezemare.

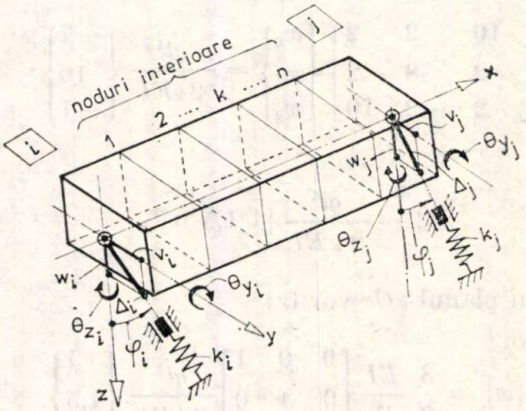


Fig. 7

Se notează $\{\delta_k\} = \{v_k,\ w_k,\ \theta_{z_k},\ \theta_{y_k}\}^T$ vectorul deplasărilor generalizate într-o secțiune nodală. Admițînd ca funcții de interpolare pentru deplasările v și w în cadrul unui element finit polinoame de gradul trei, definite cu ajutorul funcțiilor l'Hérmite de ordinul unu, matricea de rigiditate a elementului finit va fi

$$[k] = \begin{bmatrix}
12\frac{EI_z}{a^3} & 0 & 6\frac{EI_z}{a^2} & 0 & -12\frac{EI_z}{a^3} & 0 & 6\frac{EI_z}{a^2} & 0 \\
0 & 12\frac{EI_y}{a^3} & 0 & 6\frac{EI_y}{a^2} & 0 & -12\frac{EI_y}{a^3} & 0 & 6\frac{EI_y}{a^2} \\
6\frac{EI_z}{a^2} & 0 & 4\frac{EI_z}{a} & 0 & -6\frac{EI_z}{a^2} & 0 & 2\frac{EI_z}{a} & 0 \\
0 & 6\frac{EI_y}{a^2} & 0 & 4\frac{EI_y}{a} & 0 & -6\frac{EI_y}{a^2} & 0 & 2\frac{EI_y}{a} \\
-12\frac{EI_z}{a^3} & 0 & -6\frac{EI_z}{a^2} & 0 & 12\frac{EI_z}{a^3} & 0 & -6\frac{EI_z}{a^2} & 0 \\
0 & -12\frac{EI_y}{a^3} & 0 & -6\frac{EI_y}{a^2} & 0 & 12\frac{EI_y}{a^3} & 0 & -6\frac{EI_y}{a^2} \\
6\frac{EI_z}{a^2} & 0 & 2\frac{EI_z}{a} & 0 & -6\frac{EI_z}{a^2} & 0 & 4\frac{EI_z}{a} & 0 \\
0 & 6\frac{EI_y}{a^2} & 0 & 2\frac{EI_y}{a} & 0 & -6\frac{EI_y}{a^2} & 0 & 4\frac{EI_y}{a}
\end{bmatrix}, \tag{24}$$

unde a este lungimea elementului finit. Relația forțe generalizate deplasări generalizate pentru un element finit m se va scrie

$$[k]_m \{\delta\}_m = \{F\}_m, \tag{25}$$

unde $[k]_m$ este matricea de rigiditate a elementului conform cu (24), $\{\delta\}_m$ vectorul deplasărilor generalizate aferente celor două secțiuni nodale ale elementului, $\{F\}_m$ vectorul forțelor reduse la nodurile elementului.

Asamblînd relațiile (25) pentru toate elementele finite ale unui superelement, se obține relația

$$[K]\{\delta\} = \{F\}, \tag{26}$$

care se partiționează în sensul punerii în evidență a deplasărilor din secțiunile externe, $\{\delta_e\} = [\{\delta\}_i^T,\ \{\delta\}_j^T]^T$, și a celor din secțiunile interioare, $\{\delta_i\} = [\{\delta\}_1^T,\ \ldots,\ \{\delta\}_k^T]^T$,

$$\left[\begin{array}{c|c} [K_{ii}] & [K_{ie}] \\ \hline [K_{ei}] & [K_{ee}] \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \{\delta_i\} \\ \hline \{\delta_e\} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \{F_i\} \\ \hline \{F_e\} \end{array}\right\}. \tag{27}$$

În vederea condensării statice în secțiunile extreme ale superelementului se descompune relația (27):

$$[K_{ii}]\{\delta_i\} + [K_{ie}]\{\delta_e\} = \{F_i\}, \tag{28}$$

$$[K_{ei}]\{\delta_i\} + [K_{ee}]\{\delta_e\} = \{F_e\}. \tag{29}$$

Se elimină deplasările interioare. Din relația (28) se exprimă $\{\delta_i\}$,

$$\{\delta_i\} = [K_{ii}]^{-1}\{F_i\} - [K_{ii}]^{-1}[K_{ie}]\{\delta_e\},$$

care se introduce în relația (29) obținîndu-se

$$[K_c]\{\delta_e\} = \{F_c\}, \tag{30}$$

unde $[K_c]$ este matricea de rigiditate obținută în urma condensării statice, $\{F_c\}$ vectorul corespunzător al forțelor generalizate:

$$[K_c] = [K_{ee}] - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}[K_{ie}], \tag{31}$$

$$\{F_c\} = \{F_e\} - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}\{F_i\}. \tag{32}$$

Se notează

$$\{\Delta\} = [\{\delta_e\}_1^T, \ldots, \{\delta_e\}_l^T, \ldots, \{\delta_e\}_N^T]^T$$

vectorul deplasărilor generalizate din toate secțiunile delimitînd superelementele, cu $\{\delta_e\}_l = \{v_l, w_l, \theta_{z_l}, \theta_{y_l}\}^T$, $l = \boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{N}$. Asamblînd relațiile (30) pentru întreaga grindă se obține

$$[S]\{\Delta\} = \{F_s\}, \tag{33}$$

unde $[S]$ este matricea de rigiditate a întregii structuri (grinzi) în care nu se ține cont de rezemările elastice.

Restricțiile impuse deplasărilor în secțiunile de rezemare fac ca din cele patru deplasări dintr-o secțiune l să rămînă independente numai trei. Se notează $\{\tilde{\delta}_e\}_l = \{\Delta_l, \theta_{z_l}, \theta_{y_l}\}^T$ vectorul deplasărilor rămase independente într-o secțiune de rezemare l.

În baza relațiilor (1) se poate scrie

$$\{\tilde{\delta}_e\}_l = [\varphi_l]\{\delta_e\}_l, \tag{34}$$

unde

$$[\varphi_l] = \left[\begin{array}{c|c|c} \sin\varphi_l & 0 & 0 \\ \hline \cos\varphi_l & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{35}$$

Notînd $\{\tilde{\Delta}\} = [\{\tilde{\delta}_e\}_1^T, \ldots, \{\delta_e\}_l^T, \ldots \{\delta_e\}_N^T]^T$ și construind matricea

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} [\varphi_1] & & & \\ & [\varphi_2] & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & [\varphi_l] \\ & & & & \ddots \\ & & & & & [\varphi_N] \end{bmatrix},$$

se poate scrie

$$\{\tilde{\Delta}\} = [\Phi]\{\Delta\}.$$

Se construiește matricea constantelor elastice ale reazemelor,

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} k_1 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & 0 & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & k_l & & \\ & & & & & 0 & \\ & & 0 & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & k_n \\ & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \tag{37}$$

Potențialul total al grinzii pe reazeme elastice se va scrie succesiv :

$$\Pi = \frac{1}{2}\{\Delta\}^T [S][\Delta] + \frac{1}{2}\{\tilde{\Delta}\}^T [\tilde{K}]\{\tilde{\Delta}\} - \{\Delta\}^T\{F_s\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{\tilde{\Delta}\}^T [\Phi]^T [S][\Phi]\{\tilde{\Delta}\} + \frac{1}{2}\{\tilde{\Delta}\}^T [\tilde{K}]\{\tilde{\Delta}\} - \{\tilde{\Delta}\}^T [\Phi]^T \{F_s\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{\tilde{\Delta}\}^T ([\Phi]^T \{S\}[\Phi] + [\tilde{K}]) - \{\tilde{\Delta}\}^T [\Phi]^T \{F_s\}$$

sau

$$\Pi = \frac{1}{2}\{\tilde{\Delta}\}^T [\tilde{S}]\{\tilde{\Delta}\} - \{\tilde{\Delta}\}^T \{\tilde{F}_s\} \tag{38}$$

cu

$$[\tilde{S}] = [\Phi]^T [S][\Phi] + [\tilde{K}], \{\tilde{F}_s\} = [\Phi]^T \{F_s\}, \tag{39}$$

unde $[\tilde{S}]$ este matricea de rigiditate a întregii structuri pe reazeme elastice, iar $\{F_s\}$ vectorul corespunzător al forțelor generalizate.

Condiția de extremum a potențialului total este

$$\frac{\partial \Pi}{\partial\{\tilde{\delta}\}} = [\tilde{S}]\{\tilde{\Delta}\} - \{\tilde{F}_s\} = \{0\},$$

încît relația forțe generalizate — deplasări generalizate va fi

$$[\tilde{S}]\,\{\tilde{\Delta}\} = \{\tilde{F}_s\}, \tag{40}$$

3.2. EXEMPLIFICARE

Fie grinda din figura 8 rezemată rigid la capete, avînd și un reazem elastic. Momentele de inerție ale secțiunilor transversale, $I_z = I_y = I$. Forța $2F$, acționînd chiar în secțiunea reazemului elastic, se consideră

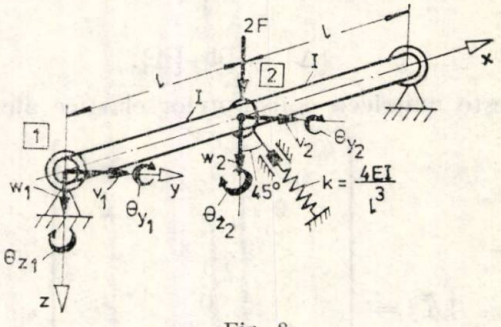


Fig. 8

grinda divizată în două elemente finite reprezentînd și superelementele. Simetria permite să se lucreze cu un singur element finit, $\boxed{1} - \boxed{2}$. Matricea de rigiditate a elementului finit (superelementului) va fi :

$$[k] = [K] = [S] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 & 6l & 0 & -12 & 0 & 6l & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 6l & 0 & -12 & 0 & 6l \\ 6l & 0 & 4l^2 & 0 & -6l & 0 & 2l^2 & 0 \\ 0 & 6l & 0 & 4l^2 & 0 & -6l & 0 & 2l^2 \\ -12 & 0 & -6l & 0 & 12 & 0 & -6l & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -6l & 0 & 12 & 0 & -6l \\ 6l & 0 & 2l^2 & 0 & -6l & 0 & 4l^2 & 0 \\ 0 & 6l & 0 & 2l^2 & 0 & -6l & 0 & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

În secțiunea $\boxed{2}$, conform figurii 8, vom avea $\varphi_2 = 45°$, iar în secțiunea $\boxed{1}$ se poate considera $\varphi_1 = 0$ astfel că matricea $[\Phi]$ va fi

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Introducînd restricțiile din secțiunile extreme ale superelementului și ținînd cont de elasticitatea razemului, se obține

$$[\widetilde{S}] = [\Phi]^T [S] [\Phi] + [\widetilde{K}] =$$

$$= \frac{EI}{l^3} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 12 & 0 & 6l & -12\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 6l \\ \hline 0 & 4l^2 & 0 & -6\frac{\sqrt{2}}{2}l & 2l^2 & 0 \\ \hline 6l & 0 & 4l^2 & -6\frac{\sqrt{2}}{2}l & 0 & 2l^2 \\ \hline -12\frac{\sqrt{2}}{2} & -6\frac{\sqrt{2}}{2}l & -6\frac{\sqrt{2}}{2}l & 14 & -6\frac{\sqrt{2}}{2}l & -6\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline 0 & 2l^2 & 0 & -6\frac{\sqrt{2}}{2}l & 4l^2 & 0 \\ \hline 6l & 0 & 2l^2 & -6\frac{\sqrt{2}}{2}l & 0 & 4l^2 \end{array}\right],$$

iar pentru forțele generalizate, ținînd cont că $\{F_s\} = [0, 0, 0, F, 0, 0]$ se obține $\{\widetilde{F}\} = [\Phi]^T \{F_s\} = [0, 0, 0, F\sqrt{2}/2, 0, 0]^T$.

Ținînd cont de deplasările împiedicate de legăturile rigide, adică $\Delta_1 = 0$, $\theta_{y_2} = \theta_{z_2} = 0$, se obține sistemul de ecuații în deplasări,

$$\frac{EI}{l^3} \left[\begin{array}{c|c|c} 4l^2 & 0 & -6\frac{\sqrt{2}}{2}l \\ \hline 0 & 4l^2 & -6\frac{\sqrt{2}}{4}l \\ \hline -6\frac{\sqrt{2}}{2}l & -6\frac{\sqrt{2}}{2}l & 14 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \theta_{z_1} \\ \theta_{y_1} \\ \Delta_2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ F\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\},$$

cu soluțiile

$$\theta_{z_1} = \theta_{y_1} = \frac{3}{20} \cdot \frac{Fl^2}{EI}, \Delta_2 = \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \frac{Fl^3}{EI}.$$

Primită la redacție la 18 martie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. N. BESCHEA, *Rezistența materialelor*, capitole speciale, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
2. I. DEUTSCH, *Rezistența materialelor*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
3. C. S. DESAI, J. F. ABEL, *Introduction to the finite element method*, Van Nostrand, 1972.
4. J. S. PRSEMIENICKI, *Theory of matrix structural analysis*, Mc Graw-Hill, 1968.
5. P. C. WANG, *Metode numerice și matriceale în mecanica construcțiilor cu aplicații la calculatoare*, Edit. tehnică, București, 1970.

UNELE ASPECTE PRIVIND DINAMICA CIURURILOR CU MIȘCARE DE RULIU

de GHEORGHE I. ENE și RADU I. IATAN

Institutul Politehnic, București

Lucrarea prezintă modul de stabilire a traiectoriei centrului sitei unui ciur cu mișcare de ruliu, de concepție originală, și, de asemenea, expresiile vitezelor unghiulare critice de rezonanță.
Compararea rezultatelor teoretice cu valorile experimentale ale razei traiectoriei centrului sitei arată o bună concordanță.

Multe din procesele tehnologice industriale impun dimensiuni limitate pentru materialul poligranular folosit, din punct de vedere granulometric, în așa fel încît eficiența operațiilor respective să fie maximă. Utilajele necesare pentru realizarea unor aspecte granulometrice dorite sînt ciururile, dintre care în ultima vreme s-au impus tot mai mult, datorită avantajelor oferite [1], cele cu mișcare de ruliu. Aceste mașini prezintă avantaje evidente față de celelalte tipuri constructive de ciururi : construcție simplă (cheltuieli reduse de fabricare) ; exploatare și întreținere lesnicioase (și în mod corespunzător cheltuieli reduse) ; construcție compactă (ocuparea unui spațiu redus de producție) ; suprafață mare de cernere, putîndu-se utiliza una sau mai multe site suprapuse ; putere specifică redusă (consum energetic minim) ; posibilități multiple de reglare a caracteristicilor regimului vibrator ; zgomot redus.

Ciururile cu mișcare de ruliu se pot adapta foarte ușor unor utilizări speciale, printr-o construcție adecvată (ciururi pentru materiale abrazive, cu carcasă cauciucată la interior ; ciururi pentru materiale umede, cu încălzirea electrică a sitei ; ciururi pentru materiale explozive, lucrînd sub atmosferă de gaz inert ; ciururi pentru materiale toxice sau pentru materiale care produc degajări intense de praf, în construcție etanșă).

În cele ce urmează se prezintă unele elemente privind dinamica unui ciur cu mișcare de ruliu (fig. 1) de concepție originală [2], care are ca avantaje principale :

— o mai mare flexibilitate în ceea ce privește modificarea parametrilor regimului vibrator (amplitudinea oscilațiilor poate fi modificată independent de frecvență : prin schimbarea maselor neechilibrate excitatoare sau prin reglarea excentricităților lor : prin deplasarea acestora în lungul arborelui, precum și prin decalarea lor, una față de cealaltă, cu un anumit unghi ; frecvența de antrenare poate fi modificată prin schimbarea turației arborelui, utilizînd fie un motor electric de curent continuu, fie un motor asincron alimentat la frecvență variabilă a tensiunii, fie un motor hidraulic) ;

— adaptabilitatea lesnicioasă la condiții speciale de cernere a materialelor poligranulare dificile ;

— fiabilitate ridicată, prin utilizarea unui motor de construcție uzuală, fixat rigid pe carcasa ciurului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 3, 1986, P. 294—303

ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII

Studiul mișcării arborelui condus al mașinii se realizează folosind un triedru fix de referință $Oxyz$ (fig. 2) și unul mobil $OABC$, solidar cu subansamblul mobil [1, 3—5]. Poziția OC a arborelui condus este deter-

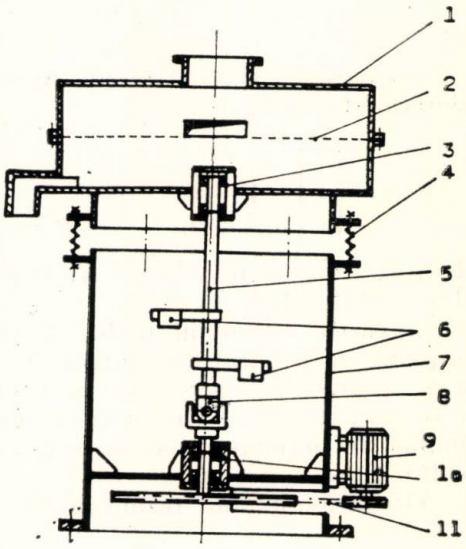


Fig. 1. — Ciur cu mișcare de ruliu: *1* — carcasa sitei; *2* — sita; *3* — casetă superioară cu rulmenți; *4* — arcuri de reazem; *5* — arbore condus; *6* — mase excentrice; 7— suport; *8* — cuplaj cardanic; 9 — motor electric; 10 — casetă inferioară cu rulmenți; *11* — transmisie cu curele trapezoidale.

minată de unghiul γ, dintre axă și proiecție OC' a ei în planul Oxz, și de unghiul β, făcut de această proiecție și axa Oz.

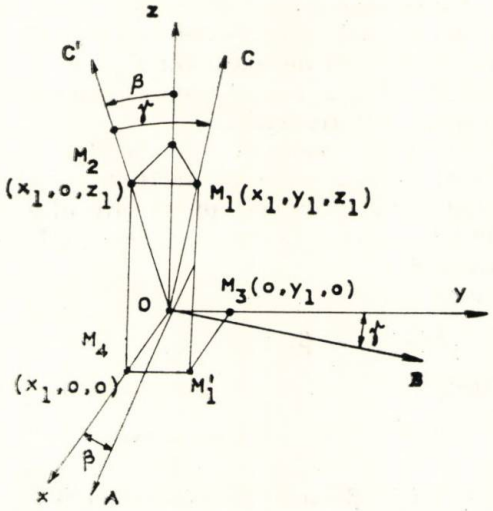


Fig. 2. — Triedrele de referință utilizate pentru studiul dinamicii ciurului.

Considerînd o poziție instantanee a arborelui și un punct M_1 (x_1, y_1, z_1) de pe axa acestuia, se constată coplanaritatea punctelor O, M_1, M_2, M_3 (fig. 2) și, deci, și semidreptele OC, OC' și Oy se găsesc în același

plan. Celelalte două axe de coordonate OA și OB, ale triedrului mobil, se aleg în planul xOz, respectiv în planul determinat de OC, OC', Oy astfel încît

$$\sphericalangle C'Oz = \sphericalangle AOx = \beta\,,$$

$$\sphericalangle COC' = \sphericalangle BOy = \gamma.$$

Cosinusurile directoare ale axelor triedrului $OABC$ față de $Oxyz$ se determină din egalitatea

$$\begin{Bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\beta & -\cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{i} \\ \bar{j} \\ \bar{k} \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

unde $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ reprezintă versorii triedrului fix $Oxyz$, iar $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ versorii triedrului moibl $OABC$.

Mișcarea sistemului mobil al utilajului în jurul axei Oz poate fi exprimată cu ajutorul unghiurilor β și γ, descompunînd-o în două oscilații de-a lungul axelor Ox și Oy. În afara acestor două rotații, arborele rotește și în jurul axei OC cu viteza unghiulară ω, corespunzătoare mecanismului de acționare, considerată constantă* în timpul funcționării ciurului.

Viteza unghiulară rezultantă va fi

$$\bar{\omega}_R = \left(-\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\,,\ \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\cos\gamma, \left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\sin\gamma + \omega\right)\right) \cdot \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c},\}^T, \tag{2}$$

unde $\{\ldots\}^T$ reprezintă transpusa matricei versorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Avînd în vedere reprezentarea schematică din figura 3, se observă că asupra sistemului oscilant acționează următoarele forțe: P — greutatea sistemului mobil, aplicată în centrul de masă G; F_{i1}, F_{i2} — forțele de inerție ale maselor neechilibrate; F_{eH} F_{eV} — forțele elastice din sistemul de rezemare; R_0 — reacțiunea din reazemul O,

Pentru studiul mișcării se aplică teorema momentului cinetic în raport cu punctul O, calculîndu-se mai întîi momentele forțelor care acționează asupra sistemului mobil, față de acest punct. Rezultă în felul acesta (se ține seamă că $\sin\beta \approx \beta$; $\cos\beta \approx 1$; $\sin\gamma \approx \gamma$; $\cos\gamma \approx 1$, întrucît unghiurile β și γ au valori reduse);

— *momentul forței de greutate*

$$\bar{M}_P = lP(-\gamma\bar{i} + \beta j); \tag{3}$$

— *momentul forțelor de inerție*

$$\bar{M}_{F_i} = [(-l_1 + l_2)\, me\omega^2 \sin\omega t)\bar{i} + [(l_1 - l_2)\ me\omega^2\cos\omega t)\bar{j} +$$

$$+ [l_1(\beta\sin\omega t - \gamma\cos\omega t) + l_2(-\beta\sin\omega t + \gamma\cos\omega t)]\cdot me\omega^2\bar{k}; \tag{4}$$

* Viteza ungbiulară ω a arborelui ciurului variază, datorită existenței cuplajului cardanic, între valorile $\omega_{min} = \omega\cos\gamma$ și $\omega_{max} = \omega/\cos\gamma$; deoarece ungbiul γ este mic ($\gamma \approx 4 - 6°$), viteza ungbiulară se poate considera constantă în timpul unei rotații complete.

— *momentele forțelor elastice* (se consideră că arcurile au aceleași caracteristici geometrice și de material);

— *momentul forțelor elastice orizontale*

$$\bar{M}_{H_i} = k_H \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ R\cos\alpha_i + L\beta & R\sin\alpha_i + L\gamma & L \\ R\cos\alpha_i & R\sin\alpha_i & L \end{vmatrix}, \tag{5}$$

unde α_i reprezintă unghiul (măsurat în planul xOy) curent, caracteristic arcului cu numărul de ordine i ($i = 1, \ldots, n$) — (fig. 4); se consideră că planul xOz trece prin arcul numărul 1;

— *momentul forțelor elcastice verticale*

$$\bar{M}_{V_i} = k_V \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ R\cos\alpha_i + L\beta & R\sin\alpha_i + L\gamma & -\beta R\cos\alpha_i - \gamma R\sin\alpha_i + L \\ 0 & 0 & \beta R\cos\alpha_i + \gamma R\sin\alpha_i \end{vmatrix}. \tag{6}$$

În egalitățile (4) și (5) s-au mai notat: R — raza circumferinței pe care sînt instalate arcurile sistemului elastic de rezemare (considerate în poziție verticală): k_H, k_V — constantele elastice ale arcurilor, în plan

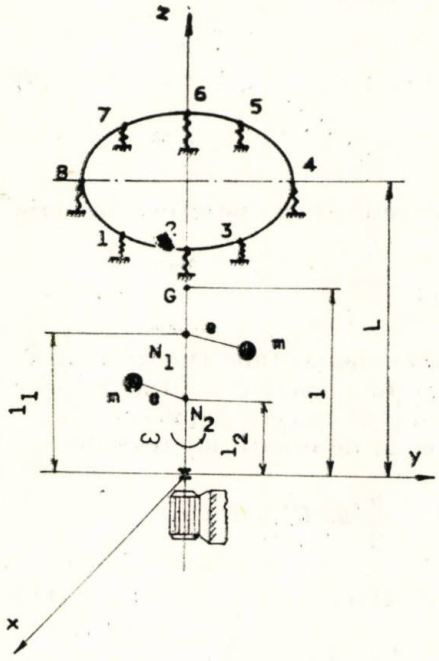


Fig. 3. — Ciur cu ruliu (schemă).

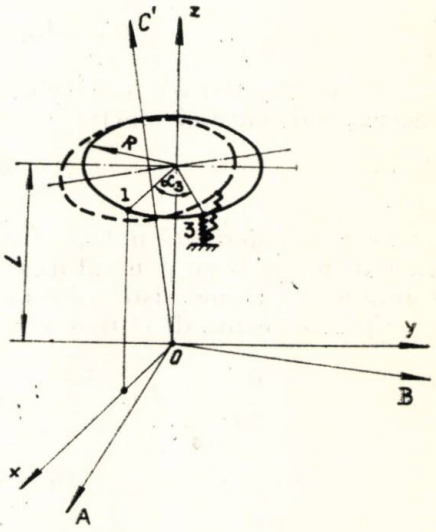


Fig. 4. — La calculul momentelor forțelor elastice.

orizontal și în plan vertical (stabilite în starea strînsă a arcurilor — poziție de funcționare).

Neglijînd termenii mici de grad mai mare decît unu, rezultă în final valorile totale ale momentelor forțelor elastice în plan orizontal M_H și în

plan vertical M_V, care pot fi calculate cu formulele

$$\bar{M}_H = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{H_i} = n\, k_H\, L^2(\gamma\, \bar{i} - \beta\, \bar{j}),$$

$$\bar{M}_V = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{V_i} = \frac{n}{2} k_V\ R^2\ (\gamma\, \bar{i} - \beta\, \bar{j}). \tag{7}$$

Notînd cu J_1 momentul de inerție al sistemului mobil în raport cu axa OC a sistemului mobil și cu J_2 momentul de inerție în raport cu axele OA și OB (secțiunile fiind circulare, momentele de inerție în raport cu cele două axe sînt egale) și ținînd seama că axele triedrului $OABC$ sînt axe principale de inerție, momentul cinetic în raport cu punctul fix O va fi

$$\bar{K} = \{K_x\,, K_y\,, K_z\}\cdot\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}^T, \tag{8}$$

unde, avînd în vedere și aproximările menționate în cele ce preced,

$$K_x = -J_2 \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + J_1\omega\beta\,;$$

$$K_y = J_2 \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} + J_1\omega\gamma\,; \tag{9}$$

$$K_z = J_1\omega.$$

Pentru stabilirea ecuațiilor care caracterizează mișcarea se scrie teorema momentului cinetic

$$\dot{\bar{K}} = \bar{M}_t\,, \tag{10}$$

în care $\dot{\bar{K}}$ este derivata în raport cu timpul t a momentului cinetic total $\bar{K}$, calculat în raport cu punctul fix O, iar $\bar{M}_t$ este momentul total al forțelor ce acționează asupra sistemului mobil, în raport cu același punct.

Ținînd seama de (10) se obține sistemul de ecuații diferențiale

$$-J_2 \frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}t^2} + J_1\omega \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - \left(nk_H\ L^2 + \frac{n}{2} k_V\, R^2 - lP\right)\gamma =$$

$$= (l_1 - l_2)\ me\omega^2 \sin\omega t, \tag{11}$$

$$J_2 \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}t^2} + J_1\omega \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \left(nk_H\ L^2 + \frac{n}{2} k_V\, R^2 - lP\right)\beta = -$$

$$- (l_1 - l_2)\ me\omega^2 \cos\omega t.$$

Proiecția pe axa Oz neprezentînd interes pentru problema de față nu a mai fost scrisă.

Între coordonatele unghiulare β, γ și cele carteziene x, y, z se pot scrie, pentru centrul sitei, ținînd seama de aproximările amintite,

$$x_s = L_s \sin\beta\cos\gamma \approx L_s\,\beta,$$

$$y_s = L_s \sin\gamma \approx L_s\,\gamma, \tag{12}$$

$$z_s = L_s \cos\gamma \approx L_s,$$

sau

$$\beta \approx x_s/L_s; \quad \gamma \approx y_s/L_s \tag{13}$$

Avînd în vedere relațiile (13), ecuațiile diferențiale (11) iau forma

$$J_2 \frac{\mathrm{d}^2 y_s}{\mathrm{d}t^2} - J_1\omega \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} + \left(nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_V R^2 - lP\right) y_s = \\ = -L_s(l_1 - l_2)\, me\omega^2 \sin\omega t,$$

$$J_2 \frac{\mathrm{d}^2 x_s}{\mathrm{d}t^2} + J_1\omega \frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}t} + \left(nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_V R^2 - lP\right) x_s = \\ = -L_s(l_1 - l_2)\, me\omega^2 \cos\omega t. \tag{14}$$

Considerînd soluțiile particulare ale regimului staționar sub forma

$$x_s = A \sin\omega t + B\cos\omega t,$$

$$y_s = C \sin\omega t + D\cos\omega t,$$

se obține, după introducerea lor în sistemul (14),

$$x_s = \frac{L_s(l_1 - l_2)\, me\omega^2}{(J_2 - J_1)\omega^2 - \left(nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_V R^2 - lP\right)} \cos\omega t,$$

$$y_s = \frac{L_s(l_1 - l_2)\, me\omega^2}{(J_2 - J_1)\omega^2 - \left(nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_V R^2 - lP\right)} \sin\omega t. \tag{15}$$

Se constată ușor că centrul sitei se mișcă după un cerc de ecuație

$$x_s^2 + y_s^2 = r_s^2,$$

unde

$$r_s = \left| \frac{L_s(l_1 - l_2)\, me\omega^2}{(J_2 - J_1)\omega^2 - \left(nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_V R^2 - lP\right)} \right|. \tag{16}$$

Axa de simetrie a arborelui condus al ciurului are o mişcare de precesie regulată directă pe un con cu vîrful în punctul fix O, avînd semiunghiul la vîrf

$$\gamma \approx \frac{r_s}{L_s} = \left| \frac{(l_1 - l_2)\, me\omega^2}{(J_2 - J_1)\,\omega^2 - \left(nk_H\, L^2 + \frac{n}{2}\, k_V R^2 - lP\right)} \right| . \tag{17}$$

Dacă $J_2\omega^2 + lP > J_1\omega^2 + nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_V R^2$, atunci mişcarea de precesie este în fază cu forţa perturbatoare dată de acţiunea maselor neechilibrate ; în caz contrar mişcarea este în opoziţie de fază cu această forţă.

Vitezele unghiulare de rezonanţă se determină din econdiţia

$$\begin{vmatrix} J_1\,\omega^2 & -J_2\omega^2 + nk_H\, L^2 + \frac{n}{2} k_V R^2 - lP \\ -J_2\omega^2 + nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_V\, R^2 - lP & J_1\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

rezultînd

$$\omega^2_{cr\,1} = \frac{nk_H\, L^2 + \frac{n}{2}\, k_V\, R^2 - lP}{J_2 - J_1}\,,$$

$$\omega^2_{cr\,2} = \frac{nk_H\, L^2 + \frac{n}{2}\, k_V\, R^2 - lP}{J_2 + J_1}\,. \tag{18}$$

Pot exista următoarele cazuri :

a) $J_1 > J_2$ şi $n\, k_H\, L^2 + \frac{n}{2}\, k_V\, R^2 - lP < 0$. În acest caz egalitatea (18_2) conduce la soluţii pur imaginare, din egalitatea (18_1) rezultînd viteza unghiulară critică

$$\omega_{cr} = \left(\frac{nk_H L^2 + \frac{n}{2}\, k_V\, R^2 - lP}{J_2 - J_1} \right)^{0,5} . \tag{19}$$

Pentru această valoare rezultă pentru x_s şi y_s (relaţiile (15)) valori infinite pentru amplitudinile oscilaţiilor, deci relaţia (19) determină viteza unghiulară critică de rezonanţă propriu-zisă (fig. 5).

b) $J_1 > J_2$ şi $nk_H\, L^2 + \frac{n}{2}\, k_V\, R^2 - lP > 0$. Viteza unghiulară critică este dată în acest caz de (18_2) şi are expresia

$$\omega_{cr,a} = \left(\frac{nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_v\, R^2 - lP}{J_2 + J_1} \right)^{0,5} . \tag{20}$$

Pentru această valoare a vitezei unghiulare se obțin valori finite pentru amplitudinile oscilațiilor, caz în care avem rezonanță aparentă (fig. 6).

c) $J_1 < J_2$ și $nk_H L^2 + \frac{n}{2} k_V R^2 - lP > 0$. Prima egalitate a rezonanței (18_1) conduce la obținerea expresiei vitezei unghiulare critice a

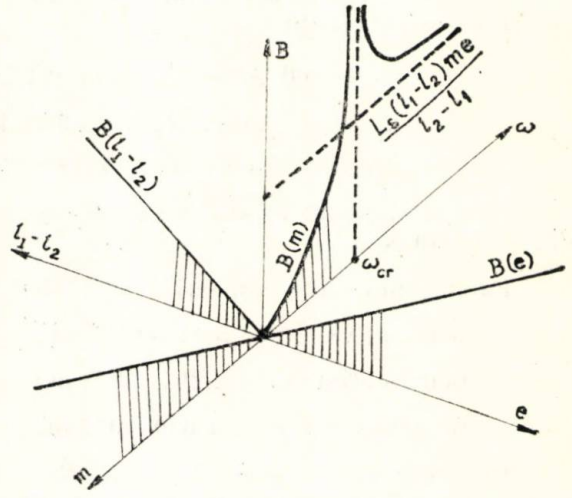


Fig. 5. — Variația (calitativă) a amplitudinii oscilațiilor centrului sitei în funcție de mărimile m, e, ω și $(l_1 - l_2)$ în cazul rezonanței propriu-zise.

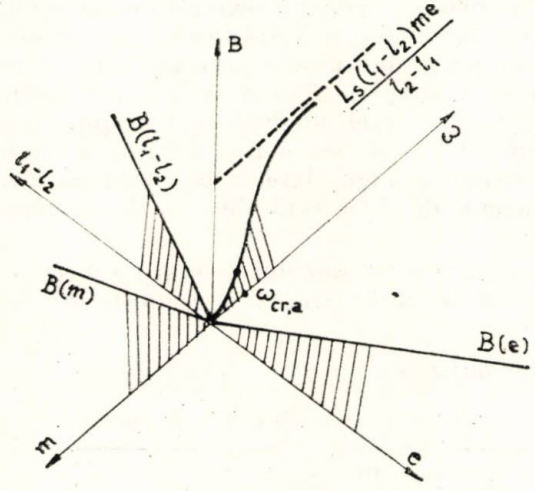


Fig. 6. — Variația (calitativă) a amplitudinii oscilațiilor centrului sitei în funcție de mărimile m, e, ω și $(l_1 - l_2)$ în cazul rezonanței aparente.

rezonanței propriu-zise, cealaltă determinînd expresia vitezei unghiulare critice caracteristică rezonanței aparente.

d) $J_1 < J_2$ și $nk_V L^2 + \frac{n}{2} k_V R^2 - lP < 0$. Ambele egalități (18) conduc la soluții pur imaginare, neexistînd pericolul apariției fenomenului de rezonanță.

EXEMPLIFICARE

Pentru fixarea ideilor se consideră un ciur cu mișcare de ruliu ale cărui caracteristici geometrice și funcționale sînt [6] : $L_s = 450$ mm ; $L = 310$ mm ; $R = 245$ mm ; $e = 90$ mm ; $n = 8$ bucăți ; $m = 4{,}35$ kg ; $P = 753$ N ; $\omega = 30{,}58\ s^{-1}$; $J_1 = 0{,}07$ kgm^2.

Pentru analiza mișcării ciurului s-au considerat trei regimuri de funcționare, caracterizate prin :

$$l_1 - l_2 = 160 \text{ mm} ; \quad J_2 = 14.011 \text{ kgm}^2 : \qquad \text{(A8)}$$

$$l_1 - l_2 = 118 \text{ mm} ; \quad J_2 = 13{,}980 \text{ kgm}^2 ; \qquad \text{(B8)}$$

$$l_1 - l_2 = 85 \text{ mm} ; \quad J_2 = 13{,}970 \text{ kgm}^2 ; \qquad \text{(C8)}$$

Pentru sistemul elastic de rezemare s-au stabilit $k_H = 15663$ N/m și $k_v = 48049$ N/m.

Făcînd înlocuirile respective în relația (16) se obțin valorile :

— pentru (A8) ; $r_s = 3{,}116 \cdot 10^{-3}$ m ;

— pentru (B8) ; $r_s = 2{,}291 \cdot 10^{-3}$ m ;

— pentru (C8) ; $r_s = 1{,}649 \cdot 10^{-3}$ m.

Deoarece $J_2 > J_1$ și $8k_H L^2 + 4k_V R^2 - lP > 0$, sistemul prezintă o viteză unghiulară critică corespunzătoare rezonanței propriu-zise și o viteză unghiulară critică corespunzătoare rezonanței aparente, avînd valorile $\omega_{cr} = 40{,}865$ s^{-1} și $\omega_{cr\,a} = 40{,}660$ s^{-1} (pentru regimul de funcționare (A8)). Pentru regimurile de funcționare (B8) și (C8) valorile acestor viteze unhiulare critice sînt foarte apropiate de valorile corespunzătoare regimului de funcționare (A8), deoarece în cazul de față $J_1 \ll J_2$. Tot datorită faptului amintit anterior și valoarea vitezei unghiulare corespunzătoare rezonanței propriu-zise este apropiată de cea caracteristică rezonanței aparente. Comparînd valorile vitezelor unghiulare se constată că viteza unghiulară de regim este suficient de depărtată de cea de rezonanță ($\omega_{cr}/\omega = 1{,}33$).

Măsurările experimentale realizate pe modelul de ciur cu mișcare de ruliu au condus la obținerea valorilor amplitudinilor prezentate în tabelul 1 [6].

Tabelul 1

Comparație între valorile calculateale razei r_s și cele obținute experimental [6]

Regim de funcționare	$r_{smăs} \times 10^3$ [m]	$r_{scalc} \times 10^3$ [m]	$\frac{r_{smăsurat}}{r_{scalculat}}$	Abaterea [%]
A8 $l_1 - l_2 = 160$ mm	2,960	3,116	0,9499	−5,00
B8 $l_1 - l_2 = 188$ mm	2,395	2,291	1,0453	+4,58
C8 $l_1 - l_2 = 85$ mm	1,690	1,649	1,0248	+2,82

CONCLUZII

În lucrare se prezintă dinamica unui ciur cu mișcare de ruliu, de concepție originală, caz în care se stabilește taiectoria centrului sitei plane, circulare. Cu aceste elemente se pot determina într-un studiu ulterior și distribuția traiectoriilor, a vitezelor și a accelerațiilor altor puncte ale sitei și ale cadrului acesteia, în vederea evaluării eficienței diferențiale și globale a procesului de cernere cu utilaje de genul menționat. În cadrul lucrării de față s-au obținut și expresiile vitezelor critice (unghiulare), necesare pentru aprecierea stabilității mișcării unei mașini existente sau a uneia ce urmează a fi proiectată. În această ordine de idei, adoptînd valori optime pentru r_s și ω (determinate experimental pentru materialul ce urmează a fi separat, avînd în vedere atît eficiența cernerii, cît și protejarea dimensiunilor particulelor de material), se pot alege, folosind relația (16), parametrii constructivi ai ciurului (valoarea maselor excentrice, excentricitatea acestora, distanța dintre ele, constantele elastice ale arcurilor etc.). Valorile acestor parametri trebuie să se aleagă în așa fel încît să fie asigurată o plajă corespunzătoare de funcționare, ținînd seama de valoarea vitezei unghiulare de rezonanță ce poate fi determinată cu relațiile (18). În cazul unui ciur existent, metoda prezentată poate fi utilizată pentru adaptarea utilajului în sensul celor indicate mai sus.

În finalul lucrării se prezintă o comparație între valorile determinate teoretic și experimental pentru amplitudinea oscilațiilor centrului sitei unui model de ciur cu mișcare de ruliu, pentru trei regimuri de funcționare, remarcîndu-se o concordanță bună între acestea.

Primită la redacție la 21 martie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. I. R. IATAN, M. RENERT Buletinul IPB, **33**, nr. *6*, p. 79 — 91 (1971).
2. I. R. IATAN, M. RENERT, I. GUERON, GH. ENE, Ciur cu mișcare de ruliu, brevet de invenție R.S.R., nr. 67497/1978.
3. I. R. IATAN, Buletinul IPB, **34**, nr. *2*, p. 85 — 92 (1972).
4. I. R. IATAN, GH. ENE, Considerații asupra dinamicii ciururilor cu ruliu și al transportului materialului pe sită, Sesiunea de Comunicări științifice INCERC, 13 — 15 martie 1975, Cluj-Napoca.
5. I. R. IATAN, GH. ENE, Revista de chimie, **27**, nr. *1*, p. 44 — 48 (1976).
6. GH. ENE, Dinamica materialelor granulare corelată cu dinamica particulei individuale cu aplicație la ciururile cu ruliu, teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1984.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND INFLUENȚA ABATERILOR MACROGEOMETRICE ASUPRA CARACTERISTICILOR STATICE ȘI DINAMICE ALE LAGĂRELOR AEROSTATICE

de FL. DIMOFTE
Institutul Politehnic, București

GH. BUCȘĂ,
Oficiul de Stat pentru Invenții și Mărci

Lagărele cu gaze pot fi utilizate în cele mai bune condiții numai dacă pe lîngă proiectarea atentă a acestora se asigură o alegere corespunzătoare a materialelor și a tehnologiei de execuție.
Avînd în vedere că înlăturarea unor abateri macrogeometrice, ca de exemplu: ovalități, conicități, neplaneități, prin prelucrări mecanice suplimentare, necesită consumuri adiționale de manoperă de energie și de materiale deficitare (ca de exemplu, pulberi metalice, pietre abrazive diamantate etc.) lucrarea își propune să stabilească mărimea și natura influențelor unor abateri macrogeometrice asupra comportării lagărelor cu gaze și condițiile în care este posibilă utilizarea acestora chiar în cazul în care mărimea abaterilor este cuprinsă între 10 și 30% din jocul lagărului

INTRODUCERE

Lagărele cu gaze pot fi utilizate în cele mai bune condiții numai dacă pe lîngă proiectarea atentă a acestora se asigură o alegere corespunzătoare a materialelor și a tehnologiei de execuție și de montaj. Pentru realizarea practică a ipotezelor de calcul și de proiectare este esențial ca forma geometrică să fie cît mai apropiată de cea considerată în calcule, cu abateri micro și macrogeometrice minime.

Avînd în vedere că lagărele cu gaze funcționează cu jocuri de ordinul 1 : 1000 față de celelalte dimensiuni și cunoscînd că din cercetările anterioare [1, 2, 3] a rezultat că abaterile de la geometrie nu trebuie să depășească 1 : 10 din jocul lagărului, rezultă că aceste abateri sînt de ordinul 1 : 10 000 din dimensiunile suprafețelor lagărului, respectiv pentru un ax cu un diametru de 20 mm, ovalitățile, de exemplu, nu trebuie să depășească 1 — 2 microni. Aceste condiții deosebite, de precizie dimensională, sînt, pe de o parte, destul de greu de realizat, iar, pe de altă parte, cu cît precizia de prelucrare crește cu atît costurile de fabricație sînt mai mari devenind uneori prohibitive.

Analizînd prețul de cost al unei broșe aerostatice Ø 80 × 250 se constată că valoarea prelucrărilor este față de valoarea materialelor utilizate într-un raport de 4 : 1 confirmînd astfel volumul foarte mare de manoperă necesar realizării elementelor componente ale lagărelor respective.

Avînd în vedere că înlăturarea unor abateri macrogeometrice, ca de exemplu, ovalități, conicități, neplaneități, prin prelucrări mecanice suplimentare necesită consumuri suplimentare de manoperă, de energie și de materiale deficitare, ca de exemplu pulberi metalice, pietre abrazive diamantate, lucrarea își propune să stabilească mărimea și natura influențelor unor abateri macrogeometrice asupra comportării lagărelor cu gaze. Totodată se va căuta să se stabilească mărimea maximă pe care o pot avea

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 3, 1986, P. 304—317

aceste abateri (peste 10 % din jocul lagărului) pentru ca lagărul să fie încă utilizabil, diminuarea performanțelor acestuia neinfluențînd în mod esențial asupra comportării ansamblului din care face parte.

DESCRIEREA LAGĂRULUI EXPERIMENTAL

Pentru experimentare s-a utilizat o broșă de rectificat pe lagăre cu aer pentru mașini de rectificat interior, tip ARI 3—30 P, soluția constructivă fiind obiectul invențiilor R.S.R. nr. 55.273 și 55.276, autori fiind prof. dr. doc. V. N. Constantinescu, dr. ing. F. Dimofte și alții.

Broșa conține două lagăre radiale identice *A*, (vezi fig. 1) montate într-o carcasă din oțel *1* și un lagăr axial dublu *B*, fiind prevăzută cu un sistem de alimentare unic, atît pentru cele două lagăre radiale, cît și pentru lagărul axial dublu prin intermediul unei prize de aer din care aerul pătrunde în două canale de alimentare.

Alimentarea lagărului axial dublu, amplasat lîngă fulia broșei, este realizată pe fiecare parte a discului *5* printr-un rînd de orificii cu zece orificii pe rînd, avînd diametrul de 0,6 mm, Jocul axial este 0,040 mm. Alimentarea lagărelor radiale se face prin două rînduri de orificii cu cîte cinci orificii pe un rînd prin restrictor cu diametrul de 0,2 mm asociat cu un buzunar de alimentare cu un diametru de 4 mm și adîncime de 1 mm. Orificiile de alimentare de 0,2 mm sînt realizate într-o pastilă *8* care se montează în corpul cuzinetului pe un prag, retrasă față de suprafața interioară a acestuia în așa fel încît să se formeze un buzunar cu adîncimea de 1 mm. Etanșarea pastilei în corp se poate face cu ajutorul unei rășini sintetice.

Cele două lagăre radiale identice au diametrul de 50 mm și lungimea de 100 mm, valoarea alungirii $\lambda = L/D = 2$, valoare considerată optimă pentru diametrul respectiv, în sensul că la această valoare se obțin o rigiditate și o capacitate de încărcare maxime. Jocul radial este de 0,020 mm.

Corpul *1* al broșei este realizat din OLC 45 îmbunătățit și pentru prevenirea oxidării se poate cadmia.

În corpul broșei se presează cuzineții *3* și *4* ai lagărelor radiale *A*. Cuzineții *3* și *4* sînt realizați din oțel inoxidabil avînd în interior, spre capătul dinspre fulie și spre piatră, o depunere de pulberi metalice prin metalizare cu jet de plasmă cu ajutorul unei instalații tip METCO. Această metalizare se realizează atît la extremitățile cuzineților, cît și la extremitățile fusului pe o lungime de aproximativ 20 mm, deoarece s-a dovedit că are o rezistență la frecare uscată foarte bună.

Axul *2* al broșei este realizat din oțel inoxidabil (9H18) și este prevăzut la un capăt cu un con exterior pe care se fixează fulia, iar la celălalt capăt cu un con interior în care se fixează tija port-piatră.

Prelucrarea elementelor componente ale broșei trebuie să fie făcută în condiții deosebit de precise astfel încît să se asigure toleranțele prescrise.

Abaterile de la coaxialitate și ovalitate nu trebuie să depășească 1/10 000 din dimensiunile suprafețelor, respectiv la un ax de diametrul de 50 mm, se impune ca abaterile macrogeometrice să nu depășească 4 — 5 microni, respectiv cel mult 10 — 12 % din joc.

PREZENTAREA STANDULUI EXPERIMENTAL

Pentru determinarea caracteristicilor statice și dinamice ale broșei, respectiv capacitatea portantă, rigiditatea și precizia de rotație a axului, s-a realizat un stand experimental, pe batiul căruia a fost montată broșa conform figurii 2.

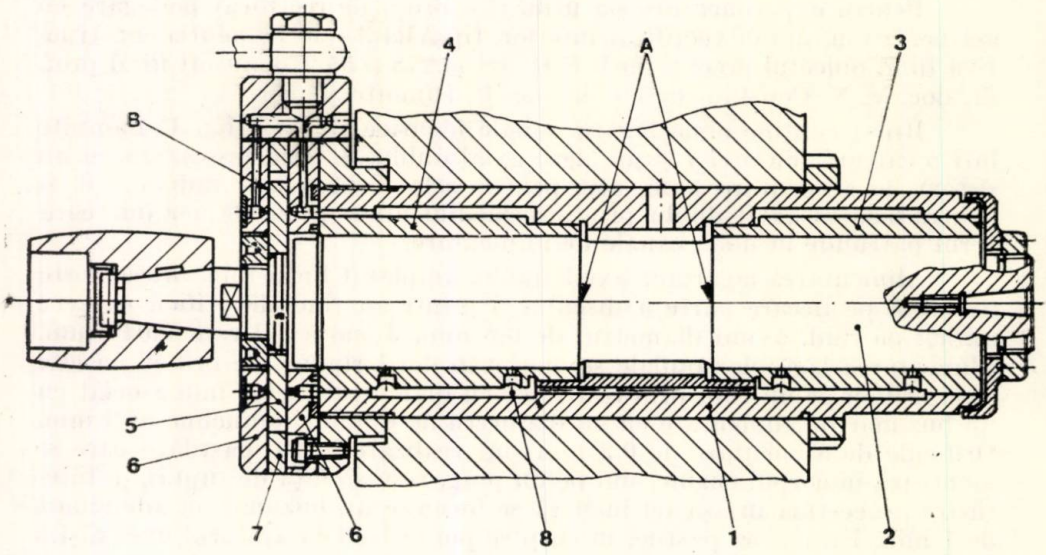


Fig. 1 — Secțiune longitudinală prin broșa aerostatică.

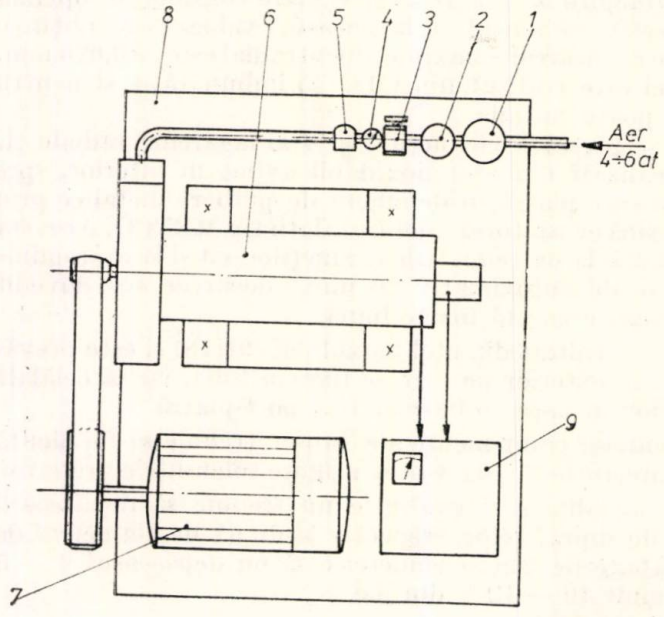


Fig. 2 — Schema standului experimental; *1*. filtru de aer (grosier); *2*. filtru de aer (fin); *3*. reductor de presiune; *4*. manometru; *5*. presostat; *6*. broșa pe lagăr cu aer; *7*. motor de antrenare; *8*. batiu; *9*. aparat indicator al contactului dintre axul și cuzinetul lagărului.

Broșa poate fi antrenată de un motor prin intermediul unei curele de transmisie și a două fulii pînă la 30 000 rot/min. S-a ales un motor bine echilibrat care să nu transmită vibrații prin intermediul batiului.

Cureaua de transmisie a fost astfel întinsă încît să permită rotirea liberă a broșei la presiunea nominală de alimentare de 5 at, iar după atingerea turației maxime, a fost înlăturată pentru a nu influența asupra măsurătorilor efectuate.

Broșa a fost rigid montată pe batiu pentru a nu prezenta vibrații.

Alimentarea cu aer sub presiune, de la rețea, a fost realizată prin intermediul unui presostat și unei baterii de filtre, care să permită reținerea unor impurități solide pînă la 5 μm apă, uleiul și fluide corosive, în proporție de 99,999 %. S-a prevăzut de asemenea un reductor de presiune și un manometru.

Ca o verificare suplimentară s-a realizat un montaj electric care să indice un eventual contact direct dintre ax și cuzinet, respectiv carcasa lagărului.

VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

Rezultate experimentale obținute la verificarea caracteristicilor statice ale lagărelor (capacitatea de încărcare și rigiditatea) cu abateri macrogeometrice minime (sub 5% din jocul radial)

Verificarea caracteristicilor statice ale lagărului, respectiv capacitatea de încărcare și rigiditatea radială a fost făcută considerîndu-se o încărcare transversală a broșei conform figurii 3.

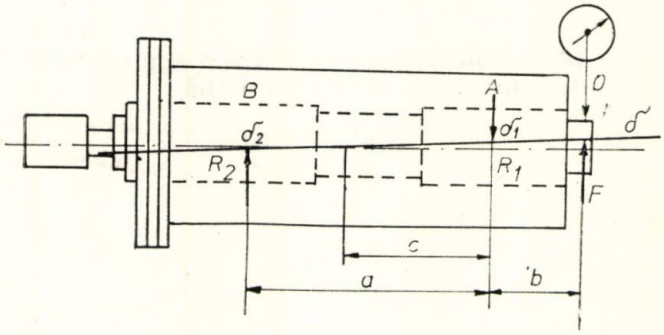


Fig. 3 — Schema de încărcare transversală a broșei aerostatice.

Din schema prezentată rezultă faptul că în urma aplicării forței F, arborele se deplasează în lagărele A și B cu δ_1 și δ_2. Ca urmare, reacțiunile generate în lagăre vor fi :

$$R_1 = F\,\frac{a+b}{a}\,; \qquad R_2 = F\,\frac{b}{a}\,,$$

avînd în vedere însă și greutatea proprie G a axului, reacțiunile vor fi :

$$R_1 = F\,\frac{a+b}{a} - \frac{G}{a}\,; \qquad R_2 = F\,\frac{b}{a} + \frac{G}{2}$$

și dacă considerăm $\frac{G}{2} = \lambda F$, obținem

$$R_1 = \frac{a+b}{a} - \lambda F = F\frac{a(1-\lambda)+b}{a},$$

$$R_2 = F\frac{b}{a} + \lambda F = F\frac{a\lambda+b}{a}.$$

Rigiditatea în cele trei puncte A, B și O este :

— în punctul A $\quad K_1 = \frac{R_1}{\delta_1}$;

— în punctul B $\quad K_2 = \frac{R_2}{\delta_2}$;

— în punctul O $\quad K = \frac{F}{\delta}$.

Pentru lagărul A, ținînd cont de relația

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{c}{c+b},$$

rezultă, succesiv,

$$\delta_1 = \frac{c}{c+b}\delta; \quad K_1 = \frac{R_1}{\delta_1} = \frac{R_1(c+b)}{c}\cdot\frac{1}{\delta}; \quad K_1 = \frac{F}{\delta} = \frac{(c+b)\,[a(1-\lambda)+b]}{a\cdot c}.$$

Presupunînd că deplasările în lagărele A și B sînt proporționale cu reacțiunile R_1 și R_2, se determină dimensiunea c astfel :

$$\frac{c}{a-c} = \frac{\delta_1}{\delta_2}$$

dar știind că

$$\delta_1 = \frac{R_1}{K_1}; \quad \delta_2 = \frac{R_2}{K_2},$$

rezultă

$$\frac{c}{a-c} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{K_2}{K_1}.$$

Notînd raportul rigidităților lagărelor A și B,

$$r = \frac{K_1}{K_2}$$

și înlocuind valorile reacțiunilor, rezultă

$$c = \frac{a^2(1-\lambda)+ab}{\gamma(a\lambda+b)+a(1-\lambda)+b}.$$

Se evidențiază faptul că parametrul c este determinat de dimensiunile constructive ale broșei, dar variază continuu cu valoarea forței de încărcare și cu raportul r al rigidităților lagărelor, fapt ce contribuie la aspectul neliniar al curbei rigidității statice.

În cazul unor excentricități relative mari, din cauza neliniarității curbei de rigiditate se impune determinarea rigidității locale, corespunzătoare momentului în care forța variază în jurul unei valori precise, considerîndu-se panta curbei într-un anumit punct:

$$K' = \frac{\Delta F}{\Delta \delta},$$

în care

ΔF = variația forței,

$\Delta \delta$ = variația deplasării.

Față de o anumită poziție de încărcare determinată de cota c aceasta rămîne practic constantă la o variație F a forței, deplasările față de această poziție fiind determinate de reacțiunile suplimentare:

$$\Delta R_1 = \Delta F \frac{a + b}{a},$$

$$\Delta R_2 = \Delta F \frac{b}{a}.$$

În aceste condiții, analog raționamentelor anterioare, legătura dintre rigiditățile locale K_1 și K' ale lagărului A, respectiv ale punctului de încărcare O, este următoarea:

$$K_1 = K' \frac{(c + b)(a + b)}{ac}.$$

Particularizînd geometria broșei testate, rezultă pentru $a = 232$ mm, $b = 80$ mm, $G = 53$ N,

$$K_1 = (1{,}925 - \lambda) K'$$

în ipoteza că ambele lagăre sînt identice, deci

$$\gamma = \frac{K_1}{K_2} = 1.$$

Se observă că rigiditatea locală a broșei este aproximativ de două ori mai mare în lagăr (A) decît în vîrful axului (la piatră).

Rezultatele verificărilor efectuate s-au concretizat sub forma curbelor de rigiditate prezentate în figura 4 pentru punctul O în dreptul pietrei de rectificat și reduse în centrul lagărului A pe baza metodei prezentate.

Pentru presiunea de alimentare de 0,6 MPa au fost obținute următoarele valori :

Încărcarea maximă la piatră (N) . . . . . 430.
Încărcarea maximă în lagărul A(N) . . . . . 550.
Rigiditatea statică în lagărul A(N/μm) . . . . . .51.

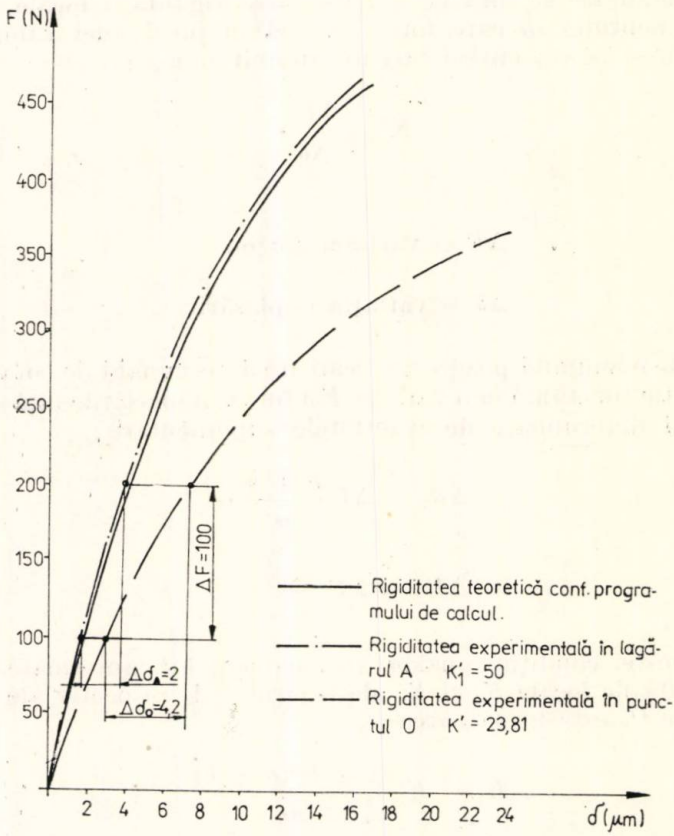


Fig. 4 — Diagramele de rigiditate a broșei aerostatice.

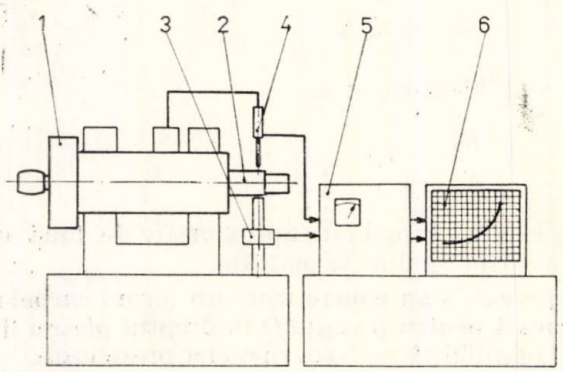


Fig. 5 — Schema standului pentru verificarea capacității de încărcare și a rigidității broșei : *1*. corpul lagărului ; *2*. axul lagărului ; *3*. traductor de forță (Hotinger) ; *4*. traductor de deplasare ; *5*. punte electronică de echilibrare și amplificare ; *6*. ploter.

Verificările au fost efectuate pe standul de probă utilizîndu-se un traductor de forță (Hotinger) și un traductor de deplasare, ambele fiind cuplate la o punte electronică multicanal și un ploter (fig. 5).

Din figura 4, se constată că valorile determinate experimental pentru lagărul A, sînt foarte apropiate de valorile teoretice calculate, conform programului de calcul prezentat. De asemenea, rezultă că aceste valori determinate experimental sînt similare cu cele ale unor broșe aerostatice fabricate de firme străine (ex. Westwind-Anglia) și prezentate în lucrările de specialitate.

Rezultatele experimentale obținute la verificarea caracteristicilor statice ale lagărelor cu abateri macrogeometrice evidente (10—30% din jocul radial)

Pentru aceste verificări au fost considerate lagărele care aveau cuzineții cu o ovalitate de peste 10 % din jocul radial, respectiv cu ovalități de 20 % și 30 % din jocul radial.

Verificarea abaterilor macrogeometrice s-a făcut prin măsurarea diametrului axului lagărului și a cuzinetului în cel puțin trei secțiuni pe două diametre perpendiculare. Rezultatele măsurătorilor efectuate cu aparate de înaltă precizie (Talyrond 200) au fost consemnate în fișa de măsurători specifice. De asemenea, au fost făcute și diagramele grafice (Talyrond) pentru cazurile respective. Rezultatele verificărilor efectuate s-au concretizat sub forma curbelor de rigiditate prezentate în figurile 6 și 7 pentru punctul O în dreptul pietrei de rectificat și pentru lagărul A, la presiunea de alimentare de 0,4 MPa și 0,6 MPa. În figura 8 se prezintă curbele de rigiditate pentru cazul de ovalitate 30 %, după ce cuzinetul a fost rotit cu 90°, față de axa orizontală.

Din analiza rezultatelor determinate experimental se constată că acestea sînt foarte apropiate de valorile rezultate din calcul și publicate anterior, [11] confirmînd faptul că erorile de circularitate reduc capacitatea de încărcare a lagărului ideal.

De asemenea, rezultatele obținute experimental se încadrează în limitele obținute și de ceilalți cercetători [1, 3, 4, 7. 8, 9, 10].

Rotirea bucșei ovale față de axa orizontală, respectiv față de linia de sarcină a determinat o modificare mică, a capacității de încărcare, respectiv a rigidității, cu aproximativ $\pm$ 5 — 8 %, comparabilă cu eroarea măsurătorilor $\pm$ 3 % — 5 %.

De asemenea, a rezultat că ovalitatea cuzinetului are un efect stabilizator asupra preciziei de mișcare a fusului.

Rezultate experimentale obținute la verificarea preciziei de rotație a axului broșei aerostatice

Ca metodă experimentală de măsurare a preciziei de rotație a axului a fost utilizată o metodă care constă în a reprezenta mișcarea de rotație ideală cu ajutorul unui cerc. Abaterile față de această rotație ideală sînt determinate de abaterile centrului instantaneu de rotație față de centrul de rotație ideal măsurate într-un plan perpendicular pe direcția vectorului vitezei unghiulare.

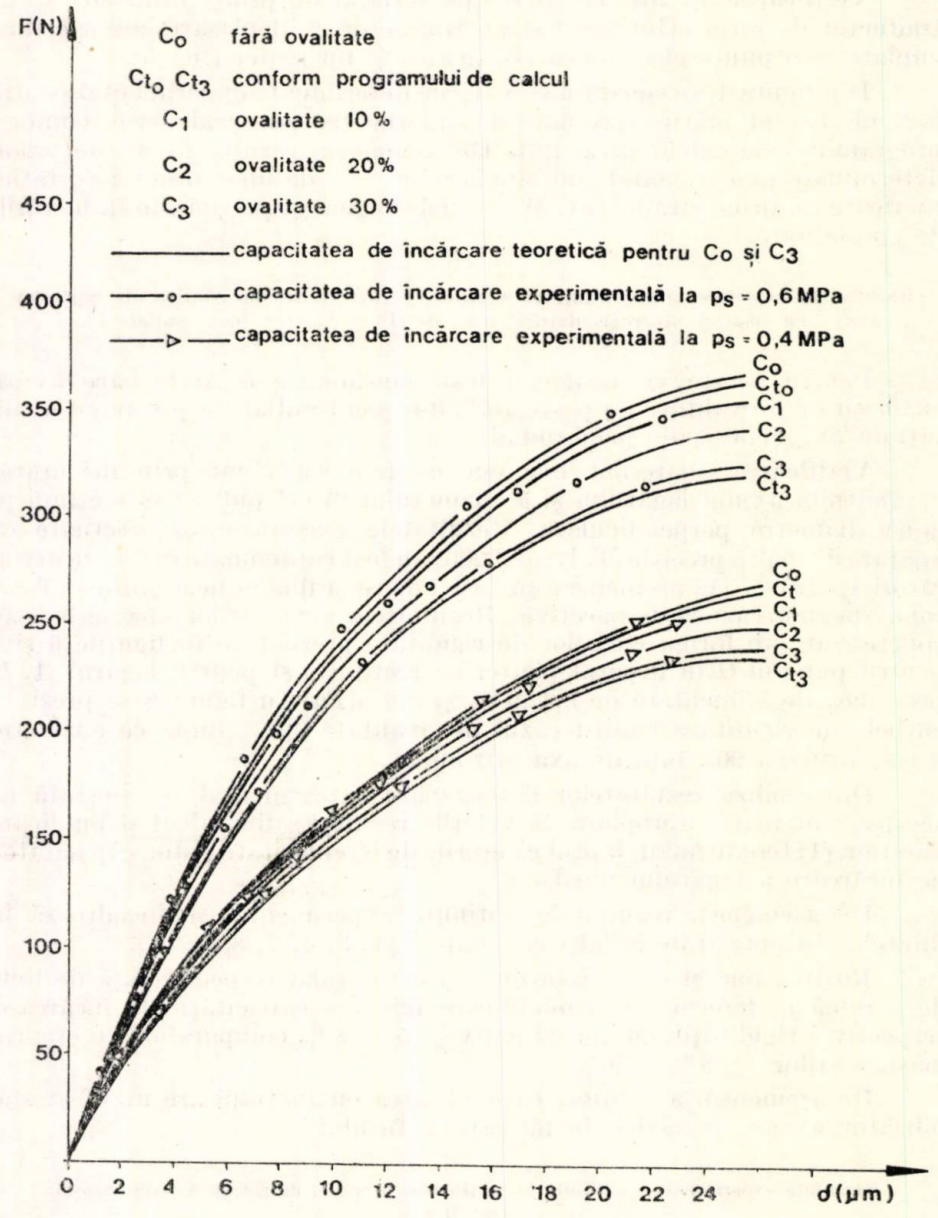


Fig. 6 — Diagramele capacității de încărcare statică a broșei aerostatice în punctul *O* (la piatră).

Este evident că noțiunea de precizie de rotație se referă la abaterile de poziție ale centrului de rotație instantaneu a axului broșei, la turația de regim față de centrul de rotație ideal.

Pentru realizarea măsurătorilor, pe capătul axului *1* dinspre piatră s-a fixat o bilă sferică *2* avînd diametrul de 20 mm și cu o excentricitate inițială de 6 μm față de axa de rotație (vezi fig. 9).

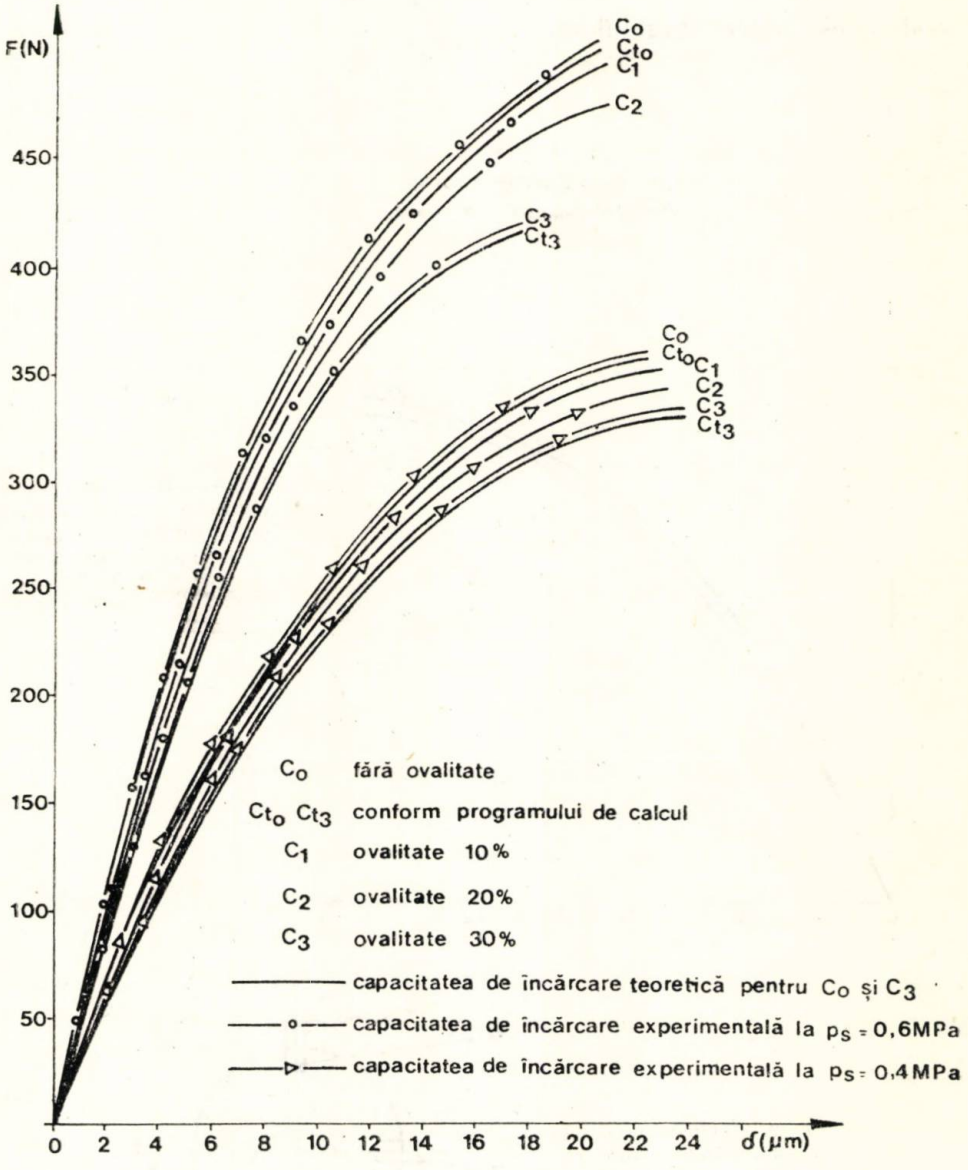


Fig. 7 — Diagramele capacității de încărcare statică a broșei aerostatice în lagărul *A*.

În cazul unei rotații ideale în cei doi traductori *3* și *4* se introduc semnale sinusoidale, datorită excentricității bilei, acestea fiind decalate între ele cu 90°.

Traductorul vertical *4* și cel orizontal *3* variază astfel :

$$y = e \sin \omega t$$

$$x = e \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = e \cos \omega t$$

unde ω este viteza unghiulară.

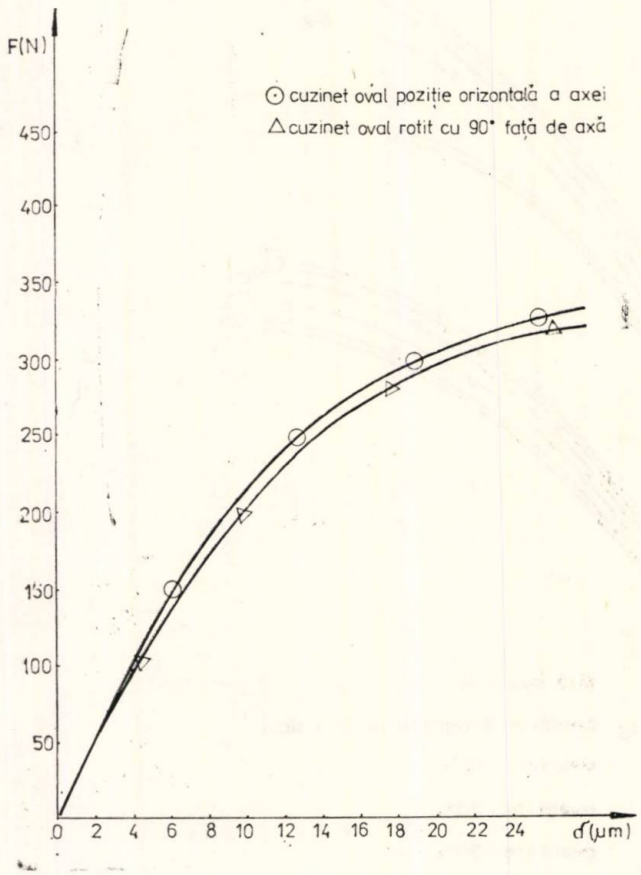


Fig. 8 — Diagrama capacității de încărcare a broșei cu ovalitate 30% înainte și după rotirea axei.

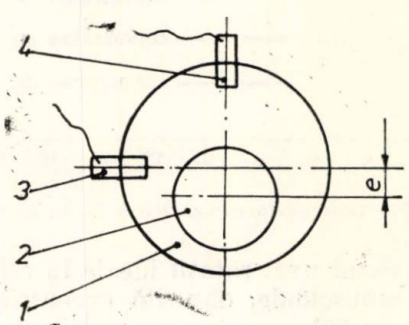


Fig. 9 — Scbema de măsurare a preciziei de rotație a axului broșei aerostatice.

Valorile x și y reprezintă ecuațiile parametrice ale unui cerc cu centrul în originea sistemului de coordonate și avînd diametrul egal cu dublul excentricității e a bilei.

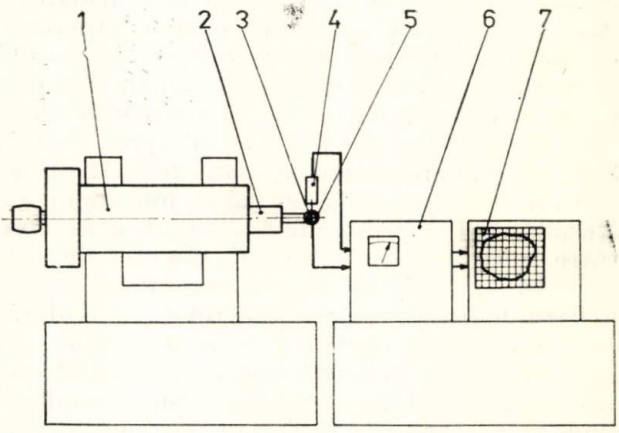


Fig. 10 — Scbema standului de verificare a preciziei de rotație ; *1*. corpul lagărului ; *2*. axul lagărului ; *3*. bilă excentrică ; *4*, *5* traductori inductivi ; *6*. punte electronică de echilibrare și amplificare ; *7*. osciloscop.

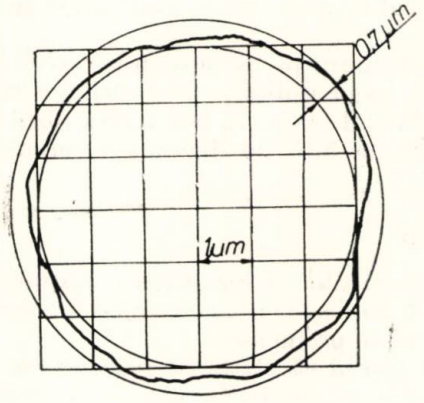


Fig. 11.

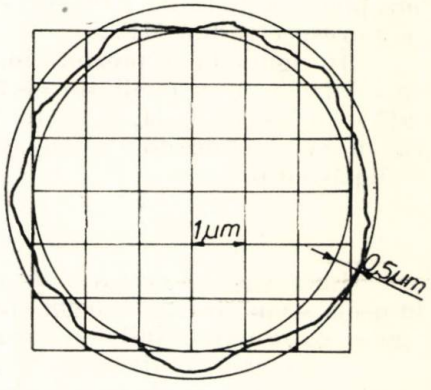


Fig. 12.

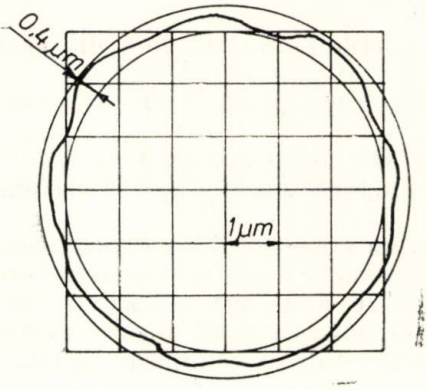


Fig. 13.

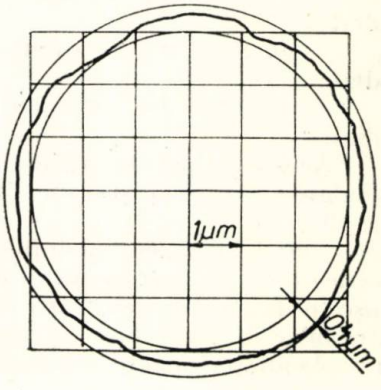


Fig. 14.

Pentru experimentare s-a utilizat o instalație de măsurare prezentată în figura 10.

Această instalație este constituită din doi traductori inductivi fără contact fixați prin intermediul unui dispozitiv pe standul de încercări. Acești traductori transmit semnale practic sinusoidale induse de bila excentrică, către unitatea de echilibrare și amplificare. Cele două semnale dirijează spotul unui osciloscop simultan pe direcție verticală și orizontală obținîndu-se o imagine ca cea prezentată în figura 11.

Trasînd un cerc din centrul aproximativ al figurii (cu diametrul de 30 mm) și reprezentînd la scară $2e = 12$ μ, se poate determina mărimea abaterii față de aceasta, avînd ca unitate de etalonare diametrul cercului. Rezultă deci că aceste abateri față de acest cerc median măsurate pe rază către interiorul sau exteriorul său sînt de aproximativ 0,7 μm.

În figura 12 și 13 este prezentată imaginea obținută pe osciloscop în cazul măsurării preciziei de rotație a axului unei broșe la care cuzinetul are abateri de la circularitate de 20 % și 30 % din jocul radial.

Măsurînd abaterile față de diametrul cercului rezultă o valoare de aproximativ 0,5 μm și 0,4μm, valori semnificative pentru cazul analizat, evidențiind faptul că ovalitatea cuzinetului are un efect stabilizator asupra preciziei de rotire a fusului și în special la presiuni de alimentare mai mari respectiv 0,6 MPa.

În figura 14 se prezintă imaginea obținută pe osciloscop în cazul în care cuzinetul cu ovalitate de 30 % din jocul radial a fost rotit cu 90° față de axa orizontală, respectiv față de linia de sarcină. Din figură rezultă că efectul stabilizator se menține, abaterile față de diametrul cercului nedepășind 0,4 μ.

CONCLUZII

Lucrarea reprezintă o sinteză a cercetărilor și rezultatelor obținute în urma studierii fenomenelor statice și dinamice ce apar în lagărele aerostatice ca urmare a influențelor abaterilor de prelucrare.

Rezultatele obținute au evidențiat faptul că abaterile macrogeometrice, respectiv ovalitățile reduc capacitatea de încărcare a lagărului ideal pentru orice grosime a filmului de lubrifiant astfel:

— cu 3 — 5 % în cazul în care abaterile reprezintă 10 % din jocul radial;

— cu 8 — 10 % în cazul în care abaterile reprezintă 20 % din jocul radial;

— cu 12 — 19 % în cazul în care abaterile reprezintă 30 % din jocul radial.

Aceste valori obținute experimental sînt foarte apropiate de valorile calculate teoretic [11] și se încadrează în limitele obținute și de alți cercetători (3 — 10).

Avînd în vedere că influența negativă a acestor abateri macrogeometrice este preponderentă în domeniul sarcinilor mari, utilizarea acestor broșe în domeniul rectificării de mare precizie unde forțele rezultate sînt foare mici, se poate face cu bune rezultate chiar în cazul în care acestea au unele abateri macrogeometrice de pînă la 10 — 20 % din jocul radial.

Primită la redacție la 13 iunie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Lubrificație cu gaze*, Edit. Academiei, București, 1963.
2. V. N. CONTANTINESCU, AL. NICA, M. D. PASCOVICI, GH. CEPTUREANU, ST. NELDECU, *Lagăre cu alunecare*, Edit. tehnică, București, 1980.
3. V. N. CONSTANTINESCU, *Aplicații industriale ale lagărelor cu aer*, Edit. Academiei, București, 1968.
4. V. N. CONSTANTINESCU, E. RĂDULESCU, *On some rafinaments of the analysis of externally pressurized gas thrust bearings* Gas Bearing Symposium, University of Southampton, 1969.
5. FLORIN DIMOFTE, *Metode noi în calculul lagărelor*, INID, București, 1973.
6. DAN PAVELESCU ș.a., *Tribologie*. Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1977.
7. P. SHELL and C. ETTLES, J. Mech, Eng. Sci, **14** (1972) 168.
8. S. T. TZENG, E. SAIBEL, Wear, **10** (1967) 179.
9. H. CRISTENSEN, K. TONDER, J. Lubr. Technolo **95** (1973) 166
10. S. S. PANDE and S. SOMASUNDARA M, Wear, *66* (1981) 145.
11. FL. DIMOFTE, ST. NEDELCU, GH. BUCȘĂ, *Cercetări teoretice privind determinarea caracteristicilor funcționale ale lagărelor aerostatice*, ST. CERC. MEC. APL., TOM **45**, NR. 1, P. 68—82 (1986).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Progrese prin tehnici digitale de măsură și automatizare. Congresul INTERKAMA 1983 (Fortschritte durch digitale Mess-und Automatisierungs-technik), Editori M. Syrbe și M. Thoma, Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1983, XV + 791 p.

Scopul congresului INTERKAMA 1983 a fost de a da sugestii celor ce activează în practică prin indicarea unor rezultate mai recente și a dezvoltărilor viitoare. Pe lîngă dezvoltarea de aparatură modernă se tratează de asemenea procedee avansate în domeniul măsurătorilor și automatizării. Se ține seama de progresul extrem de rapid al componentelor superintegrate de semiconductori care a condus la dezvoltarea microprocesoarelor, care permit realizarea unui număr mare, în continuă creștere, de funcții fără ca prețul lor să prezinte o pondere însemnată. Aceasta va permite realizarea în viitor a unor conduceri de procese din ce în ce mai descentralizate la costuri avantajoase, cu o siguranță în exploatare și posibilitate de supraveghere sporite.

Cele peste 60 de referate prezentate de specialiști recunoscuți au fost grupate în conformitate cu cele patru secțiuni ale congresului astfel:

1. *Verificare, măsurătoare*

Senzori

Recunoașterea de mostre, prelucrarea imaginilor. Tehnici de verificare și asigurarea calității. Observatori și procedee de identificare de procese în aplicarea în practică.

2. *Comandă, reglare*:

Sensibilitate și robustețe la sisteme de reglare. Procedee de comandă și reglare pentru sarcini complexe. Componente aparate și sisteme ale tehnicii digitale de măsură, comandă și reglare.

3. *Tehnologia aparaturii*:

Sisteme de transmiterea și prelucrarea datelor pentru tehnici de măsură, comandă și reglare.

4. *Tehnica de sisteme*:

Proiectarea de sisteme asistată de calculator, simulare, engineering de software. Experiența practică cu sisteme de automatizare distribuite. Comunicație audio-vizuală între om și proces. Fiabilitate și toleranțe de erori ale sistemelor de automatizare.

G. Winter

REINHARD MAYR, Automatisierte Netzgenerierung fur Finite-Element-Verfabren, C. Hanser Verlag, München, 1981, 256 pag., 113 fig., 92 iulie bibl.
(Generarea automată a rețelelor în metoda elementelor finite-MEF)

Automatizarea generării rețelei de elemente mărește eficiența MEF și permite implicarea ei directă în procese de optimizare. Lucrarea de față a fost elaborată la institutul de mașini-unelte al universității tehnice din Berlin. Prin utilizarea unui model geometric, tipologic complet, împreună cu funcțiile sistemului de prelucrare a datelor COMPAC au rezultat principii noi de discretizare. Drept bază a unei prelucrări optime a informațiilor servește memorarea orientată geometric a proprietăților tipologice și fizice ale elementelor finite într-un model de date structurat pe clase. În acest fel construcția poate fi cuplată direct cu calculul ei.

Primul capitol din cele opt ale cărții prezintă elemente introductive legate de schematizarea structurilor, calculul lor electronic și de necesitatea utilizării mai intense a MEF și în construcția de mașini.

Premizele pentru generarea unei rețele sînt puse în evidență în capitolul 2. Prezentarea succintă a MEF conduce la concluzia că într-o modelare corespunzătoare elementele finite trebuie să fie cît mai mici și cît mai regulate. Analiza principalelor procedee pentru generarea rețelelor triunghiulare (Cavedendish, Kamel) respectiv patrulatere (Zienkiewicz/Phillips, Yeung/Hsu) permite formularea unor cerințe de care se ține seama la dezvoltarea unor noi procedee de generare a rețelelor.

Capitolul 3, cel mai dezvoltat, se ocupă de generarea rețelelor pentru topoogii oarecare. În cazul rețelelor superficiale se propune extinderea procedeului Cavendish și se dezvoltă tehnici macro. În continuare se tratează netezirea rețelelor neregulate cu procedeul Kamel. Prezentarea macrotehnicii de generare a rețelelor spațiale, mai eficientă decît în cazul rețelelor superficiale, este urmată de posibilități de netezire a rețelelor tetraedrice.

În capitolul 4 se pune în evidență un model pentru reprezentarea rețelelor în calculator elementele modelului fiind împărțite în 7 clase. Modelul este corelat cu cerințele metodei elementelor finite. Reprezentarea grafică a rețelelor este studiată în capitolul 5 atît pentru rețele plane, cît și spațiale superficiale și volumice. Se tratează atît reprezentarea continuă cît și cea explodată, utilă la verificarea elementelor finite izolate. În vederea obținerii unor imagini realiste ale corpurilor $3D$ pe ecranul $2D$ se indică posibilități de redare a celei a treia dimensiuni și de eliminare a muchiilor acoperite.

Introducerea sistemului de generare a rețelei într-un cadru general grafic interactiv asigură utilizatorului un confort ridicat. Acest aspect este tratat în capitolul 6 pe baza tehnicii meniurilor. Capitolul 7 se referă la utilizarea rețelelor în afara MEF la calculul volumelor, greutăților și centrelor de greutate, iar capitolul 8 rezumă principalele probleme studiate în lucrare.

Cartea dr. ing. R. Mayr se adresează tuturor utilizatorilor MEF interesați în problema generării automate a discretizării specifice acestei metode. Prezintă clar principiile de bază cît și o serie de detalii pentru conceperea unor programe ce realizează acest pas important în mărirea eficienței MEF, fiind singura carte cu acest subiect.

R. Friedrich

K. R. F. ANDREWS, *BASIC theory of structures* (Limbajul BASIC în teoria structurilor), Butterworths, London, 1985, 144 p.

Volumul face parte dintr-o amplă serie de lucrări publicate de editura Butterworths, consacrate folosirii limbajului de programare BASIC pentru rezolvarea automată a problemelor de fizică și mecanică, precum și a problemelor de natură economică din principalele domenii inginerești.

Scopul principal al lucrării recenzate constă în inițierea studenților facultăților de construcții, precum și a tuturor celor interesați, în însușirea și aplicarea calculului automat, prin folosirea limbajului BASIC, la rezolvarea problemelor pe care le pun structurile static determinate ale construcțiilor. Pentru aceasta se face mai întîi o prezentare de sinteză a instrucțiunilor de întocmire a programelor, precum și a metodelor de analiză numerică folosite, după care se trece la rezolvarea sistematică a problemelor privind : calculul eforturilor din barele grinzilor cu zăbrele și calculul deplasărilor nodurilor la aceste grinzi, determinarea momentelor încovoietoare, forțelor tăietoare și deplasărilor la grinzi simple și trasarea liniilor de influență la grinzi simple, grinzi compuse și grinzi cu zăbrele. Lucrarea pune în evidență principalele avantaje ale limbajului de programare BASIC, dintre care hotărîtor este caracterul său conversațional. Această particularitate este exploatată sistematic pe parcursul întregului volum, toate programele prezentate fiind elaborate astfel încît rularea lor să se facă numai în regim conversațional. O astfel de orientare este deosebit de eficientă dacă se are în vedere însușirea rapidă și corectă a programării de către începători, prin conversație directă cu calculatorul. Problemele cuprinse în volum sînt bine selectate, iar rezolvarea lor este îngrijită și completă. Acest ultim aspect se referă la prezentarea în detaliu a programelor de calcul elaborate, precum și la rezultatele rulării acestora. Prin structura și conținutul său, volumul are meritul de a aduce o contribuție importantă la însușirea și răspîndirea calculului automat în rîndul celor interesați.

În țara noastră, eforturile depuse în direcția dotării unităților economice, de proiectare, cercetare și învățămînt cu microcalculatoare de fabricație românească, folosind limbaje de programare conversaționale, între care limbajul BASIC deține locul de frunte, au fost încununate de succes. De aceea, lucrarea prezintă utilitate și pentru studenții și specialiștii din țara noastră, mai ales pentru aceia care doresc să se inițieze în folosirea calculului automat pentru rezolvarea problemelor de mecanica construcțiilor în regim conversațional .

Mircea V. Soare

Robot Technology and Applications. Proceedings of the 1st Robotics Europe Conference. Brussels, June 27 — 28, 1984. (Tehnologia roboților și aplicații. Lucrările Primei Conferințe Europene de Robotică, Bruxelles, iunie 1984,) Editori : Kl Rathmill, P. A. MacConaill, P. S. O'Leary, J. Browne. Springer- Verlag, Berlin-Heidelberg New York—Tokyo, 1985, 203 p., 80 fig.

Volumul, editat de IFS (Publications) din Marea Britanie în anul 1985, prezintă pe 200 de pagini lucrările prezentate la Prima Conferință Europeană de Robotică Industrială de la Bruxelles din 27 — 28 iunie 1984. Conferința a fost organizată de organizația numită Robotics Europe sau Organizația Europeană de Standardizare a Roboticii Industriale, fondată în 1982 și cuprinzînd un grup activ de 35 de membri reprezentînd țările membre afle Comunității Europene. Direcțiile de activitate în robotică sînt următoarele :

— aspecte de sănătate și tehnica securității muncii cu roboții industriali ;

— terminologia roboților industriali ;

— sisteme de programare pentru roboții industriali ;

— comunicații și interfețe pentru roboții industriali ;

— testări ale performanțelor roboților industriali.

Materialul prezentat constituie probleme de vîrf pe plan mondial în acest domeniu și se adresează atît specialiștilor, ingineri, matematicieni programatori, tehnicieni, cît și maselor largi de ingineri și cercetători interesați în probleme legate de roboții industriali, construcția, funcționarea și aplicațiile lor. De asemenea, materialul prezentat este deosebit de util studenților din ultimii ani ai facultăților Politehnicii și Institutelor de subingineri pe profil de mecanică, hidraulică, construcții de mașini, electronică, electrotehnică, tehnică de calcul ș.a.

Volumul cuprinde 17 lucrări, avînd următoarele titluri :

Programul organizației Robotics Europe, autor Patricia MacConaill de la Task Force, Tehnologii de Informatică și Telecomunicații, Comisia Comunității Europene, 4 pag.

Nivelul actual al performanțelor roboților industriali și testarea performanțelor, autori Prof. Dr. ing. H. J. Warnecke și ing. G. Schiele de la Inst. Fraunhofer pentru producție și automatizare, RFG, 13 pag., 13 fig., 3 referințe bibliografice.

Proiect de dezvoltare a unei metode fotogrametrice pentru evaluarea performanțelor dinamice ale roboților industriali, autori Marc PRIEL și Bernard SCHATZ de la Lab. Național de Încercări, Paris, 13 pag., 17 fig.

Măsurarea performanțelor dinamice ale brațelor robotului, autori J. H. Gilby et al., de la Departamentul de inginerie mecanică, Universitatea Surrey, Guildford, Anglia, 14 pag., 4 fig.

Aplicarea analizei de moduri experimentale în procedura de testare experimentală a roboților industriali, autori Prof. Dr. ing. H. J. Warnecke et col., Inst. Fraunhofer pentru producție și automatizare, RFG, 10 pag., 8 fig., 4 ref.

Monografie despre standardele de securitate, autor N. Percival, Asociația de Cercetare a Industriei de mașini unelte, Macclesfield, Anglia, 6 pag., 9 ref.

Siguranța instalațiilor cu roboți în Franța, autor J. P. Vautrin, Lab. de electronică și securitate a sistemelor, Inst. Naț. de Cercetări și Securitate, Vandoeuvre lez Nancy, Franța, 7 pag.

Aprecieri asupra sistemelor electronice programabile cu referiri particulare în robotică, autor R. Bell, Health & Safety Executive (F15), London NW1 5DT, Anglia, 8 pag.

Securitatea muncii și roboții industriali — Stadiul actual al discuțiilor în cadrul grupului tripartit de securitate robotică, autor Peter NICOLAISEN, Fraunhofer Inst. pentru producție și automatizare, RFG, Stuttgart, 16 pag., 9 fig., 3 tabele.

Către o mobilitate a dezvoltării și standarde legate de securitatea muncii, folosind metodologii sistematice, autori F. Duggan et al., Centrul de robotică și sisteme automate, Departamentul de Inginerie Mecanică, Colegiul Imperial, Londra, Anglia, 17 pag., 9 fig., 5 ref.

Activitatea de standardizare internațională în domeniul roboților industriali, autor J.J. Hunter, Lab. Naț. de Inginerie, East Kilbride, Glasgow, Scotland, Marea Britanie, 8 pag., 1 fig., 1 tabel, 3 ref.

Standardizarea în domeniul roboților industriali, autor B. Knorr, VDMA, Frank furt RFG, 5 pag.

Standardizarea internațională legată de roboții industriali, autor H. Tipton, Asociația de Cercetare, Industria de mașini unelte, Macclesfield, Anglia, 4 pag.

Limbaje pentru roboți în anii '80, autoare Giuseppina Gini și Maria Gini, prima : Dept. Electronică, Politehnica din Milano, a doua : Dept. Tehnică de calcul, Universitatea din Minnesota, Minneapolis, SUA, 13 pag., 33 ref.

Programare pentru roboți folosind un limbaj superior și facilități CAD, autor G. Laugier, LIFIA — IMAG — BP 68 — 38402 St-Martin D'Heres, CEDEX, 17 pag., 4 fig., 25 ref., anexă program.

Programare implicită pentru roboți, bazată pe un sistem explicit superior și folosind o bază de date asupra roboților ROBADAS, autor Christian BLUME, Institutul de Informatică III, Universitatea din Karlsruhe, RFG, 16 pag., 8 ref., 8 fig.

Arhitectura roboților pentru integrarea roboților în unitățile industriale, autor R. Dillmann, Institutul de Informatică III, Universitatea din Karlsruhe, RFG, 14 pag., 6 fig., 7 ref.

Dezvoltarea unei bănci de mărci europene pentru compararea sistemelor de programare pentru asamblarea roboților, autori K. Collins, A. J. Parmer, K. Rathmill, CRAG, Cranfield Institute of Technology, Bedfordshire, England, 13 pag., 12 fig., 4 ref.

FORMA MATRICEALĂ A ECUAȚIILOR DE MIȘCARE A SISTEMELOR

de ȘT. STAICU
Institutul Politehnic București

În lucrare se determină, sub forma matriceală, relațiile diferențiale pentru mișcarea unui sistem de solide. Aplicînd teoria vectorilor duali se stabilesc teoremele generale : teorema momentului cinetic dual și teorema energiei cinetice pentru un rigid oarecare al sistemului, punînd în evidență matricea completă de inerție. În încheiere se reia studiul mișcării sistemului, exprimînd condițiile de echilibru dinamic prin metoda deplasărilor virtuale.

1. INTRODUCERE

În cele ce urmează se stabilesc, sub forma matriceală, ecuațiile diferențiale ale mișcării unui sistem de rigide.

Să considerăm un reper fix $\Omega\xi\eta\zeta(T_0)$ în raport cu care se deplasează, sub acțiunea forțelor exterioare $\vec{F}_k^i$, sistemul de corpuri $T_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ solidare cu triedrele mobile $C_k x_k y_k z_k$ (fig. 1). Presupunînd că originile

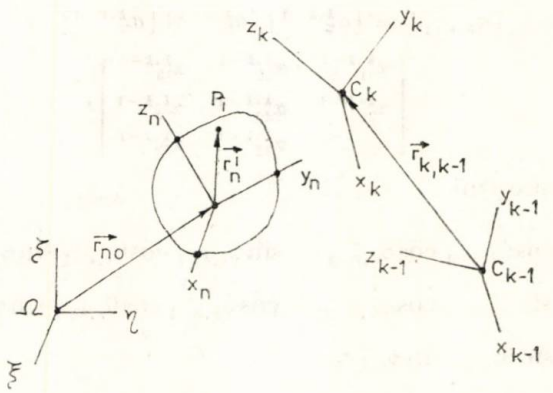


Fig. 1

acestor triedre coincid cu centrele de masă ale rigidelor, parametrii de poziție ai sistemului T_k, în raport cu reperul mobil T_{k-1}, vor fi coordonatele relative $x_{k,k-1}$, $y_{k,k-1}$ și $z_{k,k-1}$ ale originii C_k și unghiurile relative ale lui Euler $\psi_{k,k-1}$, $\theta_{k,k-1}$ și $\varphi_{k,k-1}$ formate de axele $C_k x_k$, $C_k y_k$ și $C_k z_k$ cu axele $C_{k-1}\, x_{k-1}$, $C_{k-1}\, y_{k-1}$ și $C_{k-1} z_{k-1}$. Acești parametri formează matricele coloane

$$(r_{k,k-1}) = \begin{bmatrix} x_{k,k-1} \\ y_{k,k-1} \\ z_{k,k-1} \end{bmatrix}, (\lambda_{k,k-1}) = \begin{bmatrix} \psi_{k,k-1} \\ \theta_{k,k-1} \\ \varphi_{k,k-1} \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1)$$

care pot constitui blocurile matricelor

$$(R_{k,k-1}) = \begin{bmatrix} (r_{k,k-1}) \\ \hline 0 \end{bmatrix}, (\Lambda_{k,k-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline (\lambda_{k,k-1}) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Utilizînd matricele rotaţiilor succesive în jurul originii C_k [2]:

$$[a_{\psi}^{k,k-1}] = \begin{bmatrix} \cos\psi_{k,k-1} & \sin\varphi_{k,k-1} & 0 \\ -\sin\psi_{k,k-1} & \cos\psi_{k,k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[a_{\theta}^{k,k-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{k,k-1} & \sin\theta_{k,k-1} \\ 0 & -\sin\theta_{k,k-1} & \cos\theta_{k,k-1} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$[a_{\varphi}^{k,k-1}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{k,k-1} & \sin\varphi_{k,k-1} & 0 \\ -\sin\varphi_{k,k-1} & \cos\varphi_{k,k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se introduce matricea ortogonală $[a_{k,k-1}]$ de trecere din sistemul mobil T_{k-1} în sistemul alăturat T_k [7]:

$$[a_{k,k-1}] = [a_{\varphi}^{k,k-1}]\,[a_{\theta}^{k,k-1}]\,[a_{\varphi}^{k,k-1}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{k,k-1} & \alpha_{12}^{k,k-1} & \alpha_{13}^{k,k-1} \\ \alpha_{21}^{k,k-1} & \alpha_{22}^{k,k-1} & \alpha_{23}^{k,k-1} \\ \alpha_{31}^{k,k-1} & \alpha_{32}^{k,k-1} & \alpha_{33}^{k,k-1} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

ale cărei elemente sînt

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}^{k,k-1} &= \cos\psi_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1} - \sin\psi_{k,k-1}\cos\theta_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1}, \\
\alpha_{12}^{k,k-1} &= \sin\psi_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1} + \cos\psi_{k,k-1}\cos\theta_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1}, \\
\alpha_{13}^{k,k-1} &= \sin\theta_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1}, \\
\alpha_{21}^{k,k-1} &= -\cos\psi_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1} - \sin\psi_{k,k-1}\cos\theta_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1}, \\
\alpha_{22}^{k,k-1} &= -\sin\psi_{k,k-1}\sin\varphi_{k,k-1} + \cos\psi_{k,k-1}\cos\theta_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1}, \\
\alpha_{23}^{k,k-1} &= \sin\theta_{k,k-1}\cos\varphi_{k,k-1}, \\
\alpha_{31}^{k,k-1} &= \sin\psi_{k,k-1}\sin\theta_{k,k-1}, \\
\alpha_{32}^{k,k-1} &= -\cos\psi_{k,k-1}\sin\theta_{k,k-1}, \\
\alpha_{33}^{k,k-1} &= \cos\theta_{k,k-1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Coordonatele originii C_n a triedrului T_n formează, în sistemul cartezian fix $\Omega\xi\eta\zeta$, matricea coloană [10]:

$$(r_{n0}) = \sum_{k=0}^{n-1} [a_{k0}]^T (r_{k+1,k}), \tag{6}$$

unde s-a notat

$$[a_{k0}]^T = [a_{10}]^T [a_{21}]^T \dots [a_{k,k-1}]^T = \prod_{j=1}^{k} [a_{j,j-1}]^T. \tag{7}$$

Fie un punct arbitrar P_i al rigidului T_n, fixat prin coordonatele constante x_n^i, y_n^i, z_n^i, care formează matricea coloană

$$(r_n^i) = \begin{bmatrix} x_n^i \\ y_n^i \\ z_n^i \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Poziția relativă a punctului P_i, față de triedrul T_k, va fi dată de relația de recurență

$$(r_{k-1}^i) = (r_{k,k-1}) + [a_{k,k-1}]^T (r_k^i), \tag{9}$$

sau de forma sa echivalentă

$$[r_{k-1}^i] = [r_{k,k-1}] + [a_{k,k-1}]^T [r_k^i][a_{k,k-1}] \tag{10}$$

dacă se utilizează matricele pătratice antisimetrice

$$[r_{k,k-1}] = \begin{bmatrix} 0 & -z_{k,k-1} & y_{k,k-1} \\ z_{k,k-1} & 0 & -x_{k,k-1} \\ -y_{k,k-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} (k = 1, 2, \dots, n). \tag{11}$$

Același punct P_i poate fi reperat față de sistemul mobil T_p prin vectorul $\vec{r}_p^i$ ale cărui componente formează matricea

$$(r_p^i) = (r_{np}) + [a_{np}]^T (r_n^i), \tag{12}$$

unde

$$[a_{np}]^T = \prod_{j=p+1}^{n} [a_{j,j-1}]^T, \quad [a_{np}]^T = \prod_{j=1}^{n-p} [a_{n-j+1,n-j}]. \tag{13}$$

Dacă vom utiliza matricele (2), vom observa că relațiile (9) și (10) pot fi scrise sub forma echivalentă

$$(R_{k-1}^i) = (R_{k,k-1}) + [A_{k,k-1}]^T (R_k^i), \tag{14}$$

respectiv

$$[R_{k-1}^i] = [R_{k,k-1}] + [A_{k,k-1}]^T [R_k^i][A_{k,k-1}], \tag{15}$$

în care matricele

$$[A_{k,k-1}] = \left[\begin{array}{c|c} [a_{k,k-1}] & 0 \\ \hline 0 & [a_{k,k-1}] \end{array}\right], \quad [R_{k,k-1}] = \left[\begin{array}{c|c} [e] & 0 \\ \hline [r_{k,k-1}] & 0 \end{array}\right] \tag{16}$$

conţin matricele de trecere $[a_{k,k-1}]$, matricele antisimetrice $[r_{k,k-1}]$ şi matricea unitate

$$[e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Procedînd asemănător, relaţia (12) poate fi exprimată astfel

$$(R_p^i) = (R_{np}) + [A_{np}]^T (R_n^i), \tag{18}$$

unde

$$(R_{np}) = \left[\frac{(r_{np})}{0}\right], \quad (R_n^i) = \left[\frac{(r_n^i)}{0}\right],$$

$$[A_{np}]^T = \prod_{j=p+1} [A_{j,j-1}]^T, \quad [A_{np}] = \prod_{j=1}^{n-p} [A_{n-j+1,n-j}]. \tag{19}$$

Mişcarea relativă a solidului T_n, în raport cu reperul mobil T_p, este complet determinată de viteza $\vec{v}_{np}$ a originii C_n şi de viteza unghiulară $\vec{\omega}_{np}$. Proiecţiile acestor vectori pe axele triedrului $O_n x_n y_n z_n$ formează matricele coloane

$$(v_{np}) = \begin{bmatrix} v_x^{np} \\ v_y^{np} \\ v_z^{np} \end{bmatrix}, \quad (\omega_{np}) = \begin{bmatrix} \omega_x^{np} \\ \omega_x^{np} \\ \omega_z^{np} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Vectorii $\vec{v}_{np}$ şi $\vec{\omega}_{np}$ pot fi exprimaţi sub forma unui singur vector $\vec{V}_{np}$, numit *viteză dual relativă* a solidului T_n în punctul C_n, faţă de reperul T_p [6]. Vectorul dual $\vec{V}_{np}$ va fi reprezentat prin matricea coloană

$$(V_{np}) = \left[\frac{(v_{np})}{(\omega_{np})}\right] = \begin{bmatrix} v_x^{np} \\ v_y^{np} \\ v_z^{np} \\ \omega_x^{np} \\ \omega_y^{np} \\ \omega_z^{np} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Viteza relativă dual (V_p^i) a solidului T_n, în punctul P_i, este dată de formula

$$(V_{pi}) = (V_{np}) + [\Omega_{np}] (R_n^i), \tag{22}$$

în care $[\Omega_{np}]$ este matricea antisimetrică

$$[\Omega_{np}] = [A_{np}] [\dot{A}_{np}]^T = \left[\begin{array}{c|c} [\omega_{np}] & 0 \\ \hline 0 & [\omega_{np}] \end{array}\right], \tag{23}$$

construită cu ajutorul matricei antisimetrice a mișcării relative [1]:

$$[\omega_{np}] = [a_{np}]\,[\dot{a}_{np}]^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z^{np} & \omega_y^{np} \\ \omega_z^{np} & 0 & -\omega_x^{np} \\ -\omega_y^{np} & \omega_x^{np} & 0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Viteza dual㠠(V_{np}) și matricea antisimetrică $[\Omega_{np}]$ au următoarele expresii [5]:

$$(V_{np}) = \sum_{k=p+1}^{n-1} [A_{nk}]\left\{(V_{k,k-1}) + [\Omega_{k,k-1}]\right\}(R_{k+1,k}) + \\ + \sum_{q=k+1}^{n-1} [A_{qk}]^T (R_{p+1,q})\Bigg\}\Bigg\} + (V_{n,n-1}), \tag{25}$$

$$[\Omega_{np}] = \sum_{k=p+1}^{n-1} [A_{nk}]\,[\Omega_{k,k-1}]\,[A_{nk}]^T + [\Omega_{n,n-1}].$$

2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC DUAL

Cantitatea de mișcare $\vec{h}_n^0$ și momentul cinetic $\vec{k}_n^0$, față de punctul fix Ω, ale rigidului T_n de masă m_n, pot fi exprimate prin relațiile matriceale

$$(h_n^0) = [m_n]\,(\dot{r}_{n0}) \\ (k_n^0) = \sum_i [m_i]\,[r_0^i]\,(\dot{r}_0^i), \tag{26}$$

în care

$$(\dot{r}_0^i) = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_i \\ \dot{\eta}_i \\ \dot{\zeta}_i \end{bmatrix}, \quad [r_0^i] = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_i & \eta_i \\ \zeta_i & 0 & -\xi_i \\ -\eta_i & \xi_i & 0 \end{bmatrix}, \quad [m_n] = \sum_i [m_n^i] = m_n[e]. \tag{27}$$

Cei doi vectori, necesari caracterizării stării cinetice a rigidului, capătă o reprezentare unitară, dacă se definește vectorul *moment cinetic dual* al acelui rigid în raport cu punctul fix Ω [6]:

$$(K_{\Omega n}^0) = \begin{bmatrix} (h_n^0) \\ \hline (k_{\Omega n}^0) \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Matricea precedentă poate fi obținută cu ajutorul relației

$$(K_{\Omega n}^0) = \sum_i [M_n^i]\,[R_0^i]\,(R_0^i) \tag{29}$$

din cazul sistemelor de puncte materiale, unde

$$[M_{ni}] = \left[\begin{array}{c|c} [m_n^i] & 0 \\ \hline 0 & [m_n^i] \end{array}\right], \quad (R_0^i) = \begin{bmatrix} (r_0^i) \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \quad [R_0^i] = \left[\begin{array}{c|c} [e] & 0 \\ \hline [r_0^i] & 0 \end{array}\right]. \tag{30}$$

Ţinînd seama de relaţiile matriceale

$$(R_0^i) = (R_{n0}) + [A_{n0}]^T (R_n^i),$$

$$[R_0^i] = [\mathscr{R}_{n0}] + [A_{n0}]^T [R_n^i] [A_{n0}], \tag{31}$$

$$(\dot{R}_0^i) = (\dot{R}_{n0}) + [A_{n0}]^T [\Omega_{n0}] (R_{n0}^i),$$

în care apar matricele

$$[\mathscr{R}_n^i] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline [r_n^i] & 0 \end{array}\right], \quad [R_n^i] = \left[\begin{array}{c|c} [e] & 0 \\ \hline [r_n^i] & 0 \end{array}\right],$$

$$[\mathscr{R}_{n0}] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline [r_{n0}] & 0 \end{array}\right], \quad [R_{n0}] = \left[\begin{array}{c|c} [e] & 0 \\ \hline [r_{n0}] & 0 \end{array}\right], \tag{32}$$

şi efectuînd calculele, se obţine matricea componentelor momentului cinetic dual pe axele triedrului T_n :

$$[K_{\Omega n}] = [A_{n0}] (K_{\Omega n}^0) = [M_n][A_{n0}][R_{n0}] (\dot{R}_{n0}) + \sum_i [M_n^i][R_n^i][\Omega_{n0}] (R_n^i). \tag{33}$$

Observînd că

$$[R_{n0}] (\dot{R}_{n0}) = [R_{n0}] [A_{n0}]^T (V_{n0}),$$

$$[\Omega_{n0}] (R_n^i) = [\mathscr{R}_n^i] (V_{n0}), \tag{34}$$

relaţia (33) poate fi scrisă sub forma

$$(K_{\Omega n}) = [M_n] [A_{n0}] [\mathscr{R}_{n0}] [A_{n0}]^T (V_{n0}) + [\tilde{M}_n] (V_{n0}). \tag{35}$$

În această expresie

$$[M_n] = \left[\begin{array}{c|c} [m_n] & 0 \\ \hline 0 & [m_n] \end{array}\right] \tag{36}$$

este matricea masei, iar

$$[\tilde{M}_n] = \left[\begin{array}{c|c} [m_n] & 0 \\ \hline 0 & [J_n] \end{array}\right] \tag{37}$$

reprezintă matricea generală de inerţie, exprimată în funcţie de matricea tensorului de inerţie al rigidului [9], relativ la axele centrale $C_n x_n$, $C_n y_n$, $C_n z_n$:

$$[J_n] = \begin{bmatrix} J_x^n & -J_{xy}^n & -J_{xz}^n \\ -J_{yx}^n & J_y^n & -J_{yz}^n \\ -J_{zx}^n & -J_{zy}^n & J_z^n \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Ultimul termen al relației (35) reprezintă momentul cinetic dual al rigidului în raport cu centrul său de masă C_n.

Teorema momentului cinetic dual, aplicată solidului T_n, în raport cu originea reperului fix $\Omega\xi\eta\zeta$, se exprimă prin relația

$$(\dot{K}_{\Omega n}) + [\Omega_{n0}](K_{\Omega n}) = \sum_i [A_{n0}][R_0^i][A_{n0}]^T (F_n^i), \tag{39}$$

unde

$$(F_n^i) = \begin{bmatrix} (f_n^i) \\ \hline 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x^{ni} \\ f_y^{ni} \\ f_z^{ni} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

sînt matricele forțelor care acționează în punctele P_i.

Introducînd în (39) matricea (35) și efectînd calculele se obține teorema momentului cinetic dual față de centrul de masă al rigidului, adică

$$[\boldsymbol{M}_n](\dot{V}_{n0}) + [\Omega_{n0}][\tilde{\boldsymbol{M}}_n](V_{n0}) = \sum_i [R_n^i](F_n^i), \tag{41}$$

în care

$$\sum_i [R_n^i](F_n^i) = \begin{bmatrix} (f_n^i) \\ \hline [r_n^i](f_n^i) \end{bmatrix} \tag{42}$$

este matricea coloană a momentului rezultant dual, față de C_n, al forțelor $\vec{F}_n^i$.

Dacă se dezvoltă relația duală (41) rezultă teorema cantității de mișcare

$$[m_n]\{(\dot{v}_{n0}) + [\omega_{n0}](v_{n0})\} = \sum_i (f_n^i) \tag{43}$$

și, respectiv, teorema momentului cinetic față de centrul de greutate C_n al solidului [1]:

$$[J_n](\dot{\omega}_{n0}) + [\omega_{n0}][J_n](\omega_{n0}) = \sum_i [r_n^i](f_n^i), \tag{44}$$

unde se va înlocui [5]:

$$(\gamma_{n0}) = (\dot{v}_{n0}) + [\omega_{n0}](v_{n0}) = \sum_{k=1}^{n-1} [a_{nk}] \left\{ [a_{k,k-1}](\ddot{r}_{k,k-1}) + \right.$$

$$\left. + \{[\omega_{k,k-1}]^2 + [\dot{\omega}_{k,k-1}]\} \left\{ (r_{k+1,k}) + \sum_{q=k+1}^{n-1} [a_{qk}]^T (r_{q+1,q}) \right\} + \right.$$

$$+2[\omega_{k,k-1}]\Big\{(\dot{r}_{k+1,k})+\sum_{q=k+1}^{n-1}[a_{qk}]^T\Big\{(\dot{r}_{q+1,q})+[\omega_{q,q-1}]\Big\{(r_{q+1,q})+$$

$$+\sum_{s=q+1}^{n-1}[a_{sq}]^T(r_{s+1,s})\Big\}\Big\}\Big\}\Big\}+[a_{n,n-1}](\ddot{r}_{n,n-1}), \tag{45}$$

$$[\omega_{n0}]=\sum_{k=1}^{n-1}[a_{nk}][\omega_{k,k-1}][a_{nk}]^T+[\omega_{n,n-1}],$$

$$(\dot{\omega}_{n0})=\sum_{k=1}^{n-1}[a_{nk}][\omega_{k,k-1}]\sum_{q=k+1}^{n}[a_{qk}]^T(\omega_{q,q-1})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}[a_{nk}](\dot{\omega}_{k,k-1})+(\dot{\omega}_{n,n-1}).$$

3. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

Raportînd mişcarea sistemului la reperul fix $\Omega\xi\eta\zeta$, energia cinetică a solidului T_n este dată de relaţia

$$E_n=\frac{1}{2}\sum_i(\dot{R}_n^i)[M_n^i](\dot{R}_0^i), \tag{46}$$

stabilită pentru sisteme de puncte materiale. Introducînd viteza

$$(\dot{R}_0^i)=(\dot{R}_{n0})+[A_{n0}]^T[\mathscr{R}_n^i]^T(V_{n0}), \tag{47}$$

rezultă expresia

$$E_n=\frac{1}{2}(\dot{R}_{n0})[M_n]^T(\dot{R}_{n0})+\frac{1}{2}(V_{n0})^T\sum_i[M_n^i][\mathscr{R}_n^i][\mathscr{R}_n^i]^T(V_{n0}). \tag{48}$$

Dacă se dezvoltă calculele, energia cinetică E_n poate fi exprimată sub forma [3]

$$E=\frac{1}{2}(V_{n0})[\tilde{\mathbf{M}}_n](V_{n0}), \tag{49}$$

în care componentele vitezei duale absolute,

$$(V_{n0})=\left[\frac{(v_{n0})}{(\omega_{n0})}\right], \tag{50}$$

sînt următoarele :

$$(v_{n0})=\sum_{k=1}^{n-1}[a_{nk}]\Big\{[a_{k,k-1}](\dot{r}_{k,k-1})+[\omega_{k,k-1}]\Big\{(\dot{r}_{k+1,k})+$$

$$+\sum_{q=k+1}^{n-1}[a_{qk}]^T(r_{q+1,q})\Big\}\Big\}+[a_{n,n-1}](\dot{r}_{n,n-1}), \tag{51}$$

$$(\omega_{n0})=\sum_{k=1}^{n-1}[a_{nk}](\omega_{k,k-1})+(\omega_{n,n-1}).$$

Derivînd în raport cu timpul expresia (49) a energiei cinetice, se obține teorema energiei cinetice sub forma

$$(V_{*0})^T [\tilde{M}_*] (\dot{V}_{*0}) = (V_{*0})^T \sum_i [R_*^i] (F_*^i), \tag{52}$$

echivalentă cu relația

$$(v_{*0})^T [m_*] (\dot{v}_{*0}) + [\omega_{*0}]^T [J_*] (\dot{\omega}_{*0}) =$$

$$= (v_{*0})^T \sum_i (f_*^i) + (\omega_{*0})^T \sum_i [r_*^i] (f_*^i). \tag{53}$$

Vom observa că ecuația (52) poate fi obținută din teorema momentului cinetic dual față de centrul de masă (41), dacă vom înmulți la stînga această relație cu matricea transpusă $(V_{*0})^T$.

4. METODA DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Să presupunem, mai departe, că cele n solide T_σ sînt supuse unor legături ideale și că au $h < 6n$ grade de libertate. Considerînd cunoscute forțele exterioare, se pot stabili niște relații care să permită studiul mișcării sistemului material, dacă condițiile de echilibru dinamic vor fi exprimate prin metoda deplasărilor virtuale [8].

Vom face ipoteza că un solid oarecare T_σ este rezemat în punctele B_σ^i pe curbele $\Gamma_{\sigma-1}^i$ și în punctele B_σ^i pe suprafețele $\Sigma_{\sigma-1}^i$. Aceste legături aparțin rigidului $T_{\sigma-1}$ solidar cu triedrul $C_{\sigma-1}x_{\sigma-1}y_{\sigma-1}z_{\sigma-1}$.

Condiția de echilibru dinamic a sistemului de corpuri este ca puterea virtuală a tuturor forțelor exterioare $\vec{F}_\sigma^i$ $(i = 1, 2, \ldots, t_\sigma)$, aplicate în punctele A_σ^i, și a forțelor de inerție, corespunzătoare unei deplasări virtuale generale a sistemului, compatibilă cu legăturile exterioare și interioare, să fie egală cu zero. Această condiție poate fi exprimată sub forma

$$\sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{t_\sigma} (\hat{V}_{\sigma 0})^T [R_\sigma^i] (F_\sigma^i) + \sum_{\sigma=1}^{n} (V_{\sigma 0})^T [\mathrm{M}_{\sigma 0}] = 0, \tag{54}$$

în care momentul rezultant dual, în raport cu C_σ, al forțelor de inerție aplicate rigidului T_σ are expresia

$$(\mathcal{M}_{\sigma 0}) = -[\tilde{M}_\sigma] (\dot{V}_{\sigma 0}) - [\Omega_{\sigma 0}] [\tilde{M}_\sigma] (V_{\sigma 0}). \tag{55}$$

Relația (54) poate fi scrisă sub forma următoare:

$$\sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{t_\sigma} \{(\hat{v}_{\sigma 0})^T (f_\sigma^i) + (\hat{\omega}_{\sigma 0})^T [r_\sigma^i] (f_\sigma^i)\} -$$

$$- \sum_{\sigma=1}^{n} \{(\hat{v}_{\sigma 0})^T [m_\sigma] (\gamma_{\sigma 0}) + (\hat{\omega}_{\sigma 0})^T \{[J_\sigma] (\dot{\omega}_{\sigma 0}) +$$

$$+ [\omega_{\sigma 0}] [J_\sigma] (\omega_{\sigma 0})\}\}. \tag{56}$$

Viteza virtuală absolută $(\hat{v}_{\sigma 0})$ a originii C_σ a triedrului $C_\sigma x_\sigma y_\sigma z_\sigma$ şi viteza unghiulară virtuală absolută $(\hat{\omega}_{\sigma 0})$ a solidului T_σ pot fi exprimate în funcţie de vitezele virtuale relative $(\hat{v}_{k,k-1})$ ale originilor C_k, vitezele unghiulare virtuale $(\hat{\omega}_{k,k-1})$ şi de matricele antisimetrice $[\hat{\omega}_{k,k-1}]$ ale mişcărilor relative.

$$(\hat{v}_{\sigma 0}) = \sum_{k=1}^{\sigma} [a_{\sigma,k-1}]\,(\hat{v}_{k,k-1}) + \sum_{k=1}^{\sigma-1} [a_{\sigma k}]\,[\hat{\omega}_{k,k-1}]\left\{(r_{k+1,k}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=k+1}^{\sigma-1} [a_{qk}]^T (r_{q+1,q})\right\}, \tag{57}$$

$$(\hat{\omega}_{\sigma 0}) = \sum_{k=1}^{\sigma-1} [a_{\sigma k}]\,(\hat{\omega}_{k,k-1}) + (\hat{\omega}_{\sigma,\sigma-1}),$$

unde matricele $[a_{\sigma,k-1}]$, $[a_{\sigma k}]$, $[a_{qk}]^T$ au expresiile

$$[a_{\sigma,k-1}] = \prod_{u=1}^{\sigma-k+1} [a_{\sigma-u+1,\sigma-u}],$$

$$[a_{\sigma k}] = \prod_{u=1}^{\sigma-k} [a_{\sigma-u+1,\sigma-u}], \tag{58}$$

$$[a_{qk}]^T = \prod_{u=k+1}^{q} [a_{u,u-1}]^T.$$

Să notăm cu

$$b^j_{\sigma-1}(x_{\sigma-1}, y_{\sigma-1}, z_{\sigma-1}) = 0, \tag{59}$$

$$c^j_{\sigma-1}(x_{\sigma-1}, y_{\sigma-1}, z_{\sigma-1}) = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, \lambda_\sigma; \quad \lambda_\sigma \leqslant E\left(\frac{\mu_\sigma}{2}\right)$$

ecuaţiile curbelor $\Gamma^i_{\sigma-1}$ şi cu

$$d^l_{\sigma-1}(x_{\sigma-1}, y_{\sigma-1}, z_{\sigma-1}) = 0, \quad (l = 1+2\lambda_\sigma, \ldots, \mu_\sigma; \quad \mu_\sigma < 6) \tag{60}$$

ecuaţiile suprafeţelor $\Sigma^l_{\sigma-1}$ în raport cu reperul $T_{\sigma-1}$. Condiţiile cinematice de legătură, la care sînt supuse vitezele virtuale sau reale ale punctelor de contact B^j_σ şi B^l_σ se exprimă prin relaţii de forma

$$(\hat{V}_{\sigma,\sigma-1})^T [R^j_\sigma]\,[A_{\sigma,\sigma-1}]\,(G^j_{b_{\sigma-1}}) = 0,$$

$$(V_{\sigma,\sigma-1})^T [R^j_\sigma]\,[A_{\sigma,\sigma-1}](G^j_{c_{\sigma-1}}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \lambda_\sigma), \tag{61}$$

$$(V_{\sigma,\sigma-1})[R^l_\sigma][A_{\sigma,\sigma-1}]\,(G^l_{\sigma-1}) = 0 \quad (l = 1 + 2\lambda_\sigma, \ldots, \mu_s)\ (\sigma = 1, 2, \ldots, n),$$

în care

$$(G^j_{b_{\sigma-1}}) = \begin{bmatrix} (\nabla b^j_{\sigma-1}) \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \quad (G^j_{c_{\sigma-1}}) = \begin{bmatrix} (\nabla c^j{}_{\sigma-1}) \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \quad (G^l_{\sigma-1}) = \begin{bmatrix} (\Delta d^l_{\sigma-1}) \\ \hline 0 \end{bmatrix}. \tag{62}$$

Relația (55) împreună cu condițiile de compatibilitate (61), scrise pentru vitezele reale și virtuale, furnizează ecuațiile de mișcare ale sistemului de solide.

Primit la redacție în 18 februarie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. STAICU, *Introducere în mecanica teoretică*, Ed. Științifică și enciclopedică, București, 1983.
2. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, Ed. Tehnică, București, 1978 (vol. I), 1980 (vol. II).
3. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
4. C. IACOB, *Mecanică teoretică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980.
5. ȘT. STAICU, *Expresii matriceale pentru viteze și accelerații în mișcarea compusă a sistemelor*, în „St. Cerc. Mec. Apl.", 44, 3, (1985).
6. N. PANDREA, *Studiul general al ciocnirilor cu ajutorul vectorilor duali*, în „St. Cerc. Mec. Appl.", 36, 6, (1977).
7. G. E. MASE, *Theory and problems of continuum mechanics*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1970.
8. J. WITTENBURG, *Dynamics of systems of rigid bodies*, Stuttgart, 1977, Mir, Moskva, 1980.
9. C. IACOB, *Sur une extension des théorèmes de Koenig et Vâlcovici*, în „Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 21, 3 (1976).
10. ȘT. STAICU, *Relații matriceale în cinematica și dinamica mecanismelor plane*, în „Bulet. Instit. Politehnic București, seria Construcții de mașini, 1984—1985.
11. F. M. DIMENTBERG, *Teoria vintov i ee prilojenia*, Ed. Nauka, Moskva, 1978.

CALCULUL LA FLUAJ AL SISTEMELOR DE CONDUCTE. II

de N. GRIGORE, AL. ANGHEL, N. POSEA şi I. DUMITRU
Institutul de Petrol şi Gaze Ploieşti

Se prezintă programul pentru calculul la fluaj al sistemelor de conducte (denumit CFSC), elaborat pe baza algoritmului autorilor [8]. Algoritmul şi în consecinţă programul pentru calculator se poate utiliza pentru orice sistem de conducte cu porţiuni drepte şi curbe circulare şi pentru orice lege de fluaj.
Datele de ieşire ale programului cuprind tensiunile şi deplasările în orice punct al conductei, ceea ce permite proiectantului cunoaşterea comportării reale a sistemului de conducte şi deci aprecierea corectă a duratei de funcţionare. În consecinţă, cercetătorii şi proiectanţii de conducte calde pot utiliza cu multă eficienţă algoritmul şi programul corespunzător.

1. BAZELE ALGORITMULUI PENTRU CALCULUL LA FLUAJ AL CONDUCTELOR

Algoritmul pentru calculul la fluaj al sistemelor de conducte este dezvoltat pe baza metodei generale a elementelor finite [8, 9, 10].

Sistemul de conducte se discretizează în elemente de tip bară dreaptă şi bară curbă circulară.

Pentru fiecare element finit, sistemul de ecuaţii scris sub formă matriceală, are forma:

$$\underset{\sim}{\bar{K}}^{(e)}\underset{\sim}{\bar{Z}}^{(e)} = \underset{\sim}{\bar{Q}}^{(e)} + \underset{\sim}{\bar{F}}^{f} + \underset{\sim}{\bar{F}}^{T}, \tag{1.1}$$

unde

$$\underset{\sim}{\bar{K}}^{(e)} = \int_{(V)} B^{t}\underset{\sim}{E}\,B\,\mathrm{d}V \tag{1.2}$$

reprezintă matricea de rigiditate a elementului finit; $\underset{\sim}{\bar{Z}}^{(e)}$ — vectorul deplasărilor capetelor elementului finit;

$$\underset{\sim}{\bar{F}}^{f} = \int_{(V)} \underset{\sim}{B}^{t}\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^{c}\,\mathrm{d}V \tag{1.3}$$

vectorul forţelor nodale din fluaj;

$$\underset{\sim}{\bar{F}}^{T} = \int_{(V)} \underset{\sim}{B}^{t}\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\varepsilon}^{T}\,\mathrm{d}V \tag{1.4}$$

vectorul forţelor nodale din temperatură.

În relaţiile de mai sus, cu $\underset{\sim}{B}$ s-a notat matricea dreptunghiulară (2×12) de legătură dintre deformaţiile specifice $\underset{\sim}{\varepsilon}\,(x, y, z)$ ale elementului finit şi vectorul $\underset{\sim}{\bar{Z}}^{(e)}$.

Această matrice a fost stabilită pentru elemente drepte şi elemente curbe circulare [8].

Legea de fluaj cea mai utilizată, pentru zona fluajului stabilizat, în cazul conductelor are forma

$$\varepsilon_e^C = K\sigma_e^n t, \tag{1.5}$$

în care

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \tag{1.6}$$

reprezintă tensiunea echivalentă.

Variaţia incrementală a intensităţii deformaţiilor ($\Delta\varepsilon_e^C$) pentru o variaţie incrementală a timpului (Δt), considerînd intensitatea tensiunilor constantă în intervalul (Δt), conduce la o relaţie de forma

$$\Delta\varepsilon_e^C = K\sigma_e^n \Delta t. \tag{1.7}$$

Variaţia componentelor vectorului deformaţiilor de fluaj se determină cu expresia:

$$\underset{\sim}{\Delta\varepsilon}^C = \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_x^C \\ \\ \Delta\gamma_{xy}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta\varepsilon_e^C}{\sigma_e}\sigma_x \\ \\ 3\cdot\dfrac{\Delta\varepsilon_e^C}{\sigma_e}\tau_{xy} \end{bmatrix}. \tag{1.8}$$

Sistemul de ecuaţii, care exprimă echilibrul fiecărui nod al structurii, are forma

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{Z} = \underset{\sim}{R}, \tag{1.9}$$

în care $\underset{\sim}{Z}$ reprezintă vectorul necunoscutelor; $\underset{\sim}{K}$ — matricea de rigiditate a întregii structuri; $\underset{\sim}{R}$ — vectorul forţelor nodale care cuprinde inclusiv termeni corespunzători fluajului.

Prin introducerea componentelor deformaţiilor de fluaj date de (1.8) în expresia (1.3) se obţine variaţia forţelor de fluaj $\Delta\underset{\sim}{\bar{F}}^f$, în nodurile elementelor finite, iar pentru ansamblul structurii făcînd sumările la noduri în sistemul general de axe, rezultă vectorul forţelor nodale $\Delta\underset{\sim}{R}^f$ datorite fluajului. Aceste componente ($\Delta\underset{\sim}{R}^f$) se itroduc în sistemul (1.9) care ia forma:

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\Delta Z} = \underset{\sim}{\Delta R}^f. \tag{1.10}$$

Din rezolvarea acestui sistem rezultă variaţia deplasărilor nodale $\underset{\sim}{\Delta Z}$. Variaţia deformaţiilor totale rezultă din expresia:

$$\underset{\sim}{\Delta\varepsilon}\,(x, y, z) = \underset{\sim}{B}\,\underset{\sim}{\Delta\bar{Z}}^{(e)}. \tag{1.11}$$

Variaţia tensiunilor se determina pe baza deformaţiilor totale $\underset{\sim}{\Delta\varepsilon}\,(x, y, z)$ şi a variaţiei deformaţiilor de fluaj $\underset{\sim}{\Delta\varepsilon}^C$, cu relaţia:

$$\underset{\sim}{\Delta\sigma} = \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\Delta\varepsilon}(x, y, z) - \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\Delta\varepsilon}^C\,(x, y, z) \tag{1.12}$$

La tensiunile calculate din încărcări în domeniul elastic se aduna variația tensiunilor ($\Delta\underset{\sim}{\sigma}$) și se obțin astfel tensiunile rezultante $\underset{\sim}{\sigma}$ după primul interval elementar de timp.

Tensiunile rezultante $\underset{\sim}{\sigma}$ se consideră ca stare inițială pentru cel de-al doilea increment de timp (Δt), procedîndu-se apoi în mod identic cum s-a arătat mai sus.

Procesul se repetă pînă cînd tensiunile în structură se stabilizează.

2. PROGRAMUL PENTRU CALCULUL LA FLUAJ AL SISTEMELOR DE CONDUCTE

Programul „Calculul la fluaj al sistemelor de conducte" (prescurtat CF SC), cuprinde etapele:

— etapa 1: Calculul static în domeniul elastic al sistemelor de conducte cu ramificații multiple (programul CSDC);

— etapa 2: Calculul la fluaj propriu-zis (programul FLUAJ).

Programul CSDC este prezentat în lucrarea [7].

Programul „Calculul la fluaj al sistemelor de conducte" realizează:

1. Împărțirea fiecărui element finit drept (fig. 2.1) sau curb (fig. 2.2), în subelemente avînd forma unor „felii", astfel:

— în secțiunea transversală $2 \times 8 = 16$ sectoare (două pe grosime, $K = 1{,}2$, și opt pentru unghiuri φ din 45 în 45°, în sens trigonometric $I = 1, \ldots, 8$);

— în lungul elementului, segmente de lungimi diferențiate; la capetele elementului (pe cîte o treime din lungime), divizarea se face într-un număr de 20 subdiviziuni (notate în figura 2.1 și macheta 1 cu simbolul N.DES), iar pe treimea mijlocie în 10 subdiviziuni (care se notează simbolic cu N.RAR).

2. Calculul numeric al matricelor $\underset{\sim}{B}$ pentru coordonatele centrelor subdiviziunilor fiecărui element drept sau curb.

3. Calculul componentelor tensiunilor $\overline{\underset{\sim}{\sigma}}$ pentru centrele subdiviziunilor, folosind vectorul deplasărilor $\overline{\underset{\sim}{Z}}^{(e)}$ în sistem local, determinate cu programul CSDC.

4. Calculul variațiilor componentelor deformațiilor specifice din fluaj ($\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^{(C)}$) în centrele subdiviziunilor, pentru primul increment Δt (se precizează că în intervalul de timp Δt tensiunile se consideră constante).

5. Pentru fiecare element finit, se determină forțele nodale din fluaj ($\Delta\overline{\underset{\sim}{F}}^{I}$), utilizînd relația (1.3). Integrala pe întreg volumul elementului finit se efectuează numeric ca o sumă de intervale pentru subdiviziunile în care s-a împărțit elementul fnit.

La calculul integralei pe fiecare subdiviziune, se consideră componentele vectorului $\Delta\underset{\sim}{\varepsilon}^{C}_{(felie)}$ constante.

Se trece $\Delta\overline{\underset{\sim}{F}}^{I}$ în sistemul general de axe pentru fiecare element folosind matricea de rotație a elementului.

6. Pentru fiecare nod se face o sumare (cu semnul minus) a forțelor $\Delta\underset{\sim}{F}^{I}$ ale capetelor barelor care concură la nodul respectiv, obținîndu-se pentru fiecare nod cîte un vector $\Delta\underset{\sim}{R}^{I}$ cu șase componente. Se formează un vector care conține termenul liber al sistemului (1.10) aranjat în ordinea componentelor nenule ale deplasărilor nodurilor.

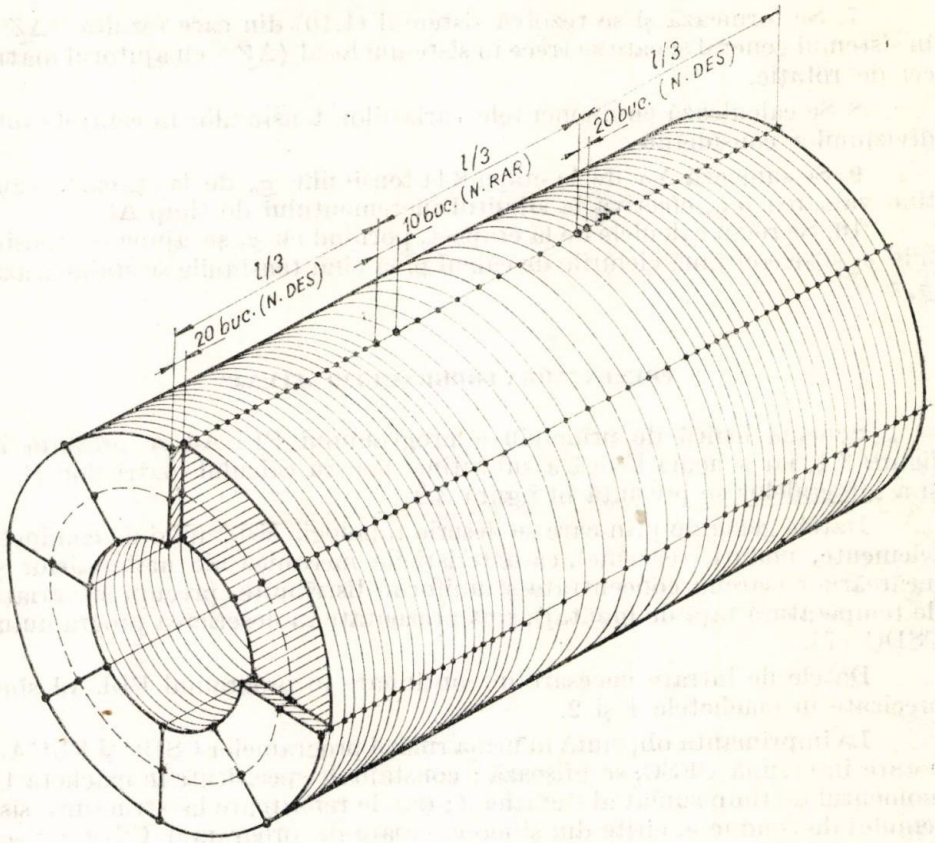

l/3
20 buc. (N. DES)
l/3
10 buc. (N. RAR)
l/3
20 buc. (N. DES)

Fig. 2.1

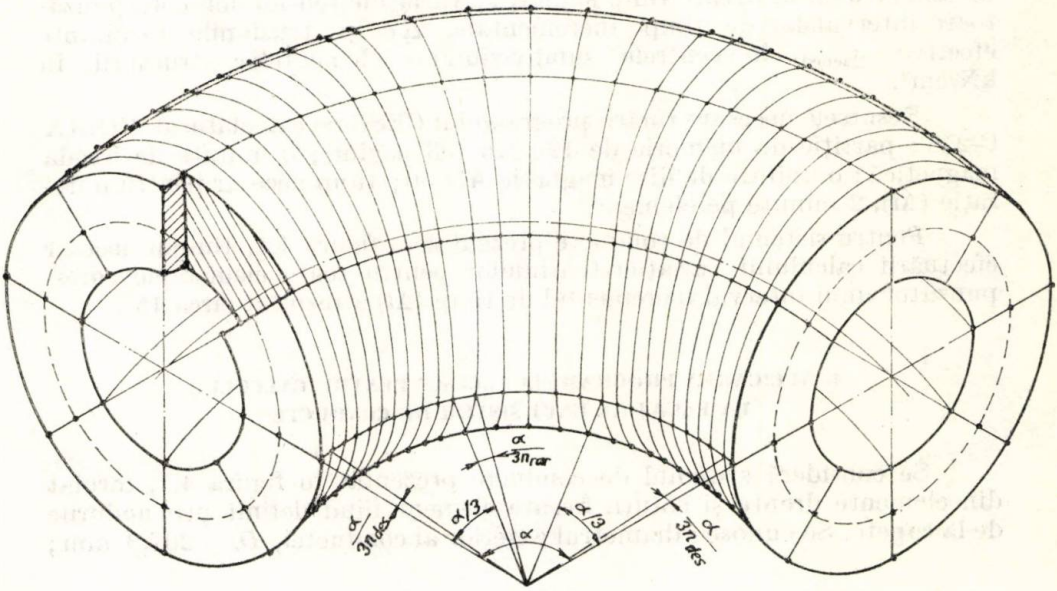

α/3n rar
α/3n des
α/3
α
α/3
α/3n des

Fig. 2.2

7. Se formează și se rezolvă sistemul (1.10) din care rezultă ($\Delta \underset{\sim}{Z}^{(e)}$) în sistemul general și care se trece în sistemul local ($\Delta \underset{\sim}{\bar{Z}}^{(e)}$ cu ajutorul matricei de rotație.

8 Se calculează componentele variațiilor tensiunilor în centrele subdiviziunilor considerate.

9. Se sumează $\Delta \underset{\sim}{\sigma}$ de la etapa 8 la tensiunile $\underset{\sim}{\sigma}_0$ de la etapa 1, rezultînd valoarea $\underset{\sim}{\sigma}_{(1)}$, efectivă la sfîrșitul incrementului de timp Δt.

10. Se reiau calculele de la etapa 4, pornind cu $\underset{\sim}{\sigma}_1$ se ajunge la tensiunile $\underset{\sim}{\sigma}_2$ și se continuă ciclurile de calcul pînă cînd tensiunile se stabilizează, $\underset{\sim}{\sigma}_n \cong \underset{\sim}{\sigma}_{n-1}$.

3. PREZENTAREA PROGRAMULUI „FLUAJ"

Schema logică de principiu a programului FLUAJ se prezintă în figura 3.1, iar schema logică a subrutinei pentru calculul matricilor $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{\sigma}$ și a integralelor se prezintă în figura 3.2.

Datele generale prin care se descrie topologia sistemului de conducte (elemente, noduri, reazeme), caracteristicile mecanice ale materialelor și încărcărilor (sarcini concentrate și uniform distribuite, precum și variații de temperatură față de montaj), sînt prezentate în descrierea programului CSDC [7].

Datele de intrare necesare în continuare în programul FLUAJ sînt precizate în machetele 1 și 2.

La imprimanta obținută în urma rulării programelor CSDC și FLUAJ notate împreună CFSC, se afișează : constantele specificate în macheta 1 ; momentul de timp sumat al iterației, t ; datele referitoare la structura sistemului de conducte, citite din șifierele create de programul CSDC ; vectorii deplasărilor capetelor elementelor, în sistemul de axe local și sistemul de axe general la fiecare timp sumat, t ; variațiile tensiunilor corespunzătoare intervalelor de timp incrementale, $\Delta \underset{\sim}{\sigma}$ și tensiunile rezultante efective $\underset{\sim}{\sigma}_{\text{actual}}$, în centrele subdiviziunilor elementelor structurii, în kN/cm^2.

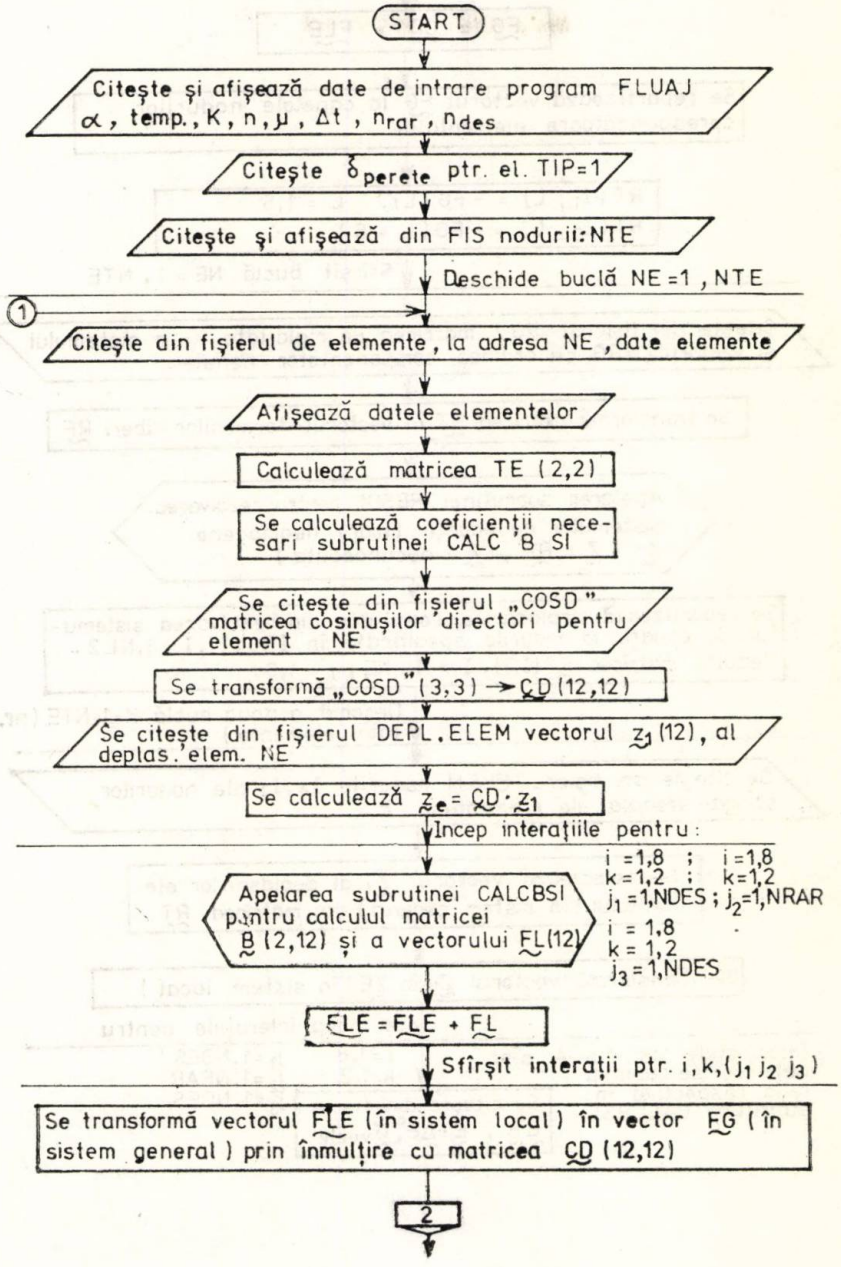
Resursele necesare rulării programului CFSC pe calculatorul FELIX C-256 : partiție de memorie de 126 Ko (63 pagini) ; o unitate de bandă magnetică ; o unitate de disc magnetic AD 50 ; timp necesar pentru o iterație (Δt), 2 minute pe element.

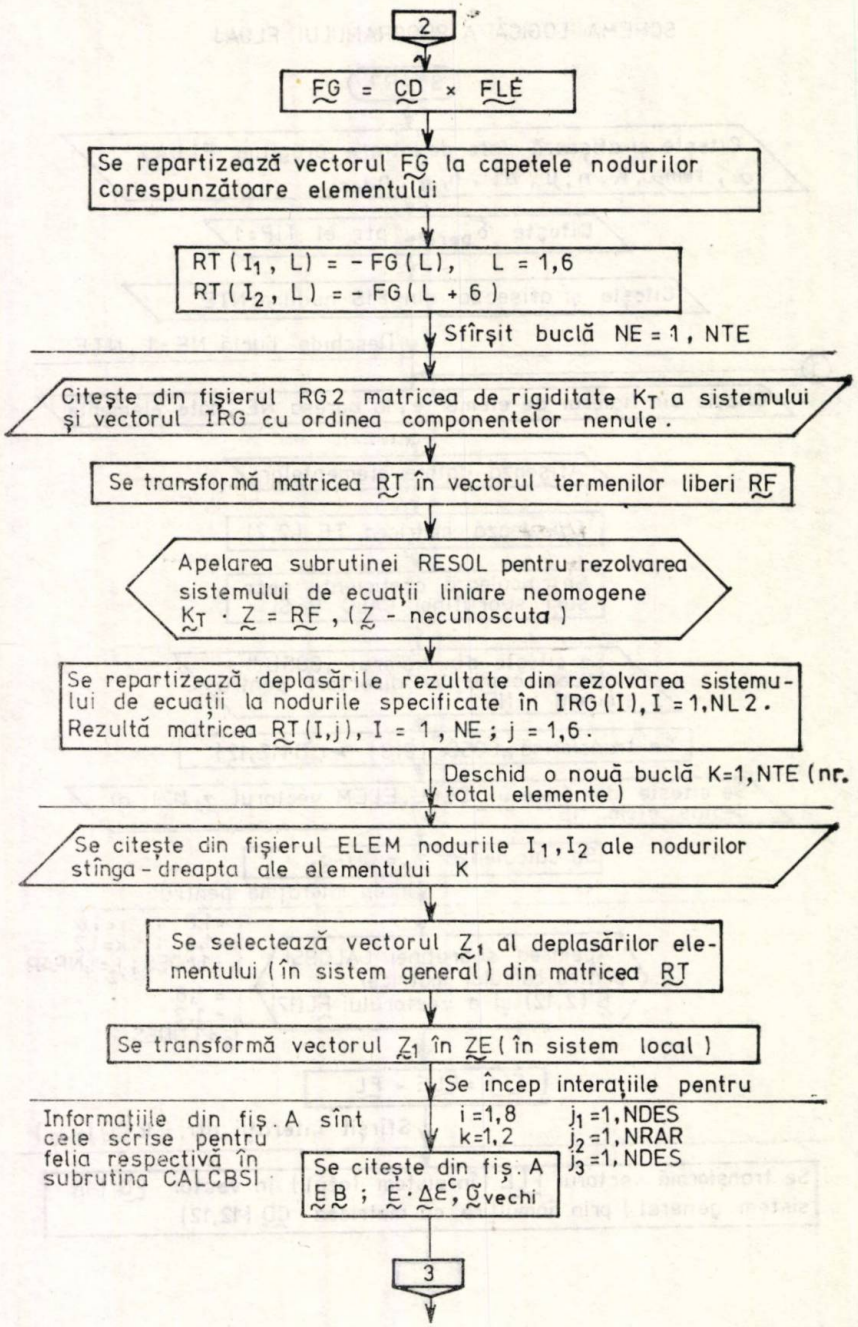
Pentru sistemul de conducte prezentat în figura 4.1, timpul necesar efectuării calculului variației tensiunilor pentru toate elementele corespunzător unui interval incremental de timp (Δt) a rezultat circa 15′.

4. APLICAREA PROGRAMULUI „CFSC" PENTRU CALCULUL LA FLUAJ AL UNUI SISTEM DE CONDUCTE

Se consideră sistemul de conducte prezentat în figura 4.1, format din elemente drepte și coturi, fiecare element fiind definit prin nodurile de la capete. Se cunosc : diametrul exterior al conductei, $D_e = 207{,}9$ mm ;

SCHEMA LOGICĂ A PROGRAMULUI FLUAJ




2
FG = CD × FLE
Se repartizează vectorul FG la capetele nodurilor corespunzătoare elementului
RT(I1, L) = - FG(L), L = 1,6
RT(I2, L) = - FG(L + 6)
Sfîrşit buclă NE = 1, NTE
Citeşte din fişierul RG2 matricea de rigiditate KT a sistemului şi vectorul IRG cu ordinea componentelor nenule.
Se transformă matricea RT în vectorul termenilor liberi RF
Apelarea subrutinei RESOL pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare neomogene KT · Z = RF, (Z - necunoscuta)
Se repartizează deplasările rezultate din rezolvarea sistemului de ecuaţii la nodurile specificate în IRG(I), I = 1,NL2. Rezultă matricea RT(I,j), I = 1, NE; j = 1,6.
Deschid o nouă buclă K=1,NTE (nr. total elemente)
Se citeşte din fişierul ELEM nodurile I1, I2 ale nodurilor stînga - dreapta ale elementului K
Se selectează vectorul Z1 al deplasărilor elementului (în sistem general) din matricea RT
Se transformă vectorul Z1 în ZE (în sistem local)
Se încep interaţiile pentru
i = 1,8
k = 1,2
j1 = 1, NDES
j2 = 1, NRAR
j3 = 1, NDES
Informaţiile din fiş. A sînt cele scrise pentru felia respectivă în subrutina CALCBSI
Se citeşte din fiş. A EB ; E · Δε^c, σ vechi
3

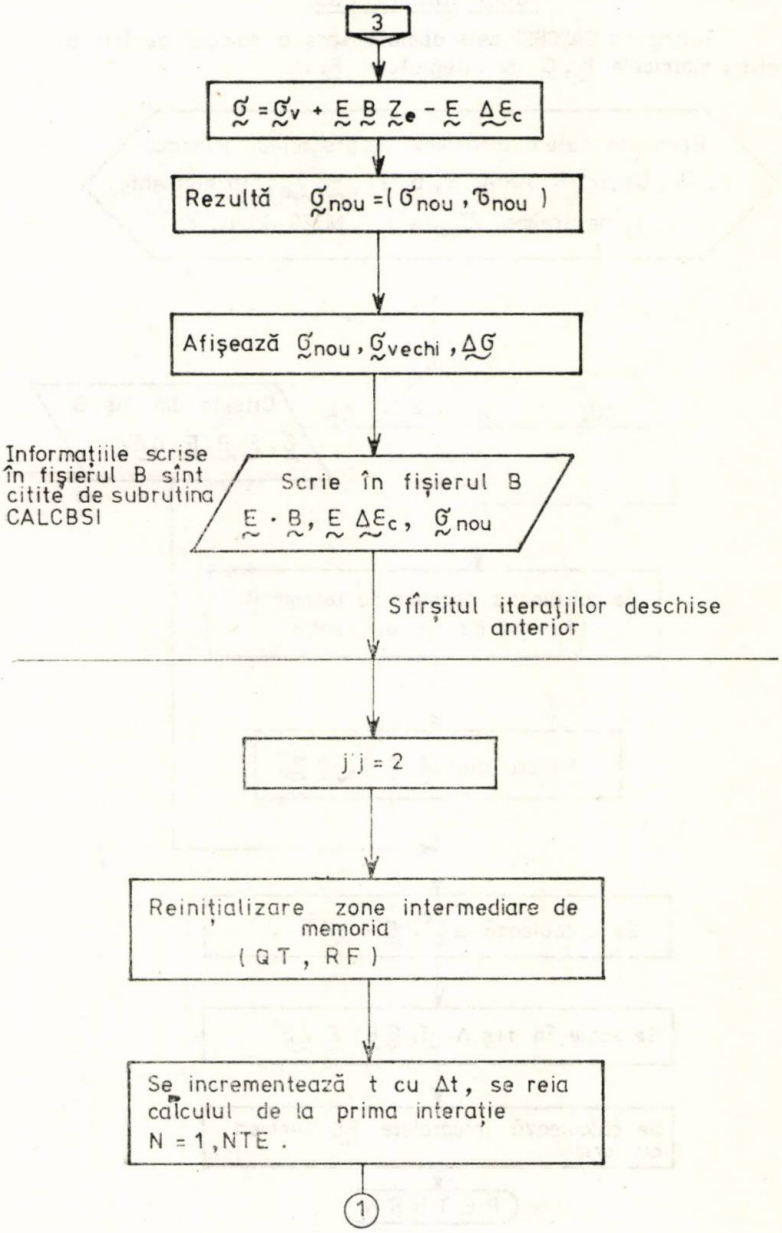

3
σ = σv + E B Ze - E Δεc
Rezultă σnou = (σnou , τnou)
Afişează σnou , σvechi , Δσ
Informaţiile scrise în fişierul B sînt citite de subrutina CALCBSI
Scrie în fişierul B
E · B, E Δεc, σnou
Sfîrşitul iteraţiilor deschise anterior
j j = 2
Reiniţializare zone intermediare de memoria
(Q T , R F)
Se incrementează t cu Δt, se reia calculul de la prima interaţie
N = 1, NTE .
1

Fig. 3.1

SUBRUTINA CALCBSI

Subrutina CALCBSI este apelată spre a calcula pentru o felie, matricele $\underset{\sim}{B}$, $\underset{\sim}{\sigma}$ și integralele $\underset{\sim}{FL}$.

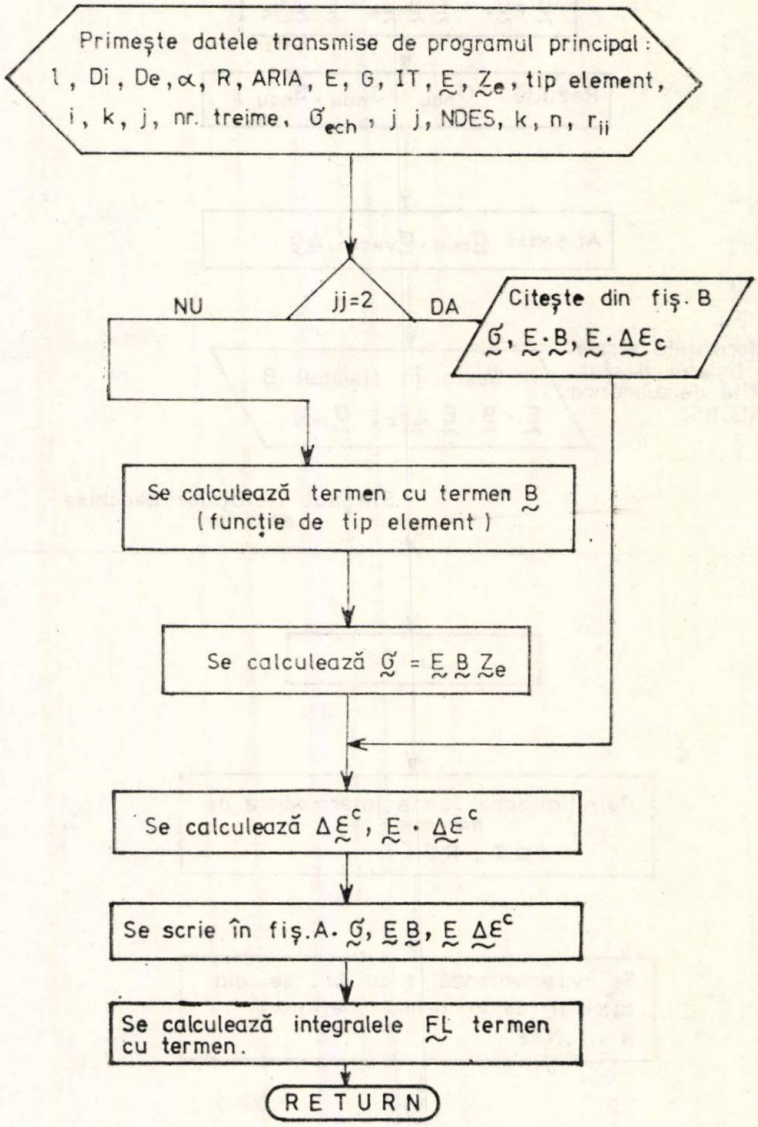


Fig. 3.2

Macheta nr.1 din programul FLUAJ

Coeficientul de dilatare termică (CALFAT) [cm/cm°C]	Temperatura (TEMP) [°C]	Coeficientul K din legea de fluaj: $\varepsilon_f = K\sigma_e^n t$ $\left[\frac{(cm^2/daN)^n}{ora}\right]$	Coeficientul n din legea de fluaj (XN)	Coeficientul lui Poisson μ (XMIU)	Incrementul de timp Δt (DT) [ore]	NRAR	NDES	
E12.6	F7.1	E12.6	F6.3	F6.3	F7.2	I2	I2	
t. E±	,	t. E±	,	,	,			
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	13 14 15 16 17 18 19	20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31	32 33 34 35 36 37 38	39 40 41 42 43 44	45 46 47 48 49 50	51 52	53 54	55 56 57 58 80

Obs. – Dacă N. RAR = 0 , programul ia automat NRAR = 10
– Dacă N. DES = 0 , programul ia automat NDES = 20

Macheta nr.2 din programul FLUAJ

Grosimea elementului 1	Grosimea elementului 2	Grosimea elementului 3	Grosimea elementului 4	Grosimea elementului 5	Grosimea elementului 6	Grosimea elementului 7	Grosimea elementului 8
F10.0	F10.1	F10.0	F10.0	F10.0	F10.0	F10.0	F10.0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	21 22 23 24 25 26 27 28 29 30	31 32 33 34 35 36 37 38 39 40	41 42 43 44 45 46 47 48 49 50	51 52 53 54 55 56 57 58 59 60	61 62 63 64 65 66 67 68 69 70	71 72 73 74 75 76 77 78 79 80

Obs. – Dacă sistemul are mai mulți de opt elemente, se vor completa în continuare, în mod analog, noi cartele.
– Punctul zecimal trebuie să apară obligatoriu în cele zece caractere.

grosimea peretelui, $\delta = 7{,}1$ mm; razele coturilor (conform tabelului 4.1); temperatura de funcţionare : 700°C; greutatea unui cm din lungimea materialului conductei este de $0{,}351 \cdot 10^{-2}$ kN/cm.

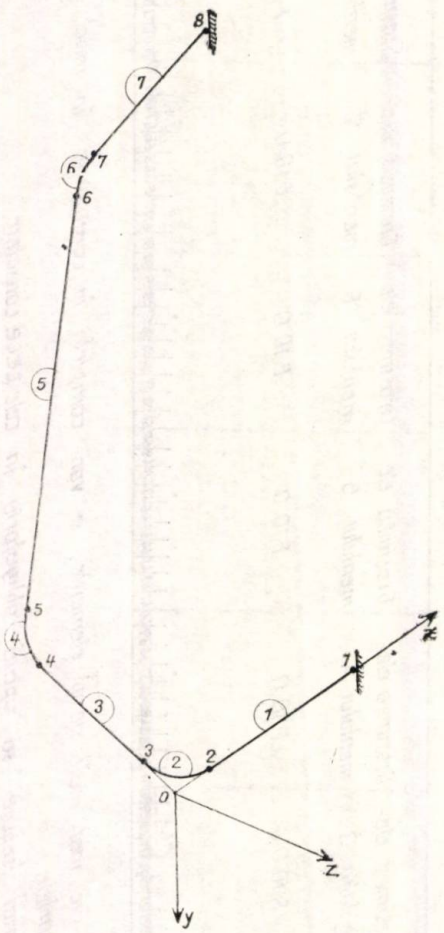


Fig. 4.1

În tabelul 4.1 s-au precizat datele elementelor conductei din figura 4.1.

Aceste date, cît şi modul lor de stabilire, sînt :

— momentele de inerţie axiale şi de torsiune ale secţiunii transversale :

$$I_z = I_y = \frac{\pi D_e^4}{64}\left[\left(1 - \left(\frac{D_i}{D_e}\right)^4\right)\right] = 2261{,}98 \text{ cm}^4,$$

$$I_t = 2I_z = 4523{,}96 \text{ cm}^4;$$

— aria secţiunii transversale a conductei :

$$A = \frac{\pi}{4}(D_e^2 - D_i^2) = 44{,}76 \text{ cm}^4;$$

— raza mediană a secţiunii transversale a coturilor

$$r_m = 10{,}04 \text{ cm}.$$

Coonrdonatele x, y, z corespunzătoare fiecărui nod, au fost înscrise în tabelul 4.2, legăturile cu utilajele tehnologice realizîndu-se în nodurile 1 şi 8.

În acest tabel, pentru a preciza dacă deplasarea sau rotirea nodului după una din axele generale x, y sau z este liberă sau blocată după direcţia respectivă s-au folosit următoarele codificări : codul 1 pentru deplasarea sau rotirea liberă ; codul 0 pentru deplasarea sau rotirea blocată.

Datele de intrare necesare calculului la fluaj se prezintă în tabelul 4.3.

Prin rularea programului CFSC s-a determinat tensiunile stabilizate la fluaj.

Din imprimanta obţinută la calculator, s-au extras, pentru secţiunea cea mai solicitată, rezultatele prezentate în tabelul 4.4.

Tabelul 4.1

Nr. elem.	Tip elem.	Cod nod extr. i	Cod nod extr. j	A [cm²]	$I_z = I_y$ [cm⁴]	$I_t = 2I_z$ [cm⁴]	M			R_{cot} [cm]	Unnghi centru cot [° Sexe]	δ perete cot [cm]	Raza mediană a secț. cot [cm]	E [kN/cm²]	G [kN/cm²]	Gr. unui om [kN/cm²]
							X [cm]	Z [cm]	R [cm]							
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	2	44,76	2261,98	4523,96	0	0	30	—	—	—				
2	2	2	3	—	—	—	0	0	0	70	90	0,71	10,04			
3	1	3	4	44,76	2261,98	4523,96	0	0	30	—	—	—	—			
4	2	4	5	—	—	—	0	−147,5	254,5	58,2	73	0,71	10,04			
5	1	5	6	44,76	2261,98	4523,96	0	0	30	—	—	—	—	$0,16 \cdot 10^5$	$0,63 \cdot 10^4$	$0,35 \cdot 10^{-2}$
6	2	6	7	—	—	—	100	−569,9	254,4	40	40	0,71	10,04			
7	1	7	8	44,76	2261,98	4523,96	0	0	30	—	—	—	—			

Tabelul 4.2

	NOD	1	2	3	4	5	6	7	8
X	(cm)	122	70	0	0	10,3	97	100	100
Y	(cm)	0	0	−35	−126,5	−189,3	−557,2	− 58,2	−622,8
Z	(cm)	0	0	− 60,2	−217,6	−254,5	−254,5	−249,9	−234,9
Δ_x		0	1	1	1	1	1	1	0
Δ_Y		0	1	1	1	1	1	1	0
Δ_Z		0	1	1	1	1	1	1	0
φ_x		0	1	1	1	1	1	1	0
φ_y		0	1	1	1	1	1	1	0
φ_z		0	1	1	1	1	1	1	0

Tabelul 4.3

Nr. elem.	Cod nod extr. i	Cod nod extr. j	Coef. de dilatare termică [cm/cm°C]	Temperatura [°C]	Coef. K din legea de fluaj $\left[\frac{(cm^2/daN/n)}{h}\right]$	Coef. n din legea de fluaj	Coef. lui Poisson	Incrementul de timp [ore]	N_{RAR}	N_{DES}	Grosimea elementului [cm]
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	$0,12 \cdot 10^{-4}$	700	$1,20 \cdot 10^{-15}$	2,63	0,30	85	10	20	0,71
2	2	3	$0,12 \cdot 10^{-4}$	700	$1,20 \cdot 10^{-15}$	2,63	0,30	85	10	20	0,71
3	3	4	$0,12 \cdot 10^{-4}$	700	$1,20 \cdot 10^{-15}$	2,63	0,30	85	10	20	0,71
4	4	5	$0,12 \cdot 10^{-4}$	700	$1,20 \cdot 10^{-15}$	2,63	0,30	85	10	20	0,71
5	5	6	$0,12 \cdot 10^{-4}$	700	$1 \cdot 20 \cdot 10^{-15}$	2,63	0,30	85	10	20	0,71
6	6	7	$0,12 \cdot 10^{-4}$	700	$1,20 \cdot 10^{-15}$	2,63	0,30	85	10	20	0,71
7	7	8	$0,12 \cdot 10^{-4}$	700	$1,20 \cdot 10^{-15}$	2,63	0,30	85	10	20	0,71

Tabelul 4.4

Timpul T ore	$\Delta\sigma$ [kN/cm²]	$\Delta\tau$ [kN/cm²]	σ [kN/cm²]	τ [kN/cm²]	Obs.
0	1	2	3	4	5
0	—	—	14,02	5,81	
85	−0,914	−0,1406	13,114	5,67	
170	−0,843	−0,121	12,27	5,553	
255	−0,783	−0,1047	11,487	5,447	
340	−0,731	−0,091	10,756	5,356	
425	−0,686	−0,0795	10,07	5,27	
510	−0,646	−0,069	9,423	5,2075	
595	−0,611	−0,0612	8,811	5,1462	
680	−0,5801	−0,0539	8,23	5,0923	
765	−0,552	−0,0476	7,679	5,0446	
850	−0,527	−0,0422	7,1524	5,0023	

Pe baza acestor date, variația în timp a tensiunilor (σ și τ) se prezintă în figura 4.2.

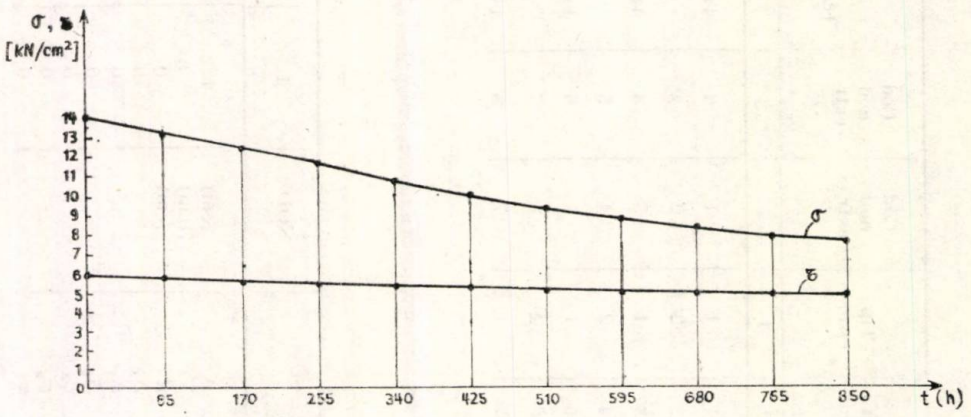


Fig. 4.2

5. CONCLUZII

1. Programul denumit CFSC, scris în limbaj FORTRAN și aplicabil calculatoarelor FELIX, este realizat pe baza unui algoritm specific care descrie în timp starea de tensiuni și deformații a sistemelor de conducte supuse fluajului.

2. Lucrarea prezintă o exemplificare de calcul la fluaj pentru un sistem de conducte concret care evidențiază modul de utilizare a algoritmului și programului.

3. Tensiunile efective în orice punct al structurii și la orice timp $t_i = \Sigma(\Delta t)$, constituie unele din mărimile afișate pe imprimanta de ieșire a programului.

În fiuncție de acestea se pot stabili atît coeficientul de siguranță dacă se cunoaște rezistența tehnică de durată, cît și durata de serviciu a sistemului de conducte analizat.

Primită la redacție la 22 ianuarie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. G. A. GREENBAUM, M. F. RUBINSTEIN, *Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements, Pressure vessels and piping : Design and analysis.* Vol. I : *Analysis for design*, New York, ASME, 1972, p. 467—485.
2. N. GRIGORE, *Algoritme pentru calculul la fluaj al învelișurilor subțiri cu aplicații la aparate și conducte specifice industriei petrochimice*, Referat nr. 3, Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești, 1985.
3. ȘT. ISPAS, ș.a., *Mecanica construcțiilor aerospațiale*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1978.
4. V. V. JINESCU, *Calculul și construcția utilajului chimic, petrochimic și de rafinării*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1983.
5. AL. PAVEL, *Elemente de inginerie mecanică (pentru petrochimie)*, Edit. didactică și pedagogică, București.
6. B. POPA, ș.a., *Solicitări termice în construcția de mașini*, Edit. tehnică, București, 1978.
7. N. POSEA, AL. ANGHEL, C. KROMEK, *Calculul static al sistemelor de conducte*. St. cerc. meé. apl., nr. 6, 1980.
8. N. POSEA, AL. ANGHEL, N. GRIGORE, *Calculul la fluaj al sistemelor de conducte — partea I*, St. cerc. mec. apl., **45** nr. 2, 1986.
9. N. POSEA, AL. ANGHEL, N. GRIGORE, *On the pipe system creeping*, Buletin I.P.G. Ploiești, vol. 36, 1985.
10. N. POSEA, AL. ANGHEL, N. GRIGORE, *Cercetări privind elaborarea unui algoritm și program pentru calculul la fluaj a unor conducte specifice industriei petrochimice*, Contract de cercetare științifică nr. 24/1983.
11. M. RENERT, ș.a., *Calculul și construcția utilajului chimic*, vol. I, Edit. didactică și pedagogică, București, 1964 și 1974.
12. W. H. SUTHERLAND, AXICRP — *Finite element compouter code for creep analysis of plane stress, plane strain and axisymmetric bodies*, Nuclear engineering and design 11 (1970), p. 269—285.

FORMULAREA GENERALIZATĂ A METODEI ELEMENTELOR FINITE

de D. DUBINĂ
Institutul Politehnic „Traian Vuia", Timişoara

În lucrare se prezintă formularea metodei elementelor finite pe baza teoriei reziduurilor ponderate. Se defineşte modelul matematic exact şi aproximativ al unui sistem fizic şi se face o clasificare a ecuaţiilor de guvernare.
Se prezintă teoria reziduurilor ponderate care se particularizează pentru problemele din mecanica structurilor şi se face o clasificare a metodelor numerice din punctul de vedere al acestei teorii. Se formulează metoda elementelor finite pe baza teoriei reziduurilor ponderate exemplificîndu-se prin determinarea matricei de rigiditate a elementului finit patrulater cu opt noduri pentru elasticitatea plană.
În final se prezintă programul de calcul ASEF elaborat pe baza metodei elementelor finite în formulare reziduală.

1. INTRODUCERE

Schema generală a metodei elementelor finite apare pentru prima dată într-o lucrare a lui Courant în anul 1943 referitoare la soluţionarea problemei torsiunii barelor. După formularea matriceală a calculului structurilor, din bare, de către Argyris în anul 1952, noţiunea de discretizare a conturului prin elemente finite a fost introdusă de Turner, Clough, Martin şi Topp, care, în 1956, au soluţionat ecuaţiile plane ale teoriei elasticităţii utilizînd elemente finite triunghiulare. Au urmat, apoi, perfecţionări în ceea ce priveşte formularea matriceală şi o utilizare largă a metodei în diferite variante stimulată de lucrările lui Melash, Tocher, Przemieniecki, Zienkievicz, Oden, Gallagher, Scordelis, Irons, Pian, Cheung, Norrie şi de Vries şi alţii.

Două motive stau la baza dezvoltării actuale a metodei elementelor finite : pe de o parte, faptul că această metodă permite abordarea unei largi game de probleme din domeniul mecancii mediilor deformabile, a fizicii mediilor continue şi a teoriei cîmpurilor, chimiei cuantice etc., iar, pe de altă parte, tehnica actuală de calcul care oferă posibilitatea ducerii calculelor pînă la nivelul de precizie dorit.

Din acest punct de vedere, expansiunea metodei poate fi pusă în evidenţă şi prin prezentarea dinamicii referinţelor bibliografice menţionate în lucrările unor cercetător din domeniu (fig. 1).

Metoda elementelor finite cunoaşte, pînă în prezent, patru procedee de formulare a ecuaţiei fundamentale :

1. *Formulare directă*, derivată din mecanica structurilor pe baza metodei deplasărilor ;

2. *Formularea variaţională*, care constă în minimizarea energiei potenţiale totale a solidului elastic, în baza principiului valorii staţionare, a energiei potenţiale. Spre deosebire de procedeul direct, formularea variaţională a extins aplicarea metodei şi la alte categorii de probleme pentru care se poate defini o funcţională şi un criteriu de staţionaritate ;

3. *Formularea integrală pe baza teoriei generale a reziduurilor ponderate*, care a permis abordarea problemelor liniare și neliniare printr-o exprimare unitară și a dat posibilitatea abordării unor probleme ce nu pot fi caracterizate variațional;

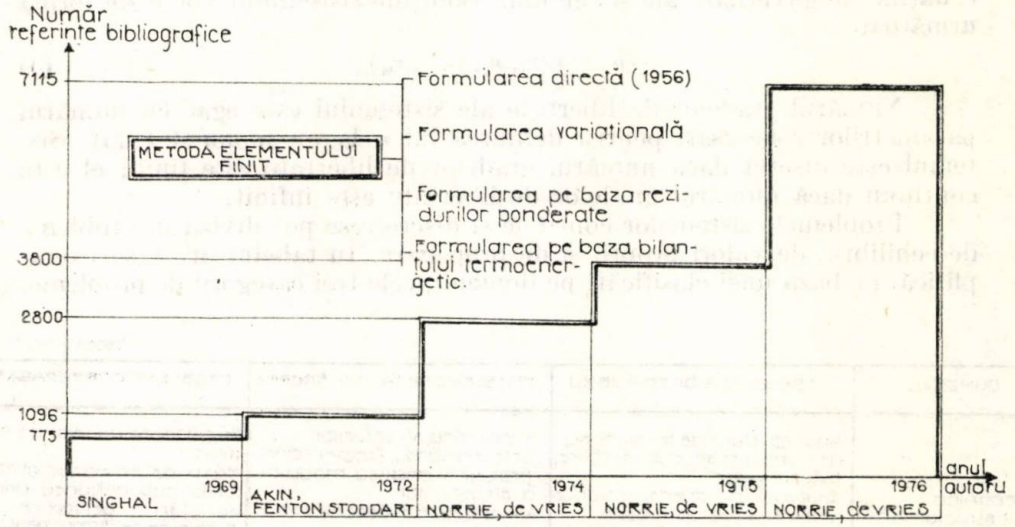


Fig. 1

4. *Formularea pe baza bilanțului termoenergetic*, care, pornind de la prima lege a termodinamicii, dezvoltă considerabil gama de probleme ce pot fi investigate cu metoda elementului finit.

Din ansamblul de fapte, care constituie în prezent obiectul dezvoltării metodei elementului finit, lucrarea de față își propune ca, pe baza unei sistematizări a reprezentărilor și modelelor de calcul din mecanica și fizica mediilor continue, să demonstreze generalitatea formulării integrale, atît ca instrument de investigare, cît și ca suport pentru cuplarea cu alte metode numerice, cum este, de exemplu, metoda elementelor de contur.

2. MODELE DE CALCUL EXACTE ȘI APROXIMATIVE

Orice sistem fizic poate fi caracterizat printr-o mulțime de variabile care sînt funcții de coordonate spațiale $x(x, y, z)$ și de timp t. Sistemul este staționar sau nestaționar după cum $t = 0$ sau $t \neq 0$. Un număr r de variabile pot fi prestabilite : proprietățile fizico-mecanice ale materialului, dimensiunile geometrice, forțele aplicate, condițiile de margine. Restul variabilelor, u, sînt necunoscutele problemei : deplasări, viteze, temperaturi, tensiuni etc.

Un model matematic al acestui sistem rezultă în a stabili o relație între u și r în urma aplicării legilor fizice caracteristice. Aceste relații formează un sistem de ecuații de definiție de forma :

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, \ldots, u_n, r_1, r_2, \ldots, r_m) = 0, \tag{1}$$

cărora li se atașează un set de condiții la limită :

$$\mathcal{C}(u_1, u_2, \ldots, u_n, r_1, r_2, \ldots, r_m) = 0. \tag{2}$$

Ecuațiile de definiție, împreună cu condițiile la limită, formează ecuațiile de guvernare ale sistemului. Soluțiile sistemului vor fi de forma următoare :

$$u = u(r_1, r_2, \ldots, r_m). \tag{3}$$

Numărul gradelor de libertate ale sistemului este egal cu numărul parametrilor r necesari pentru definirea lui u la un moment t dat. Sistemul este discret dacă numărul gradelor de libertate este finit; el este continuu dacă numărul gradelor de libertate este infinit.

Problemele sistemelor continue și discrete se pot diviza în probleme de echilibru, de valori proprii și de propagare. În tabelul nr. 1 se exemplifică, pe baza unei clasificări pe domenii, cele trei categorii de probleme.

Tabelul nr. 1

DOMENIUL	PROBLEME DE ECHILIBRU	PROBLEME DE VALORI PROPRII	PROBLEME DE PROPAGARE
Mecanica structurilor	Analiza stării de tensiuni și deformații în structuri din bare, plăci și pînze. Analiza stării de tensiuni și deformații în structuri masive. Torsiunea elementelor prismatice Analiza structurilor compuse.	Stabilitatea structurilor Determinarea frecvențelor proprii și analiza modală a structurilor Amortizarea viscoelastică liniară	Propagarea undelor de tensiuni Răspunsul dinamic al structurilor sub acțiunea unor solicitări neperiodice. Probleme de termoelasticitate, termoviscoelasticitate, viscoelasticitate.
Mecanica pămînturilor Mecanica rocilor	Analiza bi- și tridimensională a stării de tensiuni și deformații în masive din pămînt și roci. Stabilitatea taluzelor Interacțiunea structură-teren	Determinarea frecvențelor proprii și analiza modală a structurilor ținînd seama de interacțiunea cu terenul de fundare.	Interacțiunea dinamică teren structură. Propagarea undelor de tensiuni prin pămînturi și roci Consolidarea fluidelor în medii poroase deformabile Infiltrarea tranzit. în păm. și roci.
Conducția căldurii	Distribuția staționară a temperaturii în solide și fluide.		Propagarea tranzitorie a temperaturii în solide și fluide.
Mecanica fluidelor	Curgerea potențială a fluidelor Curgerea viscoasă a fluidelor Infiltrarea staționară în medii poroase și acvifere Analiza structurilor hidraulice	Determinarea frecvențelor proprii și a modurilor de oscilație a apei din lacuri și bazine Mișcarea fluidelor în rezervoare rigide și elastice.	Transportul aluviunilor Curgerea nestațională a fluidelor Propagarea valurilor Studii privind salinitatea și poluarea estuar. (probl. de difuz.) Infiltrarea tranzitorie.
Ingineria nucleară	Analiza structurii reactorilor nucleari Distribuția staționară a temperaturii în reactori și în structura reactorilor.		Analiza dinamică a structurii reactorilor nucleari Analiza termoviscoelastică a structurii reactorilor Distribuția nestation. a temp.

Un sistem discret poate fi descris printr-un sistem de ecuații algebrice. Un sistem continuu este guvernat de ecuații diferențiale, ecuații cu derivate parțiale și/sau integro-diferențiale, împreună cu un sistem de condiții de margine spațiale și/sau temporale. Sistemul de ecuații algebrice se poate rezolva direct, prin metode numerice, în timp ce un sistem continuu trebuie mai întîi discretizat, adică înlocuit printr-un sistem echivalent de ecuații algebrice.

Procesul de discretizare implică, de fapt, înlocuirea modelului matematic exact, care caracterizează sistemul fizic prin intermediul ecuațiilor

de guvernare, printr-un model de calcul aproximativ abordabil prin metode numerice. Trecerea de la modelul exact la modelul aproximativ se realizează pe baza unor legi și criterii de ordin matematic bine stabilite, care caracterizează sistemul și permit formularea unei teorii matematice a sistemului [15, 23]. În figura 2 se prezintă schema de conținut a acestei teorii cu particularizarea ei pe metoda elementelor finite în formularea reziduală.

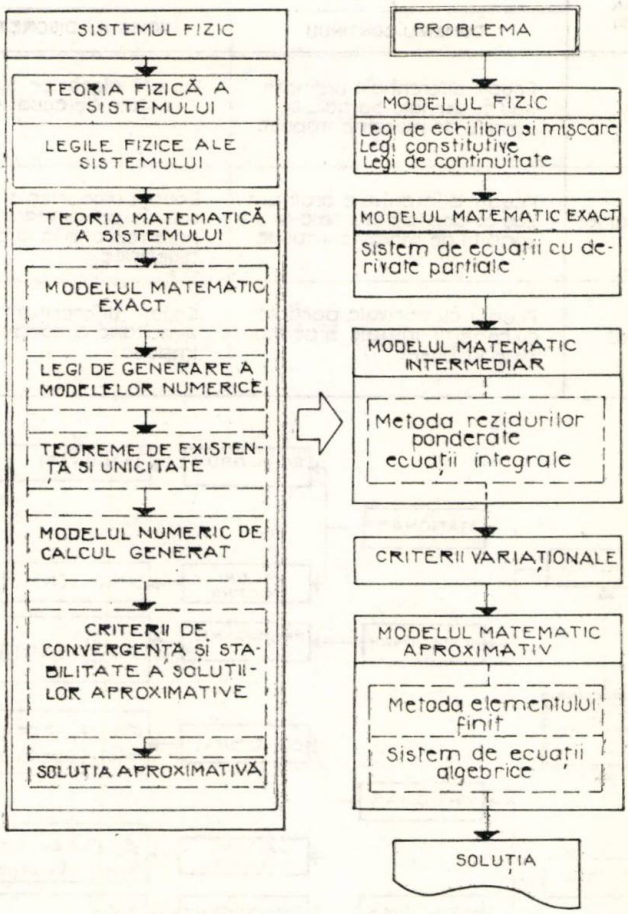


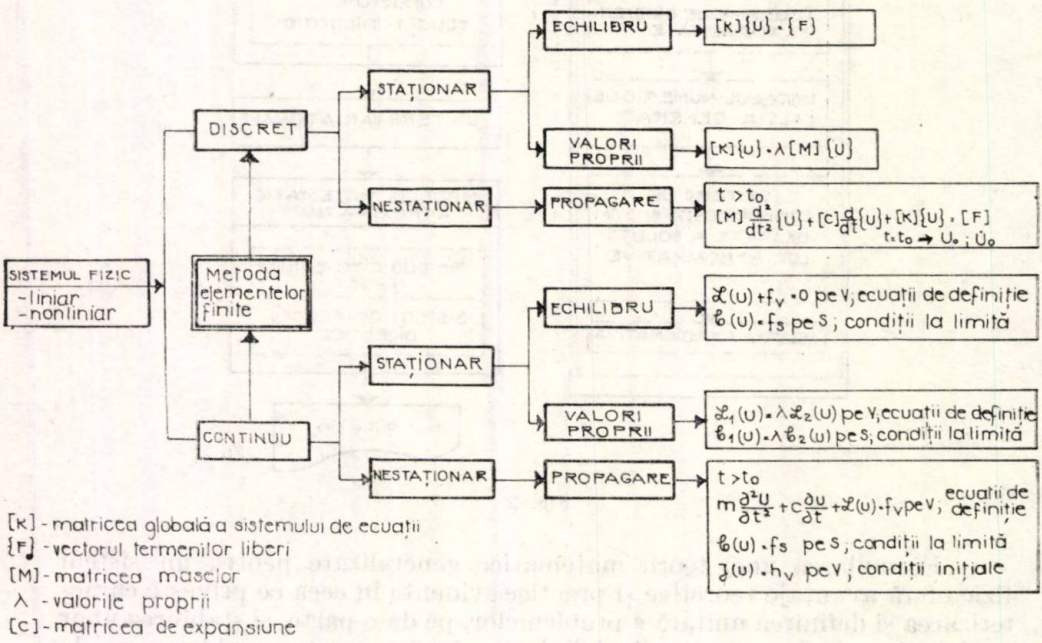
Fig. 2

Formularea unei teorii matematice generalizate pentru un sistem fizic oferă avantaje teoretice și practice evidente în ceea ce privește caracterizarea și definirea unitară a problemelor, pe de-o parte, și stabilirea unor modele de calcul general aplicabile la rezolvarea acestor probleme, pe de altă parte. Din acest punct de vedere, formularea metodei elementelor finite pe baza teoriei reziduurilor ponderate are caracter de generalitate, în sensul că permite o abordare unitară a celor trei categorii de probleme menționate anterior.

Pentru aceste trei categorii de probleme, de echilibru, de valori proprii și de propagare, în tabelul 2 se prezintă clasificarea ecuațiilor de guvernare, iar în figura 3 se arată generarea modelului de calcul aproximativ — discret — din modelul de calcul exact — continuu — prin intermediul metodei elementelor finite.

tabelul nr. 2

CATEGORIA PROBLEMEI	ECUAȚIILE DE GUVERNARE ALE PROBLEMEI	
	DOMENIU CONTINUU	DOMENIU DISCRET
ECHILIBRU	Ecuații diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale cu condiții de margine impuse.	Ecuații algebrice simultane (sistem de ecuații)
VALORII PROPRII	Ecuații diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale cu condiții de margine impuse.	Ecuații algebrice simultane sau ecuații diferențiale ordinare reductibile la ecuații algebrice.
PROPAGARE	Ecuații cu derivate parțiale cu condiții inițiale și de margine impuse.	Ecuații diferențiale ordinare simultane cu condiții inițiale impuse.



[K] - matricea globală a sistemului de ecuații
{F} - vectorul termenilor liberi
[M] - matricea maselor
λ - valorile proprii
[C] - matricea de expansiune

Fig. 3

O altă metodă posibilă pentru transformarea continuului în discret este metoda diferențelor finite, care este un procedeu de discretizare matematică, spre deosebire de metoda elementelor finite, care este un procedeu

de discretizare fizică. Analiza funcțională cunoaște, însă, și procedeul invers : transformarea sistemelor discrete în sisteme continue prin introducerea așa-numitelor funcții generalizate. Această metodă, care din punct de vedere matematic permite o tratare unitară a fenomenelor continue și discontinue, este caracterizată în prezent prin dezvoltări remarcabile [19, 32] și are interesante aplicații în mecanica structurilor [5, 8, 16, 17, 32].

3. METODA GENERALĂ A REZIDUURILOR PONDERATE

Pentru un sistem guvernat de ecuațiile (1) și (2), cu soluții aproximative, se definește funcția reziduu sau eroare de forma :

$$R(u) = \mathcal{L}(u) + f_v. \tag{4}$$

Metoda reziduurilor ponderate constă în determinarea funcțiilor u care satisfac următoarea ecuație integrală :

$$W(u) = \int_V \langle \psi \rangle \{R(u)\} \, dV = \int_V \langle \psi \rangle \{\mathcal{L}(u) + f_V\} \, dV = 0, \tag{5}$$

în care funcțiile ponderate ψ se mai numesc funcții de corecție sau de interpolare, aparținînd unei mulțimi E_ψ, se aleg astfel încît ecuația (5) să fie verificată simultan cu satisfacerea condițiilor la limită (2) de către soluțiile aproximative u. Se spune în acest caz, că soluțiile u aparțin unei mulțimi admisibile E_u care este incompatibilă în raport cu sistemul fizic guvernat de ecuațiile (1) și (2).

Precizia soluției u depinde de alegerea funcțiilor ψ : astfel, dacă E_ψ este o mulțime completă a funcțiilor lui Dirac, $\delta(x)$, pe domeniul V, atunci soluția ecuației (4), u, va fi soluție și pentru (1) și reziduul $R(u)$ va fi identic nul în toate punctele conținute în V ; dacă mulțimea E_ψ este finită, funcția u care satisface pe (4) este, în general, soluție aproximativă pentru (1), ceea ce înseamnă că ecuația (1) nu va fi satisfăcută în toate punctele din V.

În practică sistemul (1) se rezolvă adesea după eliminarea unui număr de variabile q între ecuațiile cîmpului :

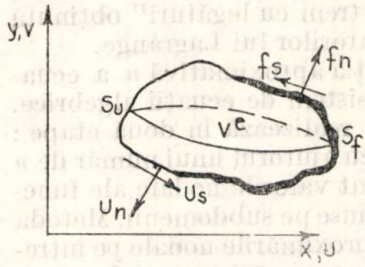


Fig. 4

$$\mathcal{L}_e(q) - f_V = 0, \quad \text{legea de echilibru,} \tag{5}$$

$$\mathcal{L}_c(q, u) = 0, \quad \text{legea constitutivă.} \tag{6}$$

Aplicînd metoda reziduurilor ponderate rezultă

$$W_r = \int_V \langle \psi \rangle \{\mathcal{L}(q) - f_V\} \, dV + \int_V \langle \psi \rangle \{\mathcal{L}_c(q, u)\} \, dV = 0, \tag{7}$$

în care u și q trebuie să satisfacă condițiile de margine pe S_u și S_f (fig. 4).

Se demonstrează că metoda reziduurilor ponderate este echivalentă cu minimizarea unei funcționale în anumite cazuri. În mecanica solidelor, spre exemplu, funcționala este energia potențială totală a sistemului mecanic. Aceasta conduce la o formulare integrală direct din condiția de staționaritate pusă funcționalei. Acest mod de rezolvare este preferabil atunci cînd expresia energiei potențiale totale este ușor de stabilit.

Astfel, pentru unele probleme guvernate de ecuațiile (1) și (2) se poate determina o funcțională $\pi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right)$ astfel ca

$$\delta\pi = W = 0, \tag{8}$$

în care $\delta\pi$ este prima variație a funcționalei.

În (8) W este o integrală particulară în care funcțiile ponderate ψ se aleg egale cu u. În acest fel se obține că

$$W = \int_V \langle \delta u \rangle \{\mathcal{L}(u) + f_V\} \, \mathrm{d}V = 0 \tag{9}$$

dacă sînt respectate condițiile :

a) $\mathcal{L}$ și $\mathcal{C}$ sînt operatori diferențiali liniari cu toate derivatele de ordin par ;

b) f_s și f_v sînt independente de u.

Dacă ecuației (1) i se atașează condițiile (2) separate pe S_f și S_u relația (8) devine :

$$W(u) = \int_V \langle \psi \rangle \{\mathcal{L}(u) + f_V\} \, \mathrm{d}V = 0 \, ; \quad \forall V \in E_\psi \tag{10}$$

cu condițiile :

$$\mathcal{C}_f(u) = f_s \quad \text{pe } S_f, \tag{11a}$$

$$\mathcal{C}_u(u) = f_u \quad \text{pe } S_u. \tag{11b}$$

Prin introducerea unor variabile adiționale q, de natură fizică, ca funcții necunoscute ale problemei, concomitent cu relaxarea condițiilor de continuitate pentru funcțiile admisibile u, se poate construi o nouă funcțională generalizată π^*, problema „de extrem cu legături" obținută în acest fel rezolvîndu-se cu metoda multiplicatorilor lui Lagrange.

În calculele practice, pentru a obține soluția aproximativă u a ecuației (5), aceasta trebuie transformată într-un sistem de ecuații algebrice. Acest proces de „discretizare matematică" se realizează în două etape :

I. Funcțiile necunoscute se aproximează cu ajutorul unui număr de n parametri de aproximare. Acești parametri sînt valorile nodale ale funcțiilor u definite pe întregul domeniu V sau restrînse pe subdomenii. Metoda parametrilor inițiali utilizează, spre exemplu, aproximările nodale pe întregul domeniu, iar metoda elementului finit aproximări pe subdomenii. Astfel, în general,

$$u = u(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \tag{12}$$

sau

$$u = \langle P \rangle \{a\}, \text{ pe } V \tag{13}$$

și

$$u = \langle N \rangle \{a\}, \text{ pe subdomenii din } V, \tag{14}$$

în care P și N reprezintă funcții de interpolare convenabil alese.

II. Pentru alegerea funcțiilor ponderate ψ_i, se pot utiliza mai multe procedee : Gderkin, metoda colocațiilor și metoda celor mai mici pătrate sînt cele mai cunoscute.

În figura (5) se prezintă schematic aceste metode.

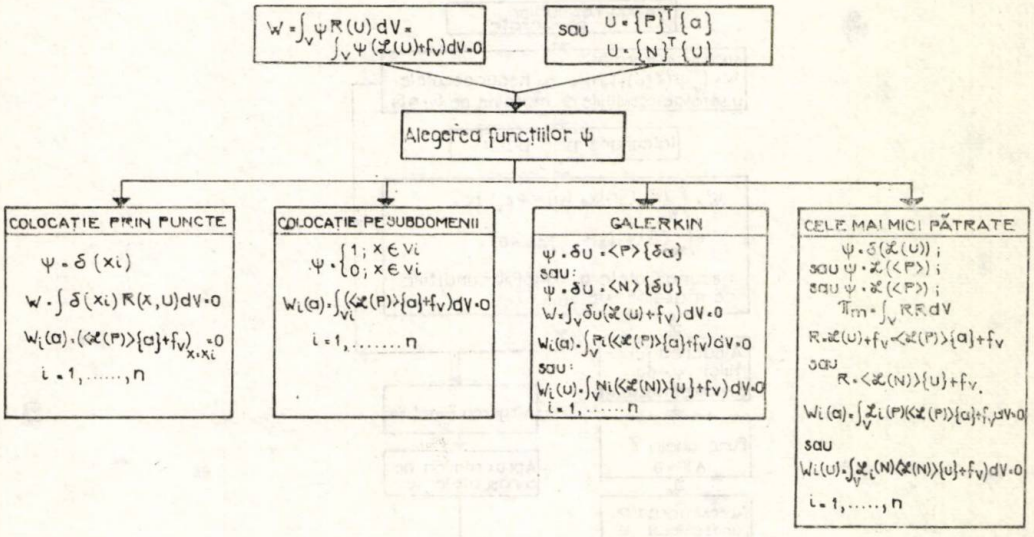


Fig. 5

Ecuația (5) va trece, în acest fel, într-un sistem de ecuații integrale :

$$W_i = \int_V \langle \psi_i \rangle \{\mathcal{L}(u\,(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n) + f_V\}\, \mathrm{d}V, \tag{15}$$

care, după integrare prin părți, se transformă într-un sistem de ecuații algebrice, prin rezolvarea căruia se determină parametrii a_i

$$[K]\{a\} = \{F\}. \tag{16}$$

În figura 6 se prezintă schematizat modelul matematic bazat pe teoria reziduurilor ponderate.

4. APLICAREA FORMULĂRII REZIDUALE ÎN MECANICA STRUCTURILOR

Pentru problemele din mecanica structurilor, ecuațiile de guvernare sînt *ecuațiile de echilibru* de forma :

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0\,; \quad i, j = (i, j = x, y, z), \tag{17}$$

în care σ_{ij} reprezintă componentele tensorului tensiunilor, iar b_j componentele vectorului forţelor masice. La aceasta se ataşează condiţiile la limită :

$$p_i = \sigma_{ij} n_j = p_i, \quad \text{pe } S_1 \, (i, j = x, y, z), \tag{18}$$

$$u_i = \bar{u}_i, \quad \text{pe } S_2 \, (i = x, y, z) \; S = S_1 \dot{+} S_2. \tag{19}$$

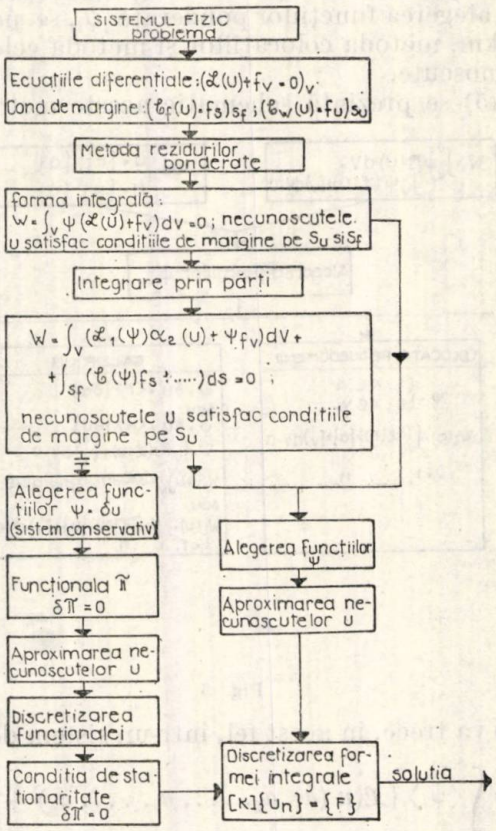


Fig. 6

În aceste relaţii, u_i reprezintă componentele vectorului deplasărilor ; p_i — vectorul forţelor de suprafaţă, n_j — cosinuşi directori ai normalei, iar S — suprafaţa corpului de volum V.

Modelul matematic care descrie sistemul se completează cu ecuaţiile geometrice şi de compatibilitate şi cu ecuaţiile constitutive.

Ecuaţiile geometrice, în cazul general, se scriu în forma următoare :

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,i} = \text{div. } u \qquad (i = x, y, z), \tag{20}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (i, j = x, y, z), \tag{21}$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) = \text{rot. } u, \tag{22}$$

în care $\varepsilon_{i,j}$ sînt componentele tensorului deformaţiilor specifice, iar ω_{ij} componentele tensorului rotaţiilor locale de corp rigid, cu care se defineşte tensorul gradient al deplasării

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (i, j = x, y, z). \tag{23}$$

În mecanica structurilor interesează tensorul deformaţie specifică.

Ecuaţiile de compatibilitate (*Saint-Venant*) :

$$\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{ik,jl} = 0 \quad (i, j, k, l = x, y, z). \tag{24}$$

Condiţia de compatibilitate sau de continuitate a deformaţiilor, în cazul unui corp elastic, este echivalentă cu condiţia ca energia potenţială de deformaţie acumulată de corp să fie minimă.

Ecuaţiile constitutive, exprimă legătura dintre tensiuni şi deformaţiile specifice :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (i, j, k, l = x, y, z). \tag{25}$$

În relaţia (25), C_{ijkl} este tensorul de ordinul patru al coeficienţilor elastici :

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\,\delta_{jk} + \delta_{il}\,\delta_{jk}) \tag{26}$$

în expresia căruia δ_{ij} este simbolul lui Kronecker, iar λ şi μ sînt constantele lui Lamé.

Forma integrală, caracteristică problemelor din mecanica structurilor, se scrie astfel :

$$W = \int_V (\sigma_{ij,i} + b_j)\, u_j^*\, \mathrm{d}V = \int_{S_1} (p_j - \bar{p}_j)\, u_j^*\, \mathrm{d}S + \int_{S_2} (\bar{u}_j - u_j)\, p_j^*\, \mathrm{d}S = 0, \tag{27}$$

în care u_j^* şi p_j^* reprezintă formele ponderate ale deplasărilor u şi, respectiv, ale forţelor de suprafaţă p,

$$p_j^* = n_j\, \sigma_{ij}^*. \tag{28}$$

Înlocuind în (27) în funcţie de relaţiile (21) şi (25) se obţine, după integrare prin părţi,

$$W = \int_V C_{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}^*\, \mathrm{d}V + \int_V b_j u_j^*\, \mathrm{d}V = \int_{S_2} \bar{p}_j u_j^*\, \mathrm{d}S -$$

$$- \int_{S_1} p_j u_j^*\, \mathrm{d}S + \int_{S_1} (\bar{u}_j - u_j)\, p_j^*\, \mathrm{d}S \tag{29}$$

sau, ţinînd seama de simetria tensorului C_{ijkl},

$$W = \int_V (\sigma^*_{ij,k})\, u_j \, \mathrm{d}V + \int_V b_j u^*_j \, \mathrm{d}V = -\int_{S_2} \bar{p}_j u^*_j \, \mathrm{d}S -$$

$$- \int_{S_1} p_j u^*_j \, \mathrm{d}S + \int_{S_1} (\bar{u}_j - u_j)\, p^*_j \, \mathrm{d}S. \tag{30}$$

5. CLASIFICAREA METODELOR NUMERICE BAZATE PE TEORIA GENERALĂ A REZIDUURILOR PONDERATE

În funcţie de modul în care ecuaţiile de guvernare (1) şi condiţiile la limită (2) sînt satisfăcute, se evidenţiază trei formulări ale metodei reziduurilor ponderate :

Formularea directă, în cadrul căreia soluţiile aproximative u satisfac identic condiţiile de margine (2) şi aproximativ ecuaţiile (1), caracteristice problemei.

Formularea intermediară (soluţia slabă) în cadrul căreia condiţiile de margine sînt parţial satisfăcute, iar ecuaţiile de guvernare (1) în mod aproximativ.

Formularea inversă, care presupune satisfacerea identică a ecuaţiilor caracteristice (1) şi în mod aproximativ a condiţiilor de margine.

În figura 6 se prezintă o clasificare a metodelor de calcul care derivă din teoria reziduurilor ponderate, exemplificîndu-se cele trei forme de rezolvare definite anterior prin formele integrale ale ecuaţiei lui Poisson :

Este interesant de remarcat că trei metode numerice cu largă aplicabilitate se pot formula în mod unitar pe baza teoriei reziduurilor ponderate :

Metoda diferenţelor finite, operează cu funcţii de bază diferite pentru u şi ψ. Majoritatea tehnicilor de calcul cu diferenţe finite se dezvoltă pe baza formulării directe, situaţie în care pentru funcţiile ponderate ψ se pot utiliza cu succes forme ale funcţiei $\delta(x)$ a lui Dirac. Pentru tehnicile de calcul bazate pe scheme energetice se utilizează formularea intermediară ;

Metoda elementelor finite, în cadrul formulării intermediare, operează cu funcţii de bază similare pentru u şi ψ ceea ce conduce la obţinerea matricei $[K]$ a sistemului (16) de formă simetrică. Este marele avantaj al metodei, întrucît aceasta permite în continuare transformarea matricei $[K]$ într-o matrice bandă, ceea ce creează mari facilităţi în rezolvarea sistemului de ecuaţii.

Metoda elementelor de contur, dezvoltată pe baza formulării inverse, utilizează, la fel ca în metoda diferenţelor finite, funcţii de bază diferite pentru u şi ψ. Funcţiile ponderate ψ se aleg în asemenea manieră încît

să reducă integralele pe frontiera domeniului. Aceasta se poate obține, spre exemplu, luînd pentru ψ funcții $\delta(x)$, de tip Dirac, definite în puncte particulare de pe frontieră.

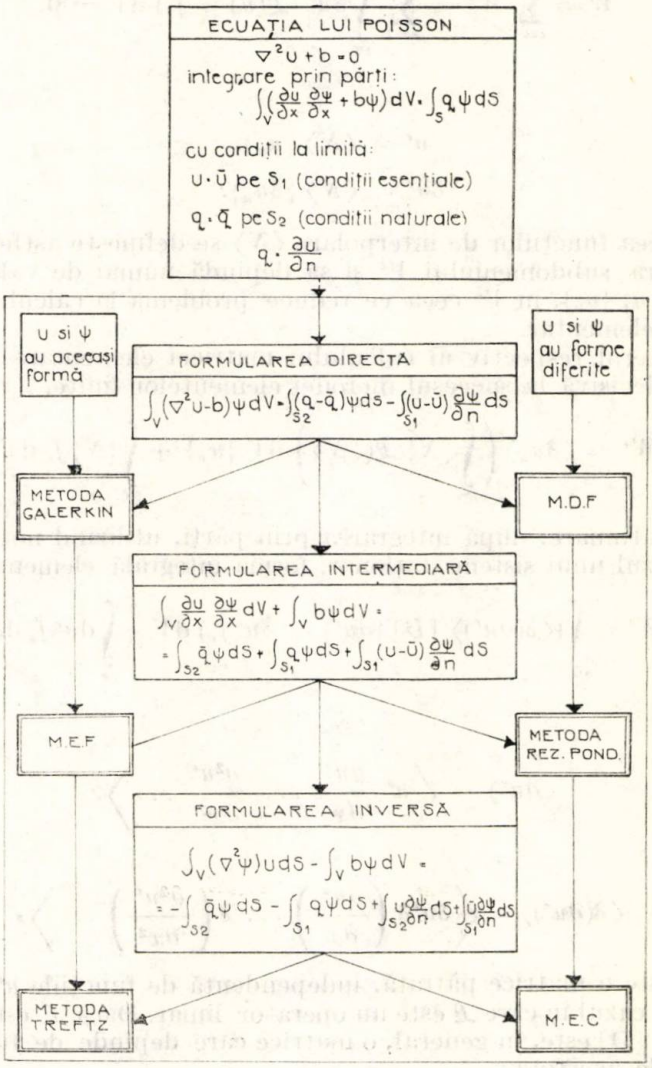


Fig. 7

6. FORMULAREA GENERALIZATĂ A METODEI ELEMENTULUI FINIT PE BAZA TEORIEI GENERALE A REZIDUURILOR PONDERATE

Metoda elementelor finite constă în discretizarea formei integrale W utilizînd pentru funcțiile necunoscute u aproximații cu elemente finite în vederea transformării sistemului de ecuații integrale (15) într-un sistem de ecuații algebrice de tip (16). Plecînd de la varianta Galerkin a formei

integrale (fig. 5) în care integrala pe domeniul V se înlocuiește cu o sumă de integrale pe subdomenii elementare V^e, rezultă :

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{e=1}^{n} \int_{V^e} \delta u^e \, (\mathcal{L}(u) + f_v) \, \mathrm{d}V = 0, \tag{31}$$

în care

$$u^e = \langle N \rangle \{u_n\}, \tag{32}$$

$$\delta u^e = \langle N \rangle \{\delta u_n\}. \tag{33}$$

Matricea funcțiilor de interpolare $\langle N \rangle$ se definește astfel încît să fie nulă în afara subdomeniului V^e și să depindă numai de valorile nodale ale funcției u, $\{u_n\}$, în V^e ceea ce reduce problema la calculul pe subdomeniul V^e elementar.

Caracterul respectiv al calculului matricei elementare a contribuit în măsură decisivă la succesul metodei elementelor finite,

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle \left(\int_{V^e} \{N\} \, \mathcal{L}(\langle N \rangle) \, \mathrm{d}V \, \{u_n\} + \int_{V^e} \{N\} f_v \, \mathrm{d}V. \right. \tag{34}$$

În continuare, după integrarea prin părți, utilizînd notațiile matriceale, în cazul unui sistem staționar, forma integrală elementară devine :

$$W^e = \int_{V^e} (\langle \delta(\partial u^e) \rangle \, [D] \, \{\partial u^e\} - \delta u^e f_v) \, \mathrm{d}V - \int_{S_f^e} \mathrm{d}u^e f_s \, \mathrm{d}S, \tag{35}$$

în care

$$\langle \partial u^e \rangle = \left\langle u^e \, \frac{\partial u^e}{\partial x} \, \ldots \, \frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \, \ldots \right\rangle, \tag{36}$$

$$\langle \delta(\partial u^e) \rangle = \left\langle \delta u^e \delta \left(\frac{\partial u^e}{\partial x} \right) \ldots \delta \left(\frac{\partial^2 u^e}{\partial x^2} \right) \ldots \right\rangle, \tag{37}$$

unde [D] este o matrice pătrată, independentă de funcțiile u^e și de derivatele lor în cazul în care $\mathcal{L}$ este un operator liniar. Dacă $\mathcal{L}$ este un operator neliniar, [D] este, în general, o matrice care depinde de funcțiile u^e și de derivatele acestora ;

f_s și f_v reprezintă forțele pe conturul și suprafața domeniului ; V^e — volumul elementelor ; S_f^e — porțiunea din suprafața elementară a volumului V^e pentru care, în urma integrării prin părți, rezultă integrale pe contur.

Procedeul prezentat se poate exemplifica pentru ecuația lui Poisson (capitolul 5, fig. 7),

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{e=1}^{n} \int_{V^e} \delta u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_v \right) \mathrm{d}V = 0. \tag{38}$$

După integrarea prin părți, rezultă

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{e=1}^{n} \left(\int_{V^e} (\langle \delta(\delta u) \rangle [D] \{\partial u\} - \delta u f_v) \, dV - \int_{S_f^e} du(f_s - \alpha u) \, dS, \right. \tag{39}$$

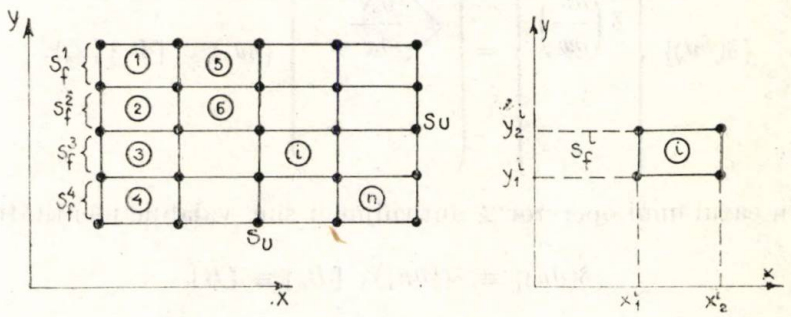
în care

$$\langle \delta(\partial u) \rangle = \left\langle \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\rangle, \tag{40}$$

$$\langle \partial u \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right\rangle, \tag{42}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Se consideră un domeniu plan rectangular V partiționat în subdomenii elementare V^e. Conturul S al domeniului V se divide în două porțiuni S_u și S_f (fig. 8).



a Fig. 8 b

Luînd în considerare expresiile (32), (33) și (35), rezultă

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}), \tag{43}$$

în care $[k]$ este matricea elementară, independentă de $\{u_n\}$ dacă $\mathcal{L}$ este un operator liniar; $\{f\}$ — vectorul acțiunii exterioare pe element; $\{u_n\}$ — vectorul valorilor nodale aferente elementului; δu_n — prima variație a lui u_n.

Pentru întreg domeniul rezultă:

$$W = \sum_{e=1}^{n} W^e = \sum_{e=1}^{n} \langle \delta u_n \rangle ([k] \{u_n\} - \{f\}) = 0; \tag{44}$$

$$W = \langle \delta U_n \rangle ([K] \{U_n\} - \{F\}) = 0, \tag{45}$$

în care $[K]$ este matricea globală a sistemului, $\{F\}$ — vectorul acțiunilor exterioare; $\{U_n\}$ — vectorul valorilor nodale ale necunoscutelor u; δU_n o variație arbitrară a lui U_n.

Dacă expresia (45) este nulă pentru variații arbitrare $\langle \delta U_n \rangle$, se obține ecuația fundamentală a metodei elementului finit :

$$[K]\{U_n\} = \{F\}. \tag{46}$$

Pentru a stabili expresiile termenilor ecuației (46) se pleacă de la formularea matriceală a formei integrale W^e. Astfel se poate scrie :

$$\{\partial u\} = \begin{Bmatrix} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle N \rangle \\ \left\langle \dfrac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \{u_n\} = [B]\{u_n\}, \tag{47}$$

$$\{\delta(\partial u)\} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \langle N \rangle \\ \left\langle \dfrac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \{\delta u_n\} = [B_\delta]\{u_n\}. \tag{48}$$

În cazul unui operator $\mathcal{L}$ autoadjunct sînt valabile identitățile :

$$\{\delta(\partial u)\} \equiv \delta(\{\partial u\}); \quad [B_\delta] \equiv [B]. \tag{49}$$

Înlocuind (33) și (34) în (23) și ținînd seama de (35), rezultă

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle \left(\int_{Ve} ([B]^T [D] [B]) \, \mathrm{d}V \right) \{u_n\} = \int_{Ve} \{N\} f_v \, \mathrm{d}V - \int_{S_f^e} \{N\} f_s \, \mathrm{d}S, \tag{50}$$

din care, identificînd termenii din (43), se obțin relațiile cunoscute și din alte formulări ale metodei elementului finit :

$$[k] = \int_{Ve} [B]^T [D] [B] \, \mathrm{d}V, \tag{51}$$

$$\{f\} = \int_{Ve} \{N\} f_v \, \mathrm{d}V + \int_{S_f^e} \{N\} f_s \, \mathrm{d}S. \tag{52}$$

Legătura dintre sistemul de axe global (x, y, z) și sistemul de axe local — elementar — (ξ, η, ζ) (fig. 9) se realizează prin intermediul unei

matrice Jacobiene, urmînd următoarea secvență:

$$u(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{u_n\}, \tag{53}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{du}{d\xi} = \frac{d\xi}{dx}\left\langle \frac{dN(\xi)}{d\xi} \right\rangle \{u_n\}, \tag{54}$$

$$[B] = [Q]\,[B_\xi], \tag{55}$$

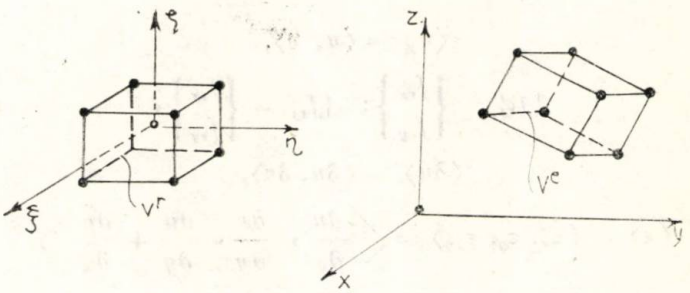


Fig. 9

n care matrice a Q, numită matrice de transformare, conține termenii Jacobianului $[j] = [J]^{-1}$, iar $[B_\xi]$ este o matrice similară cu $[B]$ conținînd derivatele funcțiilor de interpolare $N(\xi)$ în raport cu ξ.

După înlocuire în (51) și (52), rezultă, pentru spațiul de referință V^r,

$$[k] = \int_{V^r} [B_{\delta\xi}]^T [Q_\delta]\,[D]\,[Q]\,[B_\xi] \det [J]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{56}$$

$$\{f\} = \int_{V^r} \{N\} f_v \det (J)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int_{S^r} \{N\} f_s J_s\, dS_1\, dS_2. \tag{57}$$

În aceste relații, pentru un operator $\mathcal{L}$ autoadjunct,

$$[Q_\delta] \equiv [Q] \text{ și } [B_{\delta\xi}] \equiv [B_\xi], \tag{58}$$

iar coordonatele curbilinii s_1 și s_2, relative la frontiera S sînt, în general, (ξ, η) (ξ, ζ) sau (η, ζ) și

$$J_s = \sqrt{x_{,s}^2 + j_{,2}^2 + z_{,s}^2}, \tag{59}$$

$$x = \langle N(s) \rangle \{x_n\}; \quad y = \langle N(s) \rangle \{y_n\}; \quad z = \langle N(s) \rangle \{z_n\}. \tag{60}$$

Cu matricea elementară $[k]$ și vectorul $\{f\}$ definite, formularea metodei elementelor finite pe baza teoriei reziduurilor ponderate se consideră încheiată, asamblarea matricei globale $[K]$ și rezolvarea sistemului de ecuații (48) urmînd secvențele cunoscute [2, 9, 11, 20, 21, 26, 35] din literatura de specialitate.

Pentru exemplificare, se prezintă în continuare deducerea matricei de rigiditate pentru un element finit plan cu opt noduri (fig. 10) avînd cîte două grade de libertate, translaţii, pe fiecare nod.

Forma integrală elementară, în cadrul elasticităţii plane se scrie în felul următor :

$$W^e = \int_{Ve} \langle \delta\varepsilon \rangle \, [D] \, \{\varepsilon\} \, dV - \int_{Ve} \langle \delta u \rangle \, \{f_v\} \, dV - \int_{S_f^e} \langle \delta u \rangle \, \{f_s\} \, dS, \qquad (61)$$

în care

$$\langle u \rangle = \langle u, \; v \rangle, \qquad (62)$$

$$\{f_v\} = \begin{Bmatrix} f_{vx} \\ f_{vy} \end{Bmatrix}; \quad \{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \end{Bmatrix}, \qquad (63 \text{ a şi b})$$

$$\langle \delta u \rangle = \langle \delta u, \; \delta v \rangle, \qquad (64)$$

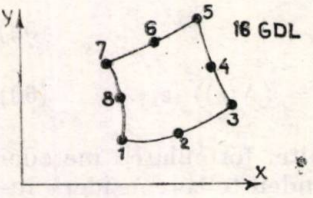
$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x, \; \varepsilon_y, \; \varepsilon_{xy} \rangle = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \; \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle, \qquad (65)$$

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}, \qquad (66)$$

$$d_1 = \frac{E(1 - \alpha\nu)}{(1 + \nu)(1 - \nu - \alpha\nu)}; \quad d_2 = \frac{\nu d_1}{(1 - \alpha\nu)}; \quad d_3 = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \qquad (67 \text{ a, b şi c})$$

cu coeficientul $\alpha = 0$ în cazul stării plane de tensiuni şi $\alpha = 1$ pentru starea plană de deformaţii

F g. 10



tabelul nr 3

nr. nod	$\{N\}$	$\{\partial N/\partial \xi\}$	$\{\partial N/\partial \eta\}$
1	$\frac{-(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\eta)(2\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\xi)(\xi+2\eta)}{4}$
2	$\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2}$	$-(1-\eta)\,\xi$	$\frac{-(1-\xi^2)}{2}$
3	$\frac{-(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\eta)(2\xi-\eta)}{4}$	$\frac{-(1+\xi)(\xi-2\eta)}{4}$
4	$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$\frac{1-\eta^2}{2}$	$-(1+\xi)\,\eta$
5	$\frac{-(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)(2\xi+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\xi)(\xi+2\eta)}{4}$
6	$\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{4}$	$-(1+\eta)\,\xi$	$\frac{(1-\xi^2)}{2}$
7	$\frac{-(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)(2\xi-\eta)}{4}$	$\frac{-(1-\xi)(\xi-2\eta)}{4}$
8	$\frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$\frac{-(1-\eta^2)}{2}$	$-(1-\xi)\,\eta$

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \, \{u_n\}, \qquad (68)$$

$$\delta u = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \end{Bmatrix} = [N]\{\delta u_n\}, \tag{69}$$

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \dots N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \dots 0 & N_8 \end{bmatrix}, \tag{70}$$

$$\langle u_n \rangle = \langle u_1 \; v_1 \; u_2 \; v_2 \dots u_8 \; v_8 \rangle, \tag{71}$$

$$\langle \delta u_n \rangle = \langle \delta u_1 \; \delta v_1 \; \delta u_2 \; \delta v_2 \dots \delta u_8 \; \delta v_8 \rangle. \tag{72}$$

Înlocuind în (61), rezultă

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle [k] \{u_n\} - \langle \delta u_n \rangle \{f\}. \tag{73}$$

În concordanță cu (51) și (56) matricea de rigiditate elementară va avea forma :

$$\underset{16\times16}{[k]} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T [D] [B] \det(J) \, d\xi \, d\eta, \tag{74}$$

în care

$$\underset{3\times16}{[B]} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & \dots & N_{8,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & \dots & 0 & N_{8,y} \\ N_{1,x} & N_{1,y} & N_{2,x} & N_{2,y} & \dots & N_{8,x} & N_{8,y} \end{bmatrix}, \tag{75}$$

$$N_{i,x} = j_{11}N_{i,\xi} + j_{12}N_{i,\eta}; \; N_{i,y} = j_{21}N_{i,\xi} + j_{22}N_{i,\eta}; \quad i = 1, 2, \dots, 8. \tag{76}$$

Expresiile funcțiilor de interpolare N_i și ale derivatelor lor în raport cu ξ și η sînt date în tabelul nr. 3.

7. CONCLUZII

Generalitatea formulării metodei elementului finit în cadrul teoriei generale a reziduurilor ponderate se manifestă în două direcții :

(1) Posibilitatea de modelare și rezolvare a unei game extinse de probleme din fizica și mecanica mediilor continue (cap. 1, tabelul 1).

(2) Faptul că teoria reziduurilor ponderate reprezintă o integrală a principalelor metode numerice utilizate în prezent în mecanica mediilor continue (cap. 5, figura 7), creează posibilitatea cuplării a două sau trei metode în rezolvarea unor probleme de mare complexitate.

Se cunosc, în acest sens, formulări cuplate ale metodei elementelor finite cu metoda elementelor de contur [3, 7] și ale metodei elementelor de contur cu metoda diferențelor finite [3].

Se poate afirma că dezvoltarea viitoare a metodelor de calcul va duce la elaborarea de algoritmi și programe de calcul automat care vor utiliza

posibilitățile de cuplare a două sau mai multe metode de calcul, fructificînd avantajele comune și suplinind neajunsurile și limitările specifice fiecărei metode luate separat.

În cazul de față, pe baza teoriei prezentate s-a conceput algoritmul unui program de calcul multifuncțional pentru analiza termică și pentru calculul liniar și neliniar al structurilor în regim de lucru static și dinamic. Programul, organizat sub formă de blocuri funcționale, este prevăzut cu un bloc dispecer care, în funcție de problema dată de utilizator, realizează gestiunea și interconectarea blocurilor ce intervin în rezolvare. Acest

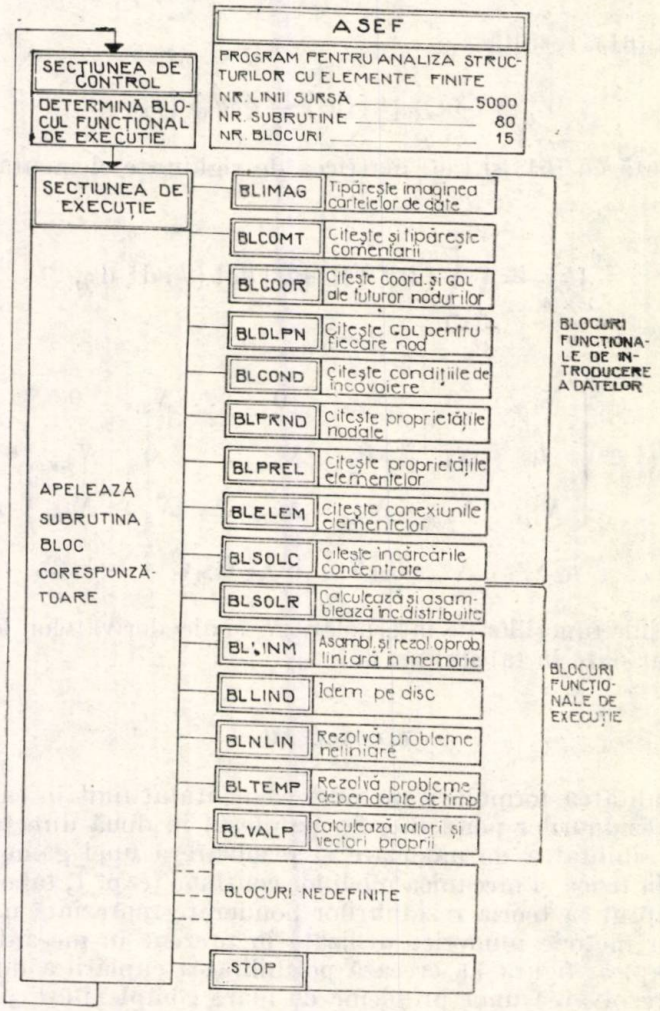


Fig. 11

fapt creează avantaje deosebite în ceea ce privește utilizarea memoriei calculatorului, și în mod deosebit pentru aplicarea în mod iterativ, pe minicalculatoare.

Programul ASEF (Analiza structurilor cu elemente finite) conține în versiunea actuală un număr de 5 000 linii sursă grupate în 15 blocuri funcționare cu un număr total de 80 subrutine. În figura 11 este prezentată

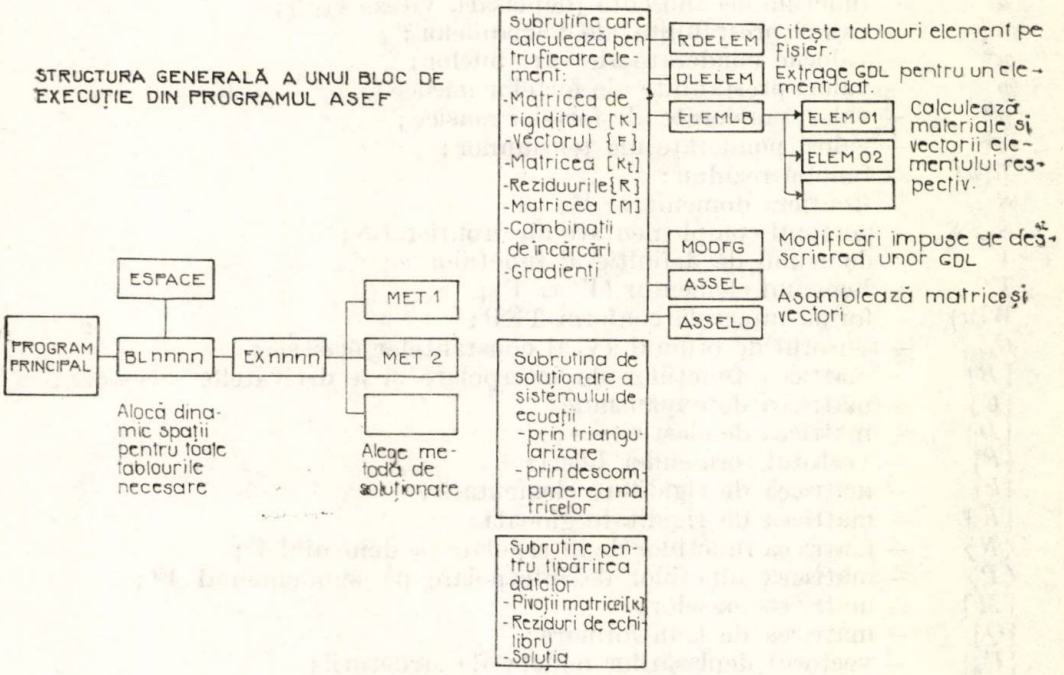


Fig. 12

schema generală a programului, iar în figura 12 schema principială a unui bloc de execuție. Programul lucrează în dublă precizie, își alocă dinamic memoria necesară și permite generarea automată a coordonatelor și a topologiei.

Primită la redacție la 29 iulie 1985

NOTAȚII

a_i — componentele vectorului funcțiilor nodale;
b_j — componentele vectorului forțelor masice;
f — forțele de suprafață pe frontiera S;
f_s — forțele de suprafață pe S_f;
f_v — forțele de suprafață pe S_v;
p_i — componentele forțelor de suprafață;
n_j — cosinusurile directoare;
δ — prima variație (Euler);
δ_{ij} — simbolul lui Kronecker;
μ, λ — constantele lui Lamé;
ε_{ij} — componentele tensorului deformației specifice;

ω_{ij} — componentele tensorului rotației specifice;
σ_{ij} — componentele tensorului tensiunilor;
ψ — funcții ponderate;
π — funcționala energetică;
u — funcțiile necunoscute (deplasări, viteze etc.);
$\bar{u}$ — valori prestabilite ale variabilelor;
u^* — valorile ponderate ale variabilelor;
$\bar{p}$ — valori prestabilite ale forțelor masice;
p^* — valori ponderate ale forțelor masice;
σ^* — valori ponderate ale tensiunilor;
$R(u)$ — funcția reziduu;
S — frontiera domeniului V;
S_f, S_v — porțiuni complementare ale frontierei S;
V — domeniul de definiție al funcțiilor u;
V^e — domeniul elementar ($V^e \subset V$);
$W(u)$ — forma integrală conform TRP;
C_{ijkl} — tensorul de ordinul IV al constantelor elastice;
$[B]$ — matricea funcțiilor de interpolare și a derivatelor acestora;
$[C]$ — matricea de expansiune;
$[D]$ — matricea de elasticitate;
$\{F\}$ — vectorul termenilor liberi;
$[k]$ — matricea de rigiditate elementară;
$[K]$ — matricea de rigiditate globală;
$\langle N \rangle$ — matricea funcțiilor de interpolare pe domeniul V;
$\langle P \rangle$ — matricea funcțiilor de interpolare pe subdomeniul V^e;
$[M]$ — matricea maselor;
$[Q]$ — matricea de transformare;
$\{U_n\}$ — vectorul deplasărilor nodale ale structurii;
(J) — Jacobianul sistemului;
$\mathcal{L}$, $\mathcal{C}$ — operatori diferențiali, integrali sau algebrici.

BIBLIOGRAFIE

1. V. I. ARNOLD, *Metodele matematice ale mecanicii clasice* (traducere din rusă). Edit. științifică și enciclopedică, București, 1980.
2. B. AVRAM, C. BOB, R. FRIEDRICH, V. STOIAN, *Structuri din beton armat. Metoda elementelor finite, teoria echivalențelor*, Edit. Academiei R.S. România, București, 1984.
3. K. J. BANERJEE, R. BUTTERFIELD, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw Hill Company (U.K.) Limited, London, 1981.
4. M. D. BENIAMINOV, *Odna forma smesannih variaționnih prințipov v teorii uprugost i*, Stroi. telnaia mehanika rasciot soorujenii Nr. 6 (114) 1977.
5. I. BORȘ, *Studiul plăcilor plane cu goluri*, Teză de doctorat, I. P. Cluj-Napoca, 1984.
6. C. BRĂTIANU, *Metode cu elemente finite in dinamica fluidelor*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1983.
7. C. A. BREBBIA, J. C. F. TELLES, L. C. WROBELL, *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1984.
8. I. CARABA, D. DUBINĂ, V. STOIAN, *Metode matematice de calcul numeric al grinzilor metalice cu moment de inerție variabil. Sesiunea interjudețeană de comunicări și referate științifice*, Buletinul științific Baia Mare, 1980.
9. E. CUTEANU, R. MARINOV, *Metoda elementelor finite în proiectarea structurilor*, Edit. Facla, Timișoara, 1980.

10. D. DÉBORDES, *Méthodes functionnelles et varriationelles. Evolution en théories modernes en élasticité en plasticité*, Ed. Bâtiments et Travaux Publics, Paris, 1979.
11. C. S. DESAI, F. J. ABDEL, *Introduction to the Finite Element Method*, V.N.R., New York, 1972.
12. B. DEMIDOVITCH, I. MARON, *Eléments de calcul numérique*, Editions Mir, Moscou, 1979.
13. G. SHATT, G. TOUZOT, *The Finite Element Method Displayed*, John Wiley, 1984.
14. G. DINCĂ, *Metode variaționale și aplicații*, Edit. tehnică, București, 1980.
15. D. DUBINĂ, V. STOIAN, E. DOGARIU, *Generalizări matematice în mecanica structurilor, Sesiunea interjudețeană de referate și comunicări științifice Baia Mare, 1979*, Buletinul Științific Baia Mare, 1980.
16. D. DUBINĂ, E. DOGARIU, *Considerații privind calculul plăcilor plane subțiri încărcate cu acțiuni concentrate și distribuite linear. Sesiunea interjudețeană de referate și comunicări științifice Baia Mare, 1979*, Buletinul științific, Baia Mare, 1980.
17. D. DUBINĂ, *Asupra unei metode de calcul a liniilor de influență cu luarea în considerare a efectului forței axiale*, Bul. șt. tehnic I. P. „Traian Vuia", seria Construcții, Tom **23 (37)** fasc. 2 (1978).
18. M. J. FORRAY, *Calculul variațional în știință și tehnică* (traducere din limba engleză), Edit. tehnică, București, 1975.
19. M. I. GELFAND, G. E. ȘILOV, *Funcții generalizate* (traducere din limba rusă), Edit. științifică și enciclopedică, București, 1983.
20. H. K. HUEBNER, *The finite Element Method for Engineers*, John Wiley, 1975.
21. B. IRONS, S. AFMAD, *Techniques of Finite Elements*, Ell's Horwood Limited, Chichester, 1980.
22. M. IVAN, D. DUBINĂ, E. DOGARIU, *Considerații privind formularea metodei elementului finit pentru calculul structurilor supuse la acțiuni dinamice*, Bul. șt. și tehn. I. P. „Traian Vuia", Seria Construcții, Tom **26** (40), fasc. 1 (1980).
23. M. IVAN, D. DUBINĂ, *The mathematical model in structural mechanics*, Bul. șt. Tech., I. P. „Traian Vuia" seria Construcții, Tom **29** (43), (1984).
24. A. PORLELA, *Boundary Solutions for the Linear Theory of Structures and Work Theorem*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **28**, nr. 1 (1983).
25. G. I. MARCIUK, *Metode de analiză numerică* (traducere din limba rusă), Edit. Academiei R.S.R. România, București, 1983.
26. H. K. NORRIE, de G. VRIES, *The Finite Element Method for Engineers*, Academic Press, New York, 1973.
27. A. C. SAHAROV, I. ALȚENBAH, *Metod konecinîh elementov v mehanike tverdîh tel*, Kiev — Vișa școla, Leipzig — VEB Fachbuchverlag, 1982.
28. H. SANDI, *Metode matriceale în mecanica structurilor*, Edit. tehnică, București, 1976.
29. G. STRANG, G. J. FIX, *An analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Inc., Englewoods cliffs, N. J. 1973.
30. I. A. SCHIOP, *Analiza unor metode de discretizare*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1978.
31. P. P. TEODORESCU, *Sisteme mecanice, modele clasice*, Edit. tehnică, București, 1984.
32. P. P. TEODORESCU, V. ILLE, *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile*, Vol. 1, Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
33. V. S. VLADIMIROV, *Ecuațiile fizicii matematice* (traducere din limba rusă), Edit. științifică și enciclopedică, București, 1980.
34. V. WUNDERLICH, E. STEIN, K. J. BATHE (coordonatori), *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Proceedings of the Europe — US Worksop, Ruhr-Universität Bochum, Germany, July 28—31, 1980*, Springer-Verlag, Berlin, Heildelberg, New York, Tokio, 1984.
35. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mc Graw Hill, London, 1971.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL FRECĂRII DINTRE FLANCURILE DINȚILOR ANGRENAJELOR CILINDRICE CU DANTURĂ DREAPTĂ

de T. MLADINESCU
Institutul Politehnic București

Se prezintă considerații teoretice care duc la existența forței de frecare de alunecare constantă, între flancurile dinților angrenajelor cilindrice pe întreg segmentul de angrenare, confirmate de unele constatări experimentale sau practice.

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

1.1. *Angrenajele cilindrice* cu dantura dreaptă evolventică sînt mecanisme formate din cîte două elemente (roțile dințate), la care profilele dinților conjugați sînt evolvente e_1 și e_2 — centroide necirculare care deci în timpul funcționării sub sarcină se rostogolesc și alunecă reciproc. Cercurile de rostogolire sînt curbe polare tangente în punctul de rostogolire C (centrul instantaneu de rotație) (fig. 1*a*). Centrele de rotație, O_1 și O_2 ale roților sînt centre de rotație absolute. Punctele N_1 și N_2 care sînt centrele

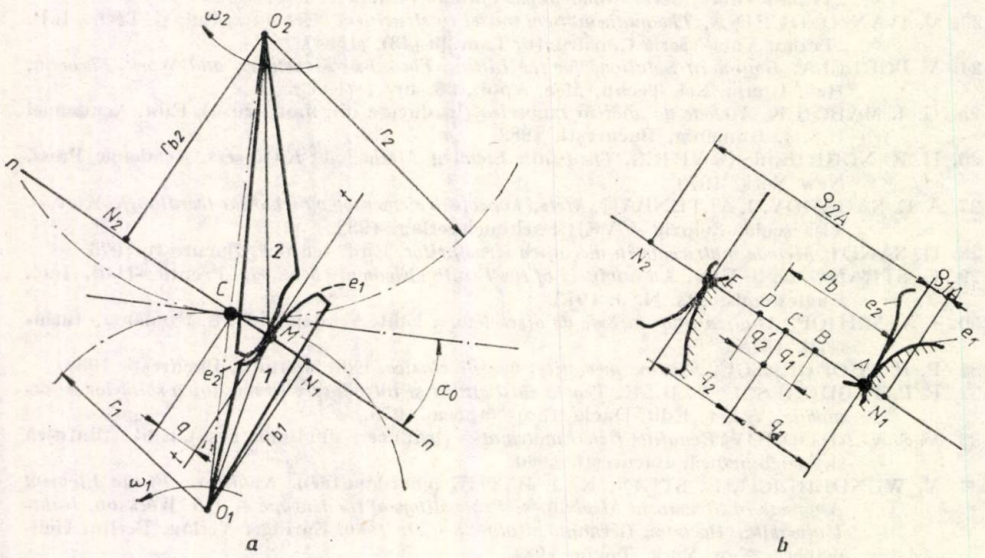


Fig. 1

de curbură ale profilelor dinților conjugați în punctul comun de contact, sînt centre instantanee de rotație relative. Centrul instantaneu de rotație C fiind coliniar atît cu O_1 și O_2, cît și cu N_1, N_2, se găsește astfel la intersecția liniei centrelor cu linia de angrenare. Profilele evolventice conjugate care se înfășoară reciproc mai sînt înfășurate și de tangenta comună $t - t$ în punctul lor de contact M, fiind perpendiculară pe N_1N_2. Se admit

ipotezele de calcul de la teoria și randamentul angrenării : profilele dinților sînt evolvente fără erori ; dinții sînt echidistant dispuși pe suprafețele de divizare și nu au joc între flancuri. Flancurile dinților, roțile și arborii sînt nedeformabile.

1.2. *Viteza de alunecare a profilelor* dinților conjugați se determină prin mai multe metode din care se reamintește metoda mișcării relative (formula Euler) sau a ecuațiilor vectoriale.

Fie M punctul de contact al profilelor dinților pe segmentul de angrenare (fig. 2*a*), M_1 și M_2 punctele de pe profilul 1, respectiv 2 care se suprapun la momentul dat cu punctul M.

Viteza punctului M pe direcția segmentului de angrenare este viteza absolută. Vitezele punctelor M_1 și M_2 în raport cu centrele roților O_1 și O_2 sînt viteze de transport, iar vitezele punctelor M_1 și M_2 pe profilele respective după tangenta comună sînt viteze relative. Astfel :

$$\bar{V}_a = \bar{V}_t + \bar{V}_r \text{ sau } \bar{V}_M = \bar{V}_{M1} + \bar{V}_{M(M1)} \text{ și } \bar{V}_M = \bar{V}_{M2} + \bar{V}_{M(M2)}. \quad (1)$$

Se observă că vitezele relative sînt egale și de sens contrar cu componentele tangențiale ale vitezelor V_{M1} sau V_{M2} ; iar viteza absolută este egală și de același sens cu componentele normale și egale ale acelorași viteze,

$$\bar{V}_{M1} = \omega_1 \bar{r}_{M1} = \omega_1 \bar{r}_{1M} ; \quad \bar{V}_{M2} = \omega_2 \bar{r}_{M2} = \omega_2 \bar{r}_{2M},$$

$$\bar{V}_{r1} = \bar{V}_{M(M1)} = \omega_1 \bar{r}_{M1} \sin \alpha_1 = \omega_1 (\bar{\rho}_{1c} - \bar{q}) ; \quad \bar{V}_{M(M2)} = \omega_2 (\bar{\rho}_{2c} + \bar{q}) = \bar{V}_{r2}. \quad (2)$$

Viteza relativă de alunecare V_{M1M2} (M_2 considerat fix) este :

$$\bar{V}_{M1M2} = \bar{V}_{M1} - \bar{V}_{M2} = \bar{V}_{r2} - \bar{V}_{r1} = \bar{V}_{M(M2)} - \bar{V}_{M(M1)} = + q(\omega_1 + \omega_2) =$$

$$= \bar{V}_{1,2} = - \bar{V}_{M2M1}, \quad (3)$$

semnul plus pe segmentul $A - C$ (sensul $O_1 N_1$), iar minus pe segmentul CE.

În punctul C :

$$V_{r1} = V_{r2} ; \text{ deci } V_{1,2} = V_{2,1} = 0.$$

Astfel, viteza relativă de alunecare este orientată după tangenta la profilele dinților conjugate în punctul de contact și variază liniar pe segmentul de angrenare cu schimbare de semn în C și avînd valorile maxime în A și E.

La angrenarea interioară :

$$V_{1,2} = V_{2,1} = q(\omega_1 - \omega_2). \quad (3')$$

Viteza absolută a punctului M :

$$V_M = \omega_1 r_{M1} + \omega_1 r_{M1} \sin \alpha_1 = p_{r(N1N2)} V_{M1} = \omega_1 \bar{r}_{M1} \cos \alpha_1 = \omega_1 r_{b1} = \text{const.} \quad (4)$$

sau

$$V_M^2 = \omega_1^2 r_{M1}^2 - \omega_1^2 r_{M1}^2 \sin^2 \alpha_1 = \omega_1^2 r_{M1}^2 \cos^2 \alpha_1,$$
$$\bar{V}_M = \omega_1 \bar{r}_{M1} \cos \alpha_1 = \omega_1 \bar{r}_{b1} = \text{const.} = \omega_1 \bar{r}_1 \cos \alpha_0 = V \cos \alpha_0 = \text{const.} \tag{4'}$$

având direcția segmentului de angrenare și sensul $N_1 - N_2$.

Relația (4') este cunoscută și din legea fundamentală a angrenării, fiind egală cu componentele normale egale ale vitezelor V_{M1} și V_{M2}. Timpul de parcurgere a unui segment q pe segmentul de angrenare este deci

$$t = \frac{q}{V \cos \alpha_0}. \tag{5}$$

1.3. *Acceleraţiile.* Se aplică tot metoda mișcării relative, respectiv a ecuațiilor vectoriale.

Mișcarea absolută a punctului M de contact a profilelor conjugate are loc în lungul segmentului de angrenare cu viteza absolută $V \cos \alpha_0 = \text{const.}$ Deci $a_M = 0$. Între M și M_1; $M - M_2$ și $M_1 - M_2$ are loc mișcarea relativă. Se pot deci scrie ecuațiile (fig. 2*a*)

$$\bar{a}_a = \bar{a}_M = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c = \bar{a}^n_{M1} + \bar{a}^t_{M1} + \bar{a}^n_{M(M1)} + \bar{a}^t_{M(M1)} + \bar{a}^c_{M(M1)} = 0,$$
$$\bar{a}_M = \bar{a}^n_{M2} + \bar{a}^t_{M2} + \bar{a}^n_{M(M2)} + \bar{a}^t_{M(M2)} + \bar{a}^c_{M(M2)} = 0 \tag{6}$$

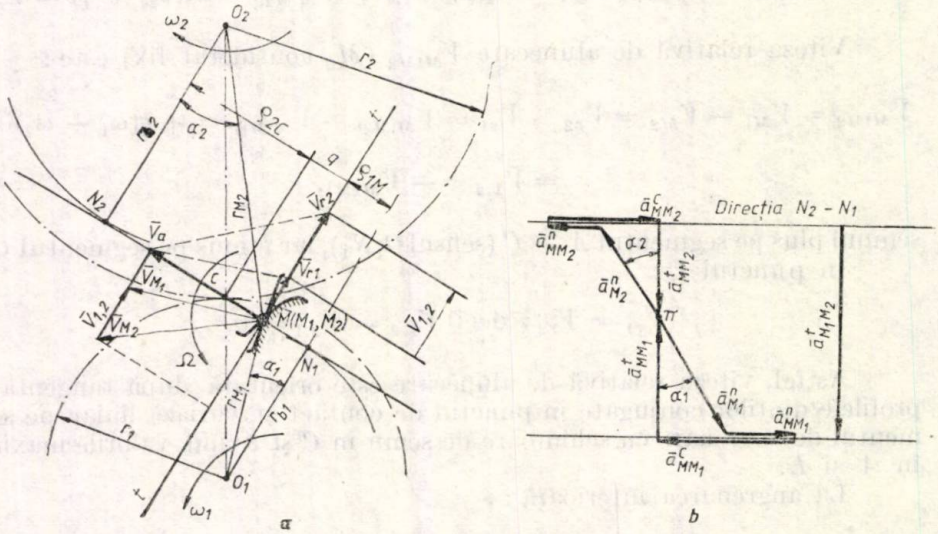


Fig. 2

sau

$$\bar{a}_M = \omega_1^2 \bar{r}_{M1} + 0 + \omega_1^2(\bar{\rho}_{1c} \pm \bar{q}) + \bar{a}^t_{M(M1)} + 2\omega_1^2(\bar{\rho}_{1c} \pm \bar{q}) = 0,$$
$$\bar{a}_M = \omega_2^2 \bar{r}_{M2} + 0 + (\bar{\rho}_{2c} \mp \bar{q}) + \bar{a}^t_{M(M2)} + 2\omega_2^2(\bar{\rho}_{2c} \mp \bar{q}) = 0. \tag{6'}$$

Construind planul acceleraţiilor (fig. 2*b*) se determină cele două necunoscute $\bar{a}^t_{M(M1)}$ şi $\bar{a}^t_{M(M2)}$:

$$\begin{aligned} a^t_{M(M1)} &= a^n_{M1}\cos\alpha_1 = \omega_1^2 r_{M1}\cos\alpha_1 = \omega_1^2 r_{b1}, \\ a^t_{M(M2)} &= a^n_{M2}\cos\alpha_2 = \omega_2^2 r_{M2}\cos\alpha_2 = \omega_2^2 r_{b2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Acceleraţia de alunecare relativă pe direcţia tangentei comune la profile în M este :

$$a^t_{M1M2} = a^t_{1,2} = -a^t_{M(M2)} - (+a_{M(M1)}) = -(\omega_2^2 r_{b2} + \omega_1^2 r_{b1}) = -r_{b2}\omega_2(\omega_2 + \omega_1) =$$

$$= -r_{b2}\,\omega_2^2(\mathrm{i}+1) = \text{const.} \tag{8}$$

Acceleraţia relativă de alunecare $\breve{a}^t_{M1M2}$ are sensul acceleraţiei $\breve{a}^t_{M(M2)}$ pe întreg segmentul de angrenare $A - E$.

În mod analog se pot calcula $a^n_{M(M1)}$, $a^n_{M(M2)}$ şi $a^n_{(M1M2)}$:

$$a^n_{M1M2} = \omega_2^2\,[\rho_{2c}(\mathrm{i}+1) \mp q(\mathrm{i}^2-1)], \tag{9}$$

semnul minus pe segmentul AC, iar plus pe CE. Sensul spre N_2.

Acceleraţia a^t_{M1M2} se obţine şi prin derivarea în raport cu timpul a vitezei $V_{1,2}$:

$$a^t_{M1M2} = a^t_{1,2} = \frac{\mathrm{d}V_{1.2}}{\mathrm{d}t} = \frac{-\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(\omega_1+\omega_2) = -V\cos\alpha_0(\omega_1+\omega_2) =$$

$$= -\omega_2 r_{b2}\,(\omega_1+\omega_2) = \text{const.} \tag{8'}$$

Pentru profilul e_2 :

$$a^t_{M2M1} = -\,a^t_{M1M2} = +r_{b2}\omega_2(\omega_1+\omega_2) = +r_{b2}\omega_2^2\,(\mathrm{i}+1) = \text{const.} \tag{10}$$

1.4. La determinarea forţei corespunzătoare acceleraţiei relative a^t_{M1M2} intervin masele, în general diferite ale punctelor M_1 şi M_2, dar acceleraţia rezultantă $a^t_{M1M2} = a^t_{1,2}$ rămîne aceeaşi, ea rezultînd şi ca derivată a vitezei $V_{1,2}$. Apoi, punctul M coincide simultan cu M_1 de masă m_1, şi M_2 cu masa m_2, apărînd necesitatea unei mase echivalente unice m_e, care se obţine din ecuaţia fundamentală a mişcării relative :

$$m\bar{a}_r = m\bar{a}_a - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c, \tag{11}$$

care, proiectată pe direcţia tangentei comune profilelor în M şi cu $a_a = 0$, devine :

$$ma^t_{M(M1)} = m_1 r_{b1}\omega_1^2, \text{ respectiv } ma^t_{M(M2)} = -\,m_2 r_{b2}\omega_2^2.$$

Forţa rezultantă ma^t_{M1M2} este

$$m_1 r_{b1}\omega_1^2 + m_2 r_{b2}\omega_2^2 = m_1 r_{b2}\,\mathrm{i}\omega_2^2 + r_{b2}\omega_2^2 m_2 = r_{b2}\omega^2\,(\mathrm{i}m_1 + m_2). \tag{12}$$

Cum accelerația forței relative este $a'_{M1M2} = r_{b2}\omega_2^2 (i + 1)$, rezultă

$$m_e r_{b2}\omega_2^2 (i + 1) = (im_1 + m_2) r_{b2}\omega_2^2. \qquad (12')$$

Deci

$$m_e = \frac{im_1 + m_2}{i + 1} \text{ sau } m_e = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (13)$$

Ambele expresii duc pentru $m_1 = m_2$ la $m_e = m_1$ sau pentru $m_2 = im_1$, la $m_e = \frac{2im}{i + 1}$ (în kg/cm).

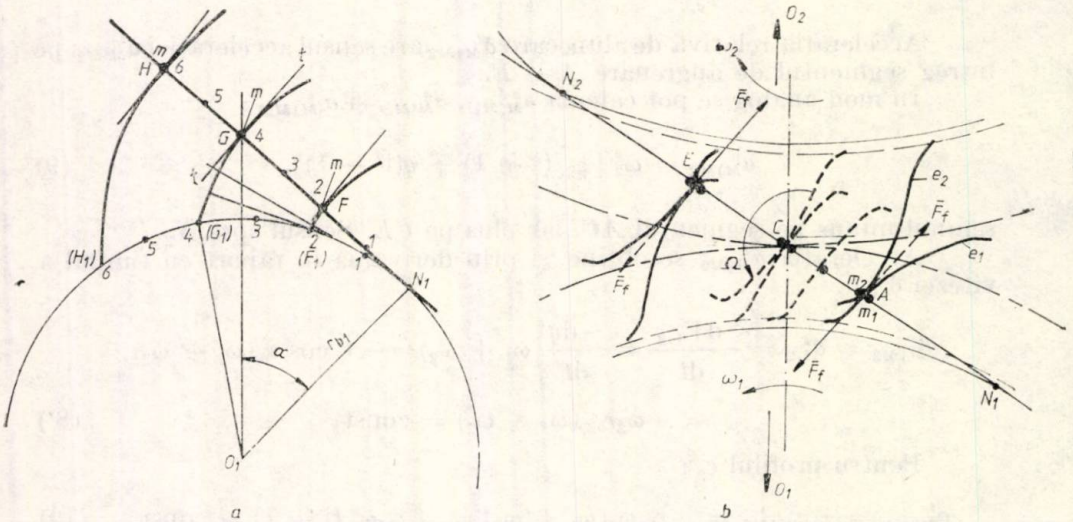


Fig. 3

Masa m_1 este masa care revine unui dinte din masa roții *1*, concentrată pe cercul de bază respectiv, iar m_2 este masa care revine unui dinte din masa roții *2*.

Într-adevăr (fig. 3a), o rază de curbură N_1H a trei evolvente echidistante, cuprinzînd profilele active a trei dinți succesivi, este egală cu arcul N_1H_1 de pe cercul de bază corespunzător și are masa egală cu masa arcului N_1H_1.

Dinstanțele $\|N_1F\|$; $\|FG\|$ și $\|GH\|$ dintre profilele active evolventice a celor trei dinți succesivi fiind egale, masa arcului N_1H se repartizează egal pe fiecare din aceste distanțe, fiind concentrată la mijlocul fiecăreia. Se repartizează apoi între cele două profile adiacente, în punctele de contact cu raza de curbură comună, revenind astfel în punctele G și F masa m_1, iar în N_1 și H masele $m_1/2$. Dar, ținînd seama că după H urmează un alt profil evolventic activ (I), se adaogă $m_1/2$ de la segmentul HI, astfel că și la acesta se completează masa m_1. La fel, pentru N_1, cît și pentru toți ceilalți dinți reprezentați prin profilele lor active. La deplasarea unui

profil pe segmentul de angrenare cu viteza $V \cos \alpha_0 = \text{const.}$, se deplasează toate celelalte profile cînd ajung în contact, deci masa m_1 se menţine în toate punctele succesive de angrenare (fig. 3*b*). Masa punctiformă $m_{1,2}$ are în punctul de contact şi în vecinătate sa forma profilelor respective din acea mică zonă.

Valoarea masei m_1 se determină astfel : roata dinţată *1*, care în general face corp comun cu arborele, se prezintă ca un cilindru omogen cu diametrul egal cu cel de divizare d_1 şi înălţimea egală cu un cm (mişcarea fiind plană). Atunci,

$$M_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 \cdot 1 \text{ cm} \cdot \rho_1. \tag{14}$$

Din această masă concentrată pe cercul de bază, masa care revine unui dinte este

$$m_1 = \frac{M_1}{z_1} \text{ (kg/cm)}. \tag{14'}$$

Masa roţii *2*, dacă este tot de formă cilindrică plină, are valoarea :

$$M_2 = \frac{\pi}{4} (\mathrm{i}\, d_1)^2 \cdot 1 \text{ cm} \cdot \rho_2 = \mathrm{i}^2 M_1 \qquad \text{— cînd } \rho_2 = \rho_1, \tag{15}$$

iar masa care revine unui dinte :

$$m_2 = \frac{M_2}{z_2} = \frac{\mathrm{i}^2 M_1}{\mathrm{i} z_1} = \mathrm{i} m_1. \tag{15'}$$

Forma constructivă a roţii *2* poate fi masivă, cu avantajul stabilităţii dimensionale la tratamente termice şi a unei bune amortizări a vibraţiilor ; sau se execută cu goluri (disc drept ori înclinat adesea prevăzute cu găuri) prin forjare sau turnare, cu avantajul economiei de material şi reducerii greutăţii plus creşterii pulsaţiei vibraţiilor proprii. Astfel, masa m_2 are valori cuprinse între $\mathrm{i} m_1$ la roţi masive şi $m_2 = m_1$ cînd roata *2* este cu goluri ajungînd la $M_2 = \mathrm{i} M_1$.

2. FRECAREA DE ALUNECARE DINTRE FLANCURILE DINŢILOR CONJUGAŢI

Se admite, ca şi în calculul clasic al forţei de frecare dintre flancurile conjugate, că rigiditatea dinţilor este variabilă pe segmentul de angrenare.

Alunecarea relativă cu viteza $V_{1,2}$ a profilului e_1 pe profilul e_2 pe direcţia tangentei comune $t - t$ în punctele lor succesive de contact începe în punctul A şi schimbă de sens în C. Ca efect apare în sens contrar forţa de frecare de alunecare F_f care asigură rostogolirea reciprocă a profilelor. Frecarea de rostogolire este neglijabilă ca şi deformarea elastică a flancurilor dinţilor care o provoacă.

2.1. *Mărimea forţei de frecare de alunecare* F_f, rezultă din ecuaţia de echilibru relativ, proiectată pe direcţia $t - t$. Ecuaţia generală de echilibru relativ este

$$\Sigma \bar{F}_{ex} = m_e \bar{a}_t = (m_1 \bar{a}^n_{M1} + m_2 \bar{a}^n_{M2}), \tag{16}$$

în care $m_e\bar{a}_t$ este forța de transport rezultantă în mișcarea relativă a maselor m_1 și m_2 ale dinților conjugați. $\Sigma\bar{F}_{ex}$ este formată din forța normală de transmis $F_{n1.2}$ și reacțiunea $R_{2.1}$ a legăturii dintre m_1 și m_2 (deoarece $F_{n1.2}$ nu are aceiași direcție cu $m_e\bar{a}_t$ (fig. 4 *a*, *b*), astfel

$$\bar{F}_{n1.2} + \bar{R}_{2.1} = m_e\bar{a}_t. \tag{16'}$$

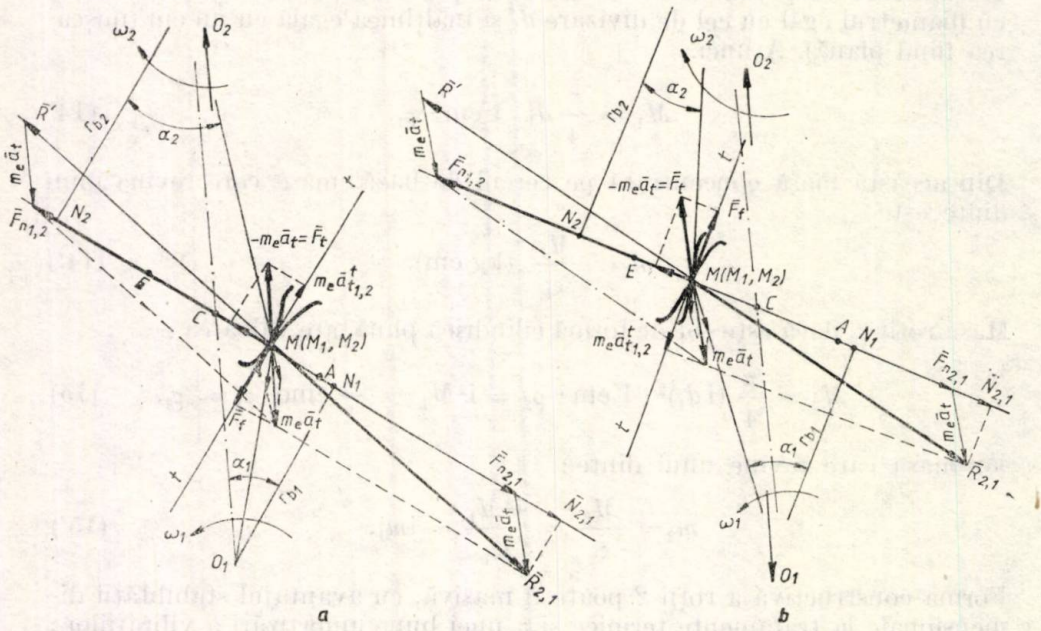


Fig. 4

Rezultă că accelerația $\bar{a}_t$ este indirect produsă de forța exterioară $F_{1.2}$ deoarece în prezența reacțiunii $\bar{R}_{2.1}$ pe direcția forței $\bar{F}_{n1.2}$ respectiv a segmentului de angrenare, nu există accelerație (mișcarea fiind rectilinie și uniformă). Mai evident apare fenomenul, dacă se descompune $\bar{F}_{n1.2}$ în componentele $m_e\bar{a}_t$ și $\bar{R}'$ (care, fiind egală și de sens contrar cu $\bar{R}_{2.1}$ nu produce accelerație). Forța de transport este sensibil mai mică comparativ cu $\bar{F}_{n1.2}$ și $R_{2.1}$ decît în reprezentarea grafică din figura 4.

Ecuația (16') se mai poate scrie :

$$\bar{F}_{n1.2} + \bar{R}_{2.1} + (-m_e\bar{a}_t) = \bar{F}_{n1.2} + \bar{R}_{2.1} + \bar{F}_t = 0, \tag{17}$$

în care F_t este forța de transport complementară (inerțială). S-a neglijat greutatea ce revine unui dinte deoarece este nesemnificativă în raport cu cea mai mică din celelalte forțe.

Prin introducerea reacțiunii $\bar{R}_{2.1}$ punctul material $M_1(M)$ devine liber pe profilul conjugat, respectiv pe tangenta $t - t$ la acesta. Forța de transport $m_e\bar{a}_t$ menține acest punct pe linia de angrenare la intersecția

cercurilor $O_1M_1(M)$ și $O_2M_2(M)$ în planul mobil al roților dințate conform cinematicii angrenării. Astfel, pe segmentul AC (fig. 4*a*) punctul M_1 și profilul e_1 tinzînd să urce pe profilul conjugat e_2, forța $m_e\bar{a}_t$, care include frecarea de alunecare dintre profile, se opune acestei tendințe de urcare-alunecare, menținîndu-l pe linia de angrenare. Forța de transport complementară $\bar{F}_t$ îndeplinește un rol similar pe segmentul CE pe care M_1 și profilul e_1 tind să coboare (fig. 4*b*). Ea se opune tendinței de coborîre-alunecare asigurînd menținerea lui M_1 pe linia de angrenare, deoarece include de asemenea frecarea și deși este inerțială are — în planul mobil al mișcării relative care îi dă naștere — o existență reală.

Sub forma proiectată pe direcția $t - t$ și ținînd seama de (12) și (13), cît și de figurile 4 *a*, *b*, ecuația (17) se prezintă astfel :

$$0 - (m_1r_{b1}\omega_1^2 + m_2r_{b2}\omega_2^2) + F_f = - r_{b2}\omega_2^2(im_1 + m_2) + F_f =$$

$$= -m_er_{b2}\omega_2^2\,(i + 1) + F_f = 0,$$

de unde

$$\bar{F}_f = m_er_{b2}\omega_2^2(i + 1) = m_ea_{l1,2}^t = \text{const} = m_ea_{1,2}^t. \tag{18}$$

Astfel, pe segmentul AC, forța de frecare F_f acționează asupra punctului material $M_1(M)$ liber pe discul rotativ conducător ca o forță centripetă componentă a forței de transport, respectiv a reacțiunii $R_{2,1}$ echilibrînd componenta forței complementare F_t de tip centrifugal. Pe segmentul CE forța de frecare acționează asupra punctului M_1 ca o forță centrifugală — componentă a forței F_t echilibrînd forța de tip centripet — componentă a forței de transport. Este constantă pe întreg segmentul de angrenare AE cu schimbare de sens în C.

2.2. *Reacțiunea normală* N_{21} se determină prin proiectarea ecuației (17) pe direcția N_1N_2, ținînd seama de (9), (13) și figura 4 :

$$-F_{n1,2} - m_e\omega_2^2\,[\rho_{2c}(i + 1) \mp q(i^2 - 1)] + N_{21} = 0, \tag{19}$$

$$N_{21} = F_{n1,2} + m_e\omega_2^2\,[\rho_{2c}(i + 1) \mp q(i^2 - 1)]. \tag{20}$$

Se constată că reacțiunea normală N_{21} este ușor variabilă pe lungimea segmentului de angrenare, crescînd de la A spre E. Valoarea medie a forței variabile suplimentare F_{sm} este

$$m_e\omega_2^2\left[\frac{\dfrac{\rho_{2c}(i + 1) - q(i^2 - 1)}{2} + \dfrac{\rho_{2c}(i + 1) + q(i^2 - 1)}{2}}{2}\right] \cong$$

$$\cong m_e\omega_2^2\;\rho_{2c}\,\frac{i + 1}{2} = F_{sm}. \tag{21}$$

S-a neglijat termenul $\dfrac{q_1 - q_2}{4}(i^2 - 1)$, fiind mult mai mic decît $\rho_{2c}\dfrac{i + 1}{4}$.

De asemenea, F_{sm} este cu mult mai mic decît F_f și cu totul neglijabil față

de $F_{n1,2}=F_{n2,1}$. Momentul forței F_{sm} în raport cu O_1, notat M'' reprezintă suplimentul de moment motor care trebuie dezvoltat pentru a menține $M_{t2} = \mathrm{i}M_{t1} = \text{const.}$, printr-un consum suplimentar de putere motoare. Forța normală suplimentară este componenta pe direcția normalei la profile, a forței de transport complementare F_t.

2.3. *Ecuația de momente în raport cu* N_1

$$J\dot{\Omega} + m_e a^t_{t1,2} \cdot \rho_{1x} = M' = F_f \rho_{1x} = M'_{f(x)} \tag{22}$$

în care $\varepsilon = \dot{\Omega} = 0$, deoarece $\Omega = \omega_1 + \omega_2 = \text{const.}$

$\rho_{1x} = \rho_{1c} \mp q_x$ iar M' este tot un moment suplimentar datorat frecării de alunecare dintre flancurile dinților care trebuie dezvoltat pentru menținerea vitezei unghiulare $\Omega = \text{const.}$, printr-un consum corespunzător de putere motoare.

Condiția (22) se poate pune și față de centrul instantaneu de rotație C, deoarece rotirea roții *1* (și a profilelor dinților ei) în jurul lui O_2, respectiv N_2 cu viteza unghiulară $-\omega_2$, iar în jurul lui O_1, respectiv N_1 cu ω_1 este echivalentă cu rotirea ei în jurul lui C cu $\Omega = \omega_1 + \omega_2$.

În această situație

$$m_e a^t_{1,2} q_x = M' = F_f q_x = M'_{F(x)} \text{ în } \mathrm{N} \cdot \mathrm{cm/cm}. \tag{23}$$

cu valori maxime și de același sens în A și E; dar $M'_{F(A)} > M'_{F(E)}$ (fiindcă $q_1 > q_2$) și cu suficientă exactitate momentul de frecare mediu este

$$M'_{F(m)} = \frac{F_f \dfrac{q_1}{2} + F_f \dfrac{q_2}{2}}{2} = F_f \frac{q_1 + q_2}{4} = F_f q_m = \mu F_{n2,1} q_m. \tag{24}$$

Aceeași valoare medie se obține și pentru $M'_{f(x)}$ calculat cu relația (22). În acest caz momentele pe segmentul AC sînt de sens contrar cu cele pe CE, deci

$$M'_{f(m)} = \frac{F_f\left(\rho_{1c} + \dfrac{q_x}{2}\right) - F_f\left(\rho_{1c} - \dfrac{q_x}{2}\right)}{2} = F_f \frac{q_1 + q_2}{4}. \tag{24'}$$

Și cum în calculul puterii consumate prin frecare se ia în considerare momentul mediu de frecare, rezultă că este indiferent punctul de reper (N_1 sau C).

2.4. *Coeficientul de frecare de alunecare* (μ) se calculează din relația

$$F_{f_{(A-E)}} = \mu N_{2,1(A-E)} = \text{const.} = m_e a^t_{t1,2}. \tag{25}$$

Atribuită lui Amontons și Coulomb sub forma : $F_f = \mu N$ pentru frecarea uscată, relația s-a dovedit valabilă și pentru frecarea mixtă și limită, prin valori diferențiate pentru coeficientul de frecare μ, deoarece la aceeași valoare a forței F_f, efectele diferă după cum ea este uscată, mixtă sau

limită. La fel cum la același h_j sau h_{min} ungerea EHD nu este fluidă decît dacă $X_h = \frac{h_{min}}{\sigma} \geqslant 3{,}5$. Altfel, ungerea este parțial EHD limită sau mixtă [4].

Pe de altă parte, valorile medii minime date în literatura de specialitate pentru μ la angrenaje cilindrice fiind $\mu = 0{,}04-0{,}07$, rezultă că la acestea nu are loc practic ungerea (frecare) fluidă, la care $\mu \leqslant 0{,}005$, concluzie confirmată și din exemple de calcul EHD [4] Valoarea $\mu = 0{,}02$ se dă numai în [1].

Deci, relația (25) este practic aplicabilă în toate cazurile de frecare (ungere) de la angrenajele cilindrice. Reacțiunea normală $N_{2,1}$ nu este riguros constantă după cum s-a arătat (20), dar diferența față de $F_{n2,1}$ fiind neglijabilă, se poate admite că $N_{2,1} = F_{n2,1}$. Examinarea relației (25) duce la următoarele constatări și considerații.

a) $\mu F_{n2,1} = m_e a^t_{t1,2} = -\text{const.}$, exprimă variația hiperbolică a coeficientului de frecare în funcție de forța normală $F_{n2,1}$. Pe segmentul AB și DE cu salturi în punctele B și D, cu paliere pe BC și CD (fig. 5*a*). Cum forța de frecare schimbă de semn în C, s-a reprezentat punctat și schimbarea de semn a coeficientului de frecare pe segmentul CE,

— pe segmentul de intrare în angrenare AB forța normală crește pentru angrenaje corect executate de la aproximativ $0{,}4\,F_{n2,1}$ la $\approx 0{,}6\,F_{n2,1}$, iar μ scade de la o valoare maximă μ_A la o valoare minimă μ_B(în B), cu saltul corespunzător creșterii forței în B ajungînd $\mu_c < \mu_B$;

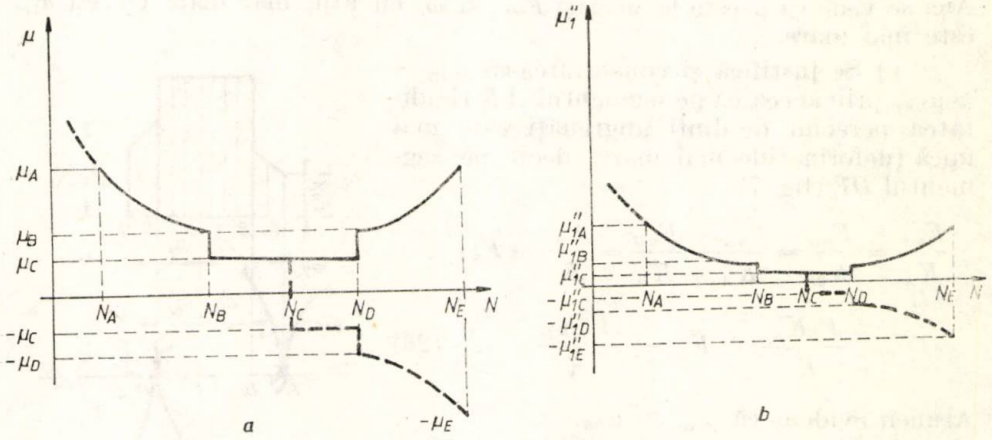


Fig. 5

— pe segmentul BD, forța normală avînd valoarea $F_{nAB} = \text{const.}$ μ păstrează valoarea μ_c, putindu-se reprezenta și cu schimbare de semn în C; iar în D crește la μ_D corespunzător scăderii prin salt a forței normale la $\approx 0{,}6\,F_{n2,1}$;

— pe segmentul DE forța normală scade de la $\approx 0{,}6\,F_{n2,1}$ la $\approx 0{,}4\,F_{n2,1}$, iar μ crește de la μ_D la μ_E.

Aceste variații ale coeficientului de frecare explică de ce pe segmentele AB și DE fenomenele tribologice negative sînt mai accentuate decît pe BD, iar ungerea mai slabă, așa cum se vede pe figurile 6 *a*, *b* [4] deși forța de frecare F_f este aceeași (diferind însă coeficienții de frecare). De

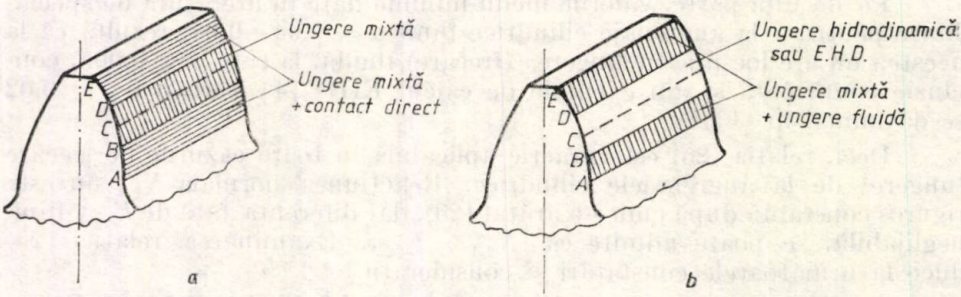


Fig. 6

altfel și E. Buckingham [1] a găsit experimental că μ scade o dată cu micșorarea vitezei de alunecare și invers, adică în punctele A și $E\mu$ este maxim, iar în apropiere de C este minim. Valorile le-a dat însă pentru viteza de alunecare medie : pentru $V_{2,1(m)} = 2$ m/s, $\mu = 0{,}04$; iar pentru $V_{2,1(m)} = 0{,}5$ m/s, $\mu = 0{,}02$.

b) $\mu F_{n2,1} = m_e a^t_{t2,1} = F_f$, confirmă și afirmațiile unor cercetători că uzura flancurilor dinților angrenajelor depinde nu numai de viteza de alunecare ci și de accelerația relativă de alunecare fără însă a justifica [2]. Aici se vede că μ este la aceiași $F_{n2,1}$ și m_e cu atît mai mare cu cît $a^t_{1,2}$ este mai mare.

c) Se justifică și constatarea că $\mu_{AB} > \mu_{DE}$, prin aceea că pe segmentul AB rigiditatea perechii de dinți angrenați este mai mică (deformațiile mai mari) decît pe segmentul DE (fig. 7)

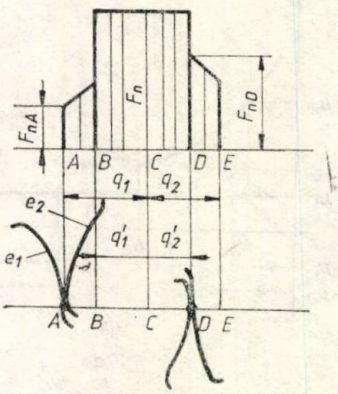


Fig. 7

$$\frac{F_{nA}}{K_A} = \frac{F_{nD}}{K_D} = \frac{F_{nA} + F_{nD}}{K_A + K_D} = \frac{F_n}{K} \rightarrow F_{nA} =$$

$$\frac{F_n K_A}{K} < F_{nD} = \frac{F_n K_D}{K} . \qquad (26)$$

Atunci, evident că $\mu_{AB} > \mu_{DE}$.

— De asemenea, modificarea zero a angrenajelor face ca odată cu egalizarea alunecărilor specifice, să se realizeze și egalizarea rigidităților dinților și astfel și a coeficienților de frecare pe segmentele AB și DE.

d) Se observă totodată că variația coeficientului de frecare este similară cu a alunecărilor specifice. Cînd raportul de transmitere $i = 1$ se obține o variație simetrică a coeficienților de frecare față de punctul de rostogolire (C) cu salturi în B și D.

e) La dantura flancată variația continuă a lui μ corespunde variației similare a forței $F_{n2,1}$ și îi corespunde variația continuă a regimului de ungere cu influență pozitivă la vibrații.

f) În punctul C există accelerația ($a^t_{t1,2} = -a^t_{t2,1} \neq 0$) cît și masa m_e. Există deci frecare de alunecare F_f care schimbă de semn în C, dar nu există alunecare ($V_{1,2} = -V_{2,1} = 0$). Are loc astfel rostogolire fără alunecare.

g) Forța de frecare $F_f = m_e a^t_{1,2}$ fiind constantă pe întreg segmentul AE, caracterizarea efectelor ei pe segmentele parțiale se face prin calculul puterii consumate prin frecări : $\mu F_{nx} V_{1,2x} = P_{fx}$. Astfel,

$$P_{fAB} > P_{fDE} > P_{fCD}. \tag{27}$$

Puterea consumată într-un punct x se poate exprima și astfel :

$$P_{fx} = \mu_x F_{n2,1(x)} V_{1,2(x)} = F_f q_x \Omega = M'_{F(x)} \Omega. \tag{28}$$

Puterea totală consumată prin frecare corespunde momentului de frecare mediu :

$$P_f = M'_{F(m)} \Omega = F_f q_m \Omega = \mu F_{n2,1} q_m \Omega = \mu F_{n2,1} V_{1,2(m)}. \tag{29}$$

Calculul exact al vitezei medii de alunecare se dă în [3]. Cu suficientă aproximație se poate înlocui $M'_{F(m)}$ cu expresia (24') ajungînd la :

$$P_f = F_f \frac{q_1 + q_2}{4} \Omega = \mu F_{n2,1} \frac{\varepsilon p_b}{4} (\omega_1 + \omega_2) = \mu \pi P_1 \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \tag{30}$$

și apoi la relația cunoscută a randamentului angrenării dedusă în [3] :

$$\eta_{la} = 1 - \frac{P_f}{P_1} = 1 - \mu \pi \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right). \tag{31}$$

h) În relația de mai sus trebuie introdusă valoarea lui μ_{BD} adică valoarea minimă și nu media valorilor coeficienților de frecare μ_{AC} și μ_{CE}, cum se obișnuiește, deoarece $F_{n2,1}$ din relația (30) are valoarea maximă și ca atare μ va fi cel minim.

i) Ținînd seama că există un consum de putere motoare corespunzător momentului suplimentar $M'' = F_{sm} r_{b1}$, rezultă că relația (31) nu este completă, Randamentul η_{la} găsit experimental incluzînd și pierderile suplimentare duce la concluzia că valorile coeficientului μ deduse (menționate deja) compensează lipsa, dar ele sînt mai mari decît cele reale.

2.5. *Valorile coeficientului de frecare* μ se obțin din relația :

$$\mu_{AC} = \frac{F_f}{F_n} = \frac{m_e a^t_{t1,2}}{F_{n2,1(AC)}} \tag{32}$$

pentru orice punct al segmentului de angrenare AE (considerînd $N_{2,1} \cong F_{n2,1}$, justificat mai înainte).

a) În zona de angrenare unipară, μ_{BD} are valoarea minimă :

$$\mu_{BD} = \frac{m_e a^t_{t1,2}}{F_{n2,1(BD)}}. \tag{33}$$

b) În punctul A ca și în alte puncte pe segmentele de angrenare bipară,

$$\mu_A = \frac{m_e a^t_{t1,2}}{F_{n2,1(A)}} \cdot \tag{34}$$

Coeficientul de frecare ca valoare depinde deci de masa m_e, adică de dimensiunile și forma constructivă ale roților dințate și densitatea materialului; de accelerația $a^t_{1,2}$ care implică r_{2b}, viteza unghiulară ω_2^2 și raportul de transmitere; de forța normală nominală ($F_{n2,1BD}$), respectiv de momentul transmis pentru μ_{BD}, sau de partea corespunzătoare din forța nominală pentru μ_{A-B} și μ_{DE}; de duritatea flancurilor dinților, clasa de precizie, poziția roții pe arbore (elemente care determină raportul b/a, sau b/m și astfel valoarea forței nominale pe 1 cm din lățimea b a roților). Cuplul de material intervine atît prin masa m_e și parametrii de care depinde, de accelerația $a^t_{t1,2}$ și elementele ei, de forța nominală și parametrii ei, ca și de lubrifiant și mod de ungere.

Interdependența dintre parametrii de care depinde μ, face ca modificarea unora să atragă și modificarea celorlalți pentru menținerea sau modificarea dorită pentru valoarea lui μ.

Se ia ca exemplu cazul unui reductor cu : $a = 200$ mm; $P_1 = 30$ kW $m = 4$ mm; $\alpha_0 = 20°$; $r_1 = 50$ mm; $r_2 = 150$ mm; $n_1 = 1500$ rot/min; $i = 3$; $z_1 = 25$; $b = 50$ mm; flancuri durificate cu $R_{a1} = R_{a2} = 1$ μm și unse ($\eta_0 = 0{,}75$P)

$$a^t_{t1,2} = r_{b2}\omega_2^2(i+1) = 0{,}141 \cdot 52{,}3^2\,(3+1) = 1545 \text{ m/s}^2,$$

$$M_1 = \pi r_1^2 \cdot 1 \cdot \rho = \pi\, 5^2 \cdot 1 \cdot 7{,}85 = 620 \text{ g/cm} = 0{,}62 \text{ kg/cm},$$

$$m_1 = \frac{M_1}{z_1} = \frac{0{,}62}{25} = 0{,}0248 \text{ kg/cm},$$

$$M_{t1} = 95500\,\frac{P_1}{n_1} = 1920 \text{ daN} \cdot \text{cm}; \quad F_n = \frac{M_{t1}}{r_1 \cos\alpha_0} = 420 \text{ daN},$$

$$F_{n2,1} = \frac{F_n}{b} = \frac{420}{5} = 84 \text{ daN/cm} = 840 \text{ N/cm}; \quad m_2 = m_1 =$$

$$= m_e = 0{,}0248 \text{ kg/cm},$$

$$\mu_{BD} = \frac{m_e a^t_{t1,2}}{F_{n2,1}} = \frac{0{,}0248 \cdot 1545}{840} = 0{,}0456.$$

În cazul cînd m_2 ar fi egal cu $im_1 = 3 \cdot 0{,}0248 = 0{,}0844$ kg/cm,

$$m_e = \frac{2im_1}{i+1}; \quad \mu'_{BD} = 2i/i+1 \cdot \mu_{BD} = \frac{6}{4}\,\mu_{BD} = 0{,}0784.$$

Valoarea $\mu_{BD} = 0{,}0456$ corespunde ungerii mixte ($\mu = 0{,}005 \ldots 0{,}1$) și nu ungerii limită la care $\mu = 0{,}1 \ldots 0{,}3$. La fel și pentru $\mu'_{BD} = 0{,}0784$.

$$v_{t1} = r_1 \omega_1 \sin \alpha_0 = 5 \cdot 157 \cdot 0{,}342 = 268 \text{ m/s} = V_{t2},$$

$$\rho = \frac{r_1 \sin \alpha_0 \cdot r_2 \sin \alpha_0}{(r_1 + r_2) \sin \alpha_0} = 1{,}28 \text{ cm}; \quad \sigma_{Hmax} = 0{,}418 \sqrt{\frac{EF_{n2,1}}{\rho}} =$$

$$= 490 \text{ MPa} > 14 \text{ MPa}.$$

a) Aplicînd calculul EHD cu relația simplificată [4] în punctul C, se obține :

$$h_{min} = (0{,}035 \ldots 0{,}05) \sqrt{r_{i0}(V_{t1} + V_{t2})} = (0{,}035 \ldots 0{,}05) \sqrt{0{,}75 \cdot 563 \cdot 1{,}28} =$$

$$= (0{,}8 \ldots 1{,}14) \ \mu\text{m}.$$

Dacă se aplică calculul complet cu produsul $G_0 V_v N_m^{-\frac{1}{8}}$ [4] se găsește $h_{min} = 1{,}3$ μm.

Rugozitatea echivalentă fiind $\sigma = \sqrt{R_{a1}^2 + R_{a2}^2} = 1{,}41$ μm, parametrul filmului de lubrifiant X_h este :

$$X_h = \frac{h_{min}}{\sigma} = \frac{1{,}3}{1{,}41} = 0{,}925 \text{ ; sau } X_h = \frac{1{,}14}{1{,}41} = 0{,}82.$$

Din diagrama 4.15 [4] rezultă deci regim de ungere mixt sau limită și în cazul deformării elastice a flancurilor dinților necesară la regim EHD.

b') În punctul A :

$$\mu_A = \frac{m_e a'_{t1,2}}{0{,}4 F_{n2,1}} = \frac{38{,}5}{0{,}4 \cdot 840} = 0{,}114; \quad \mu'_A =$$

$$= \frac{2i}{i+1} \mu_A = 0{,}171 \rightarrow \text{ungere limită}.$$

c. Dacă dantura este încărcată cu o forță $F'_{n2,1} < F_{n2,1}$ (pe baza căreia s-au dimensionat danturile) se obține din relația (33) o valoare μ_{BD} mai mare decît pentru forța $F_{n2,1}$ și ca atare randamentul angrenării este mai mic, iar eficiența economică a angrenajului scăzută, fapt confirmat de practică. Nu este deci indicat a subîncărca angrenajul. O excepție o constituie rodajul danturii cînd la încărcări mici și foarte mici se realizează coeficienți de frecare mari prin care se grăbește această operație.

d. Cînd încărcarea $F''_{n2,1} > F_{n2,1}$ (nominal) la aceleași dimensiuni ale angrenajului, rezultă că μ_{BD} se micșorează. Dacă depășirea este mică nu prezintă pericol. La depășiri mari însă se periclitează rezistența și deformațiile admisibile ale danturii, roților, arborilor etc.

În realitate μ_{BD} nu scade fiind posibil aplicabilă formula propusă de Bowden-Deriaghin-Sachs și Monow [4] — fig. 5b :

$$F_f = Ag + F_f = \mu''_1 F''_{n2,1} + \mu F''_{n2,1} \qquad (35)$$

în care Ag a fost numită constantă de gripaj. Astfel

$$\mu''_{BD} = \frac{Ag}{F''_n} + \frac{F_f}{F''_n} = \mu''_1 + \mu_{BD} > \mu_{BD} \tag{36}$$

pentru că într-adevăr apare și pericol de gripaj pe lîngă celelalte, deoarece o parte mai mare din $F''_{n2.1}$ se transmite prin conact direct între rugozități, față de cea transmisă prin lubfrifiant (presiuni hidrodinamice) așa cum a experimentat G. Niemann. Apare dificultatea că nu se cunosc valori pentru Ag. Calitativ se observă însă că $Ag = \text{const} = \mu''_1 F''_{n2.1}$; de unde rezultă că $\mu''_{AB} > \mu''_{BD} < \mu''_{DE}$; astfel că și gripajul este mai probabil pe segmentele de angrenare bipară.

e. Considerații similare se fac și pentru ω_1 și ω_2. Cînd acestea scad în valoare, se micșorează $a^t_{t1.2}$, iar la aceeași putere transmisă crește $F_{n2.1}$ adică devine $F''_{n2.1} > F_{n2.1}$ ca mai sus și cu aceleași efecte. Dacă ω_1, ω_2 cresc, se mărește $a^t_{t1.2}$ și scade $F_{n2.1}$, adică $F'_{n2.1} < F_{n2.1}$, crescînd μ.

f. Din considerentele a, b, c, d se deduce că la experimentările cu același modul, material și raport de transmitere cu variații de încărcări și turații, la interpretarea rezultatelor trebuie să se țină seama de aceste considerente pentru a fi concludente mai ales la aspectele tribologice.

g. Cînd masa $m_2 = im_1$, coeficientul de frecare crește o dată cu raportul de transmitere în raportul $\frac{2i}{i+1}$ față de valoarea corespunzătoare masei $m_2 = m_1$, care este minimă. Pentru valori m_2 cuprinse între m_1 și im_1, coeficientul de frecare va avea de asemenea valori intermediare. Coeficientul de frecare mai mare la roțile masive este favorabil pentru amortizarea vibrațiilor, dar este dezavantajos la fenomenele tribologice și termice.

În execuție masivă sînt și roțile din material mai ușor decît al celor motoare în care situație intervine și raportul densităților materialelor, adică $m_2 = im_1 \frac{\rho_2}{\rho_1}$, dar și valoarea forței $F_{n2.1}$ care se micșorează corespunzător. Coeficientul de frecare rezultă în general mai mare decît în cazul roților dințate din același material.

h) La aceeași forță nominală $F_{n2.1}$, dacă z_1 se alege mai mare, rezultă un modul mai mic și o masă echivalentă mai mică, respectiv un coeficient de frecare corespunzător mai redus.

2.6. La angrenajele cilindrice cu dantura interioară, $a^t_{t2.1}$, în aceleași condiții geometrice și cinematice, rezultă mai mică decît la angrenarea exterioară, iar la aceeași încărcare $F_{n2.1}$, coeficienții de frecare sînt mai mici pe întreg segmentul de angrenare. De aici, randamentul mai bun. Frecarea mai mică și presiunile hertziene mai reduse, explică comportarea mai bună a acestor danturi la fenomenele tribologice și chiar la solicitările mecanice. La raportul de transmitere $i = 1$, $a^t_{t2.1} = 0$, deci și forța de frecare F_{fA-E} este nulă; profilele dinților nu se mai rostogolesc, iar cum $V_{12} = 0$, nici nu alunecă. Angrenajul se transformă într-o asamblare cu caneluri evolventice sau într-un cuplaj dințat.

3. În încheiere se constată că frecarea dintre flancurile dinților angrenajelor cilindrice are aspecte specifice corespunzător formei constructive a

dinților, cinematicii și dinamicii funcționării acestora, materialelor și încărcării; ceea ce explică unele particularități evidențiate practic sau experimental.

Primită la redacție la 12 noiembrie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. E. BUCKINGHAM, *Rukovodstvo po proiectirovania zubcetih peredaci*, Masgîz, 1948.
2. A. V. GAVRILENKO, *Tilindriceskaia evolventnaia zubceataia peredacea*, Masgiz 1956.
3. T. MLADINESCU, *Considerații la rand mentul angrenării angrenajelor cilindrice exterioare*, Al IV-lea Simpozion „Robotizarea în industrie" și „Mecanisme și transmisii mecanice, Timișoara-Reșița 1984.
4. D. PAVELESCU, ș.a. *Tribologie*, Edit. didactică și pedagogică, 1977, București.

CALCULUL CONSTRUCȚIILOR SUBTERANE LA ACȚIUNI SEISMICE

de N. ȚOPA *), A. MOROIANU **) și M. BALCU *)

*) Institutul de Construcții, București

**) Institutul de Cercetări Hidrotehnice, București

În lucrare se examinează cazul construcțiilor subterane lungi, de tipul galeriilor de metrou sau a tunelurilor. Acțiunea seismică se consideră ca o transmitere de unde plane cu direcția de propagare în planul secțiunii transversale. Eforturile sînt induse în construcție de către deformațiile rezultate în urma conlucrării între masiv și construcție. Sînt examinate efectele undelor seismice transversale și a celor longitudinale. Secțiunile cercetate sînt cea circulară și cea dreptunghiulară. Relațiile practice de calcul bazate pe anumite ipoteze simplificatoare, sînt verificate apoi prin calcule numerice discretizînd masivul și structura, acțiunea seismică fiind considerată sub forma deplasărilor punctelor de pe contur.

1. INTRODUCERE

Necesitatea studierii efectului acțiunii seismice asupra construcțiilor subterane a apărut în urmă accidentelor produse la astfel de construcții mai ales la conducte și tuneluri [1], [2]. Deși mult mai puțin grave decît în cazul construcțiilor supraterane, au fost constatate avarieri importante de genul ruperilor, falierilor sau, în cazul portalelor tunelurilor, prăbușiri de suprafață.

Studiile teoretice efectuate [2], [3],[4], [5] precum și cele numerice și experimentale [6], [7] au arătat că dacă se poate prevedea cu suficient grad de încredere producerea unor deplasări ireversibile trebuie luate măsuri adecvate mergînd de la prevederea de rosturi și pînă chiar la modificarea traseului.

Pentru cazul cînd asemenea pericole de dislocări sau falieri nu există înțelegerea comportării construcțiilor subterane la acțiunea seismică trebuie să pornească de la ideea introducerii de către teren în structură a unor deformații care determină apariția unor eforturi. Deformațiile care iau naștere în structura subterană sînt rezultatul unei conlucrări între structură și teren. Așadar un calcul la acțiunea seismică ar însemna, pe de o parte, prognozarea deformațiilor pe care unda seismică le produce în teren, iar, pe de altă parte, modul cum aceste deformații influențează construcția într-un proces de conlucrare.

În lucrarea de față sînt date rezultatele unor calcule analitice și numerice referitoare la construcții subterane lungi, de tipul tunelurilor.

2. CALCULE ANALITICE

Starea de deformație a unui masiv prin care se propagă unde seismice este dată de cîmpul de deplasare u_x, u_y, u_z care sînt funcții de x, y, z, t. Dacă sursa undelor este depărtată de punctul cercetat, atunci se poate admite ipoteza undelor plane. În acest caz expresiile celor trei depla-

sări, în cazul în care se alege drept axa x chiar direcția de propagare a planului undei, sînt :

$$u_x(x, t) = u_x(x - v_l t),$$
$$u_y(x, t) = u_y(x - v_l t), \tag{1}$$
$$u_z(x, t) = u_z(x - v_l t).$$

Se evidențiază în acest fel undele longitudinale u_x (x este normala pe planul undei de propagare) și cele transversale u_y și u_z pentru ultimile două, deplasarea particulei fiind normală la direcția de propagare a undei.

În literatură se acceptă o reprezentare aproximativă a ecuațiilor de mișcare sub o formă simplificată.

De exemplu, pentru deplasarea transversală u_y corespunde expresia :

$$u_y = u_0 \cos \frac{2\pi}{T_0}\left(t - \frac{x}{v_t}\right). \tag{2}$$

În relația (2), u_0 este amplitudinea mișcării ; T_0 — perioada dominantă a mișcării, v_t — viteza de propagare a undei transversale, care poate fi evaluată cu relația

$$v_t = \sqrt{\frac{E}{2(1 + \nu)\,\rho}}, \tag{3}$$

E și ν fiind modulul de elasticitate și, respectiv, coeficientul lui Poisson pentru teren, iar ρ masa sa specifică.

În lucrare se cercetează efectul undelor seismice asupra construcțiilor lungi, undele avînd direcția de propagare cuprinsă în planul secțiunii transversale. Dintre acestea se vor scoate în evidență undele transversale ca fiind cele mai importante. Pentru secțiunea de formă circulară se va examina și cazul undelor longitudinale.

2.1. STRUCTURI CU SECȚIUNEA TRANSVERSALĂ CIRCULARĂ

2.1.1. Acțiunea undei transversale

Se va considera că secțiunea transversală este suficient de mică în raport cu lungimea de undă. Zona influențată de prezența construcției (aproximativ de trei ori diametrul tunelului) se consideră ea însăși suficient de mică față de lungimea undei seismice $\left(\text{sub } \frac{1}{10}\right)$. În aceste condiții starea de deformație la un moment dat poate fi considerată corespunzătoare unui cîmp constant de tensiuni și deformații. Dacă se examinează relația (2) se poate constata că deformațiile sînt de tip sinusoidal (prima derivată în raport cu x), iar accelerațiile de tip cosinusoidal (derivata secundă în raport cu t). De aici rezultă că valorile lor maxime sînt defazate

în timp prin 0,25 T_0. Cu alte cuvinte, cînd deformaţiile ating valorile maxime, acceleraţiile (şi deci forţele de inerţie) sînt nule şi invers. Din această cauză se poate efectua un calcul static corespunzător deformaţiilor maxime fără considerarea forţelor de inerţie. Deformaţiile considerate în calcul vor fi, în paragraful de faţă, deformaţiile de lunecare.

Detaşînd din masiv o zonă suficient de mare pentru ca conturul să nu fie influenţat de prezenţa golului, ca în figura 1, studiul secţiunii transversale a inelului comportă trei etape :

— studiul masivului cu gol (reprezentat de cercul cu rază b) la acţiunea undei transversale sub forma unui cîmp de tensiuni $\tau_{xy} = \tau_{xy} = \tau_0$ aplicat pe conturul exterior al zonei considerate de diametru $2b$;

— studiul masivului cu gol reprezentat ca mai sus sub acţiunea tensiunilor de legătură dintre masiv şi inel ;

— studiul structurii inelare sub acţiunea tensiunilor de legătură dintre masiv şi inel.

2.1.1.1. *Studiul masivului*

Pentru structura circulară plană sistemul de coordonate cel mai convenabil este sistemul de coordonate polare şi este reprezentat în figura 1 alături de cel cartezian.

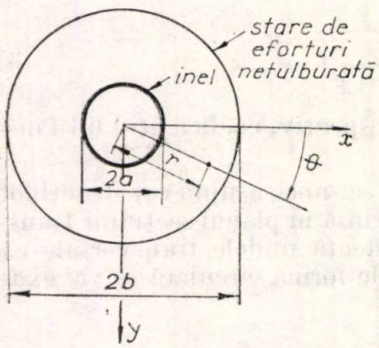


Fig. 1

Tensorul de tensiune corespunzător lunecării pure se caracterizează în coordonate carteziene, prin $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau_0$. Decupînd cercul cu rază b, aceste tensiuni devin încărcări pe contur şi au, în coordonate polare, expresiile :

$$\sigma_r(b, \theta) = \tau_0 \sin 2\theta,$$
$$\tau_{r\theta}(b, \theta) = \tau_0 \cos 2\theta. \tag{4}$$

Pentru studiu se va folosi funcţia Airy de tipul :

$$F(r, \theta) = f(r) \sin 2\theta.$$

Ţinînd seama că $F(r, \theta)$ trebuie să fie o funcţie biarmonică, rezultă ecuaţia diferenţială :

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{9}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{9}{r^3}\frac{df}{dr} = 0.$$

Soluţia acestei ecuaţii conduce la funcţia Airy :

$$F(r, \theta) = (C_1 + C_2 r^4 + C_3 r^2 + C_4 r^{-2}) \sin 2\theta.$$

Expresiile tensiunilor sînt, după cum se ştie,

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right).$$

Folosind expresiile tensiunilor, determinarea constantelor $C_1, \ldots, C_4$ se face punînd condițiile :

$$\sigma_r(a, \theta) = \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0,$$
$$\sigma_r(b, \theta) = \tau_0 \sin 2\theta\,; \quad \tau_{r\theta}(b, \theta) = \tau_0 \cos 2\theta. \tag{5}$$

Întrucît $b \gg a$, se consideră $b \to \infty$ și rezultă în final :

$$F(r, \theta) = \frac{\tau_0 a^2}{2}\left(2 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta. \tag{6}$$

Pentru starea de deformație se pleacă de la aspectul geometric :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

și de la cel fizic :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E_1}(\sigma_r - \nu_1\sigma_\theta); \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E_1}(\sigma_\theta - \nu_1\sigma_r); \quad \gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{r\theta},$$

unde s-a notat pentru starea plană de deformație :

$$\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}; \quad E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}. \tag{7}$$

Folosind expresiile tensiunilor deduse din F în aspectul fizic și apoi în cel geometric, se integrează sistemul de ecuații cu derivate parțiale rezultat și se găsesc funcțiile u_r și u_θ. Dintre acestea se reține funcția u_r. Aceasta, pentru $r = a$ (conturul golului) are expresia :

$$u_r = 4\frac{\tau_0 a}{E_1}\sin 2\theta. \tag{8}$$

În continuare, pentru studiul masivului la acțiunea tensiunilor de contact, se fac unele aproximații și anume se neglijează tensiunile tangențiale de contact, iar pentru tensiunile normale σ_r se va presupune o distribuție afină cu cea a deplasărilor radiale (8) :

$$\sigma_r(a, \theta) = \sigma \sin 2\theta,$$
$$\tau_{r\theta}(a, \theta) = 0, \tag{9}$$

σ fiind un parametru nedeterminat încă (fig. 2). Convenția de semne pentru tensiunea de contact rezultă din figura 3.

Procedînd analog cu cazul încărcării pe conturul exterior și luînd drept condiții de margine expresiile :

$$\sigma_r(a, \theta) = \sigma \sin 2\theta\,; \quad \tau_{r\theta}(a, \theta) = \sigma_r(b, \theta) = \tau_{r\theta}(b, \theta) = 0, \tag{10}$$

se obţine funcţia eforturilor

$$F(r, \theta) = -\frac{\sigma a^2}{2}\left(1 - \frac{a^2}{3r^2}\right)\sin 2\theta. \tag{11}$$

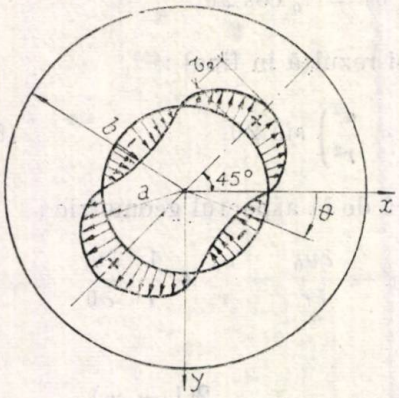


Fig. 2

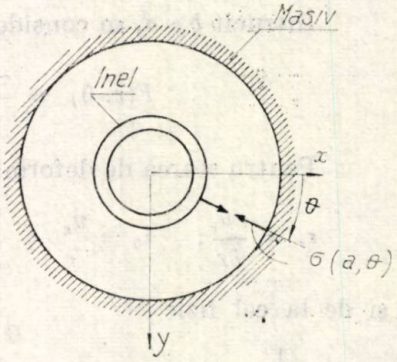


Fig. 3

Pentru deplasările radiale ale conturului interior al masivului ($r = a$), sub influenţa tensiunii de contact σ rezultă :

$$u_r(a, \theta) = -\frac{\sigma a}{E_1} \cdot \frac{5 - \nu_1}{3} \sin 2\theta. \tag{12}$$

Semnul, în această expresie, trebuie înţeles în convenţia teoriei elasticităţii (pozitiv dacă deplasarea este în sensul lui r crescător).

2.1.1.2. *Studiul inelului*

Inelul este supus acţiunii tensiunilor de contact avînd variaţia dată de relaţia (9) şi sensul mecanic invers faţă de cele ce acţionează asupra masivului (fig. 3).

Cu mijloacele uzuale ale staticii construcţiilor se obţin expresiile momentului încovoietor şi a deplasării radiale :

$$M(\theta) = \frac{\sigma a^2}{3}\sin 2\theta,$$

$$u_r(\theta) = \frac{\sigma a^4}{9\, E_{1i} I_i}\sin 2\theta, \tag{13}$$

în care E_{1i} este modulul de elasticitate al materialului inelului în starea de deformaţie plană, iar I_i este momentul de inerţie al secţiunii peretelui ($I_i = h_i^3/12$, h_i fiind grosimea peretelui inelului).

2.1.1.3. *Relații finale*

Rezolvarea problemei, adică determinarea stării de tensiune și de deformație în structură, este posibilă dacă se cunoaște tensiunea de contact σ. Determinarea acestui parametru se face punînd condiția ca deplasarea radială relativă între inel și teren să fie nulă.

Se va ține seama, evident, de convenția uzuală din statica construcțiilor după care deplasarea este pozitivă dacă este îndreptată în sensul necunoscutei perechi din figura 3.

Condiția aceasta se scrie, folosind relațiile (8), (12) și (13) și reconvertind, după caz, semnele :

$$-4\tau_0 \frac{a}{E_1} \sin 2\theta + \frac{\sigma a}{E_1} \frac{(5-\nu_1)}{3} \sin 2\theta + \frac{\sigma a^4}{9E_{1i}I_i} \sin 2\theta = 0. \tag{14}$$

De aci rezultă expresia căutată a parametrului :

$$\sigma = \frac{12\tau_0}{3\beta + 5 - \nu_1} = \frac{6E_1}{(1+\nu_1)(3\beta + 5 - \nu_1)} \gamma_0, \tag{15}$$

unde

$$\beta = \frac{4}{3} \frac{E_1}{E_{1i}} \left(\frac{a}{h_i}\right)^3, \tag{16}$$

γ_0 fiind deformarea specifică unghiulară a terenului corespunzătoare lui τ_0 (fără prezența construcției).

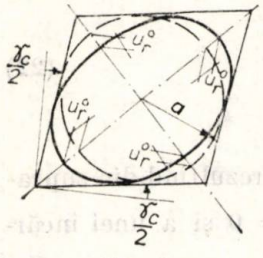


Fig. 4

De observat că β exprimă raportul dintre deformabilitatea inelului și cea a masivului.

În continuare se pot exprima eforturile și deplasările din inel în funcție de o nouă deformație (rezultat al conlucrării) care va fi notată cu γ_c diferită de cea a terenului, γ_0. Se consideră deformația de lunecare aplicată unui cerc (fig. 4). Între deformația de lunecare γ_c și alungirea, respectiv scurtarea razei cercului u_r^0 se poate scrie relația :

$$\gamma_c = \frac{2u_r^0}{a} = \frac{2\sigma a^4}{a 9E_{1i}I_i} = \frac{2}{9} \frac{\sigma a^3}{E_{1i}I_i}. \tag{17}$$

Din (17) și (15) rezultă imediat

$$\gamma_c = \frac{12\beta}{(1+\nu_1)(3\beta + 5 - \nu_1)} \gamma_0 = \lambda\gamma_0. \tag{18}$$

Sub această formă se poate aprecia mai clar efectul conlucrării. Mărimea γ_c este lunecarea de conlucrare a construcției, γ_0 este lunecarea specifică a terenului virgin. Existența construcției poate mări sau micșora deformarea unghiulară a terenului virgin după cum factorul λ este supraunitar sau subunitar.

Momentele încovoietoare în inel se vor calcula cu expresia :

$$M(\theta) = \frac{1}{8} E_1 a^2 \left(\frac{h_i}{a}\right)^3 \gamma_c \sin 2\theta. \tag{19}$$

În concluzie, dacă se cunoaște γ_0, cu ajutorul relației (18) se deduce γ_c și apoi cu (19) momentele încovoietoare.

Dacă nu există alte informații atunci mărimea γ_0 se poate deduce pornind de la relația (2),

$$\gamma_0 = \left|\frac{\partial u_y}{\partial x}\right|_{\max} = \frac{2\pi}{T_0}\frac{u_0}{v_t} = \frac{A T_0}{2\pi v_t}, \tag{20}$$

în care A este amplitudinea accelerației seismice.

2.1.2 Efectul undei longitudinale

Efectul undei longitudinale cu direcția de propagare în sensul axei x (axa x fiind în planul secțiunii transversale) se poate exprima prin cîmpul de tensiuni și de deformații.

$$\sigma_x \neq 0 \quad \varepsilon_x \neq 0 \quad \sigma_y = \sigma_z = \nu_1 \sigma_x,$$
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = \gamma_{xy} = 0. \tag{21}$$

Se analizează pentru început existența numai a tensiunii $\sigma_x = \sigma_0$, restul fiind nule. Pe conturul cercului de rază b din figura 1, componentele tensorului de tensiune în coordonate polare sînt

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} + \frac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta,$$
$$\tau_{r\theta} = -\frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta. \tag{22}$$

Încărcarea totală din (22) poate fi exprimată ca rezultînd din suprapunerea unei încărcări constante radiale $\sigma_r' = \frac{\sigma_0}{2}$; $\tau_{r\theta}' = 0$ și a unei încărcări variabile $\sigma_r'' = \frac{\sigma_0}{2}\cos 2\theta$, $\tau_{r\theta}'' = -\frac{\sigma_0}{2}\sin 2\theta$.

Deplasarea unui punct de pe cercul de rază a cînd conturul exterior ($r = b$) este încărcat cu sarcina radială $\sigma_r' = 0{,}5\ \sigma_0$ pentru ($b = \infty$) este :

$$u_r = \frac{\sigma_0 a}{E_1}.$$

În cazul încărcării cu componentele σ'', τ'' se procedează analog cu cazul examinat în 2.1.1.1 și se ajunge la expresia deplasării radiale u_r pe conturul interior ($r = a$) cînd $b = \infty$:

$$u_r = \frac{2a\sigma_0}{E_1}\cos 2\theta.$$

Acțiunea undei longitudinale este caracterizată însă prin prezența simultană a tensiunii $\sigma_x = \sigma_0$ și a tensiunii $\sigma_y = \nu_1\sigma_0$. Efectul lui $\sigma_y = \nu_1\sigma_0$ se calculează absolut analog ținînd seama de direcțiile de acțiune respective. Ca urmare, deplasarea unui punct curent sub influența simultană a lui $\sigma_x = \sigma_0$ și $\sigma_y = \nu_1\sigma_0$ se poate scrie :

$$u_r = \frac{\sigma_0 a}{E_1}(1 + \nu_1) + 2\frac{\sigma_0 a}{E_1}(1 - \nu_1)\cos 2\theta. \tag{23}$$

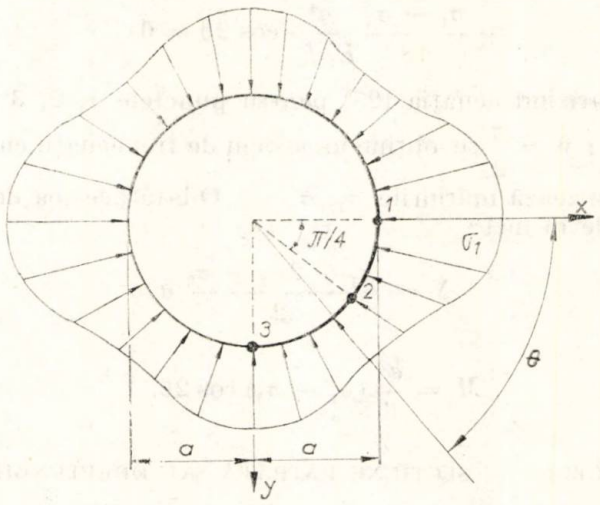


Fig. 5

În privința tensiunilor de contact nu se mai poate folosi o variație atît de simplă ca în cazul undei transversale. Se propune aci o variație care să depindă de trei parametri σ_1, σ_2, σ_3, ca în figura 5. Se menționează că și aci se neglijează tensiunile tangențiale de contact.

Expresia tensiunii de legătură este în acest caz :

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{\sigma_2}{2}\left[1 + \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{\sigma_2}{2}\left[1 + \right.$$

$$\left. + \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{\sigma_3}{2}\left[1 + \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3}{2} +$$

$$+ \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\theta. \tag{24}$$

Sensul tensiunii de legătură se presupune tot cel din figura 3.

Cumulînd efectul componentei constante din (24), reprezentat de primul termen, cu cel al componentei variabile reprezentat de cel de al doilea termen ca și în cazurile precedente se ajunge la expresia deplasării radiale curente a masivului pe conturul $r = a$ cînd b crește nemărginit și, de asemenea, deplasarea inelului sub influența aceleași tensiuni de con-

tact. Procedînd analog cu cele examinate în paragraful 2.1.1.3 se ajunge la o relație analoagă cu relația (14) :

$$-\frac{\sigma_0 a}{E_1}(1+\nu_1)-\frac{2\sigma_0 a}{E_1}(1-\nu_1)\cos 2\theta+\frac{\sigma_1+2\sigma_2+\sigma_3}{2E_1}(1+\nu_1)a+$$

$$+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\frac{a}{E_1}\frac{5-\nu_1}{3}\cos 2\theta+\frac{\sigma_1+2\sigma_2+\sigma_3}{2}\frac{a^2}{E_{1i}h_i}+$$

$$+\frac{\sigma_1-\sigma_3}{18}\frac{a^4}{E_{1i}I_i}\cos 2\theta=0\cdot \qquad (25)$$

Particularizînd ecuația (25) pentru punctele 1, 2, 3 adică pentru $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{4}$; $\theta=\frac{\pi}{2}$ se obține un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, care furnizează mărimile σ_1, σ_2, σ_3. Odată acestea determinate se obțin eforturile în inel :

$$N=\frac{\sigma_1+2\sigma_2+\sigma_3}{2}a,$$

$$M=\frac{a^2}{6}(\sigma_1-\sigma_3)\cos 2\theta. \qquad (26)$$

2.2. STRUCTURI CU SECȚIUNE PĂTRATĂ SAU DREPTUNGHIULARĂ

Pentru structuri rectangulare un calcul analitic analog celui folosit în cazul secțiunii inelare este cu mult mai dificil. În cele ce urmează se va prezenta un calcul aproximativ care se bazează pe echivalarea secțiunii reale dreptunghiulare prin una inelară. Calculul se va extinde numai asupra efectului undei transversale. Criteriul de echivalare va fi acela al rigidităților la forfecare pură egale.

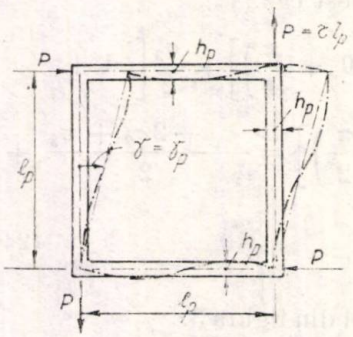


Fig. 6

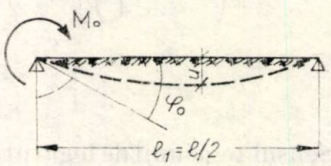


Fig. 7

Se începe cu secțiunea de forma unui cadru pătrat (fig. 6). Rigiditatea la modificarea unghiulară (forfecare pură) a acestui cadru va fi apreciată prin examinarea, întîi, a mărimii modificării unghiulare γ care ia

naștere la încărcarea cu două cuple echilibrate ca în figură. Pentru a ține seama de faptul că barele cadrului nu se deformează liber din cauza masivului, se va face întîi un calcul de corecție a rigidității barelor.

Prin modul de deformare rezultă că la mijlocul barelor momentul este nul. Separînd o jumătate de bară aceasta poate fi echivalată cu o bară acționată cu un moment la un capăt, articulată la celălalt capăt și rezemată pe mediu elastic de tip Winkler (fig. 7).

Prin mijloace uzuale de calcul se deduce rotirea barei în capătul din stînga,

$$\varphi_0 = \frac{M_0 l_1}{3E_{1p} I_p^{ech}}; \qquad I_p^{ech} = \frac{I_p}{\eta},$$

$$\eta = \frac{3}{\alpha l_p} \frac{\sin \alpha l_p - \operatorname{sh} \alpha l_p}{\cos \alpha l_p - \operatorname{ch} \alpha l_p}; \qquad \alpha = \sqrt[4]{\frac{q}{4E_{1p} I_p}}, \tag{27}$$

unde $l = l_p$ este lungimea laturii cadrului, $l_1 = 0{,}5\ l_p$, I_p este momentul de inerție al peretelui $(h_p^3/12)$, I_p^{ech} este momentul de inerție echivalent a peretelui ținînd seama de rezemarea elastică, q este coeficientul de pat Winkler, E_{1p} este modulul de elasticitate al materialului cadrului în stare de deformație plană.

Din relațiile (27) se vede că secțiunea poate fi considerată liberă în cazul deformațiilor de forfecare pură, dar cu un moment de inerție modificat (I_p^{ech}).

Pasul următor îl constituie echivalarea secțiunii pătrate cu secțiunea inelară.

Modificarea unghiulară a secțiunii pătrate sub influența încărcării din figura 6 este :

$$\gamma_p = \frac{\tau l_p^3}{12E_{1p} I_p} \eta.$$

Modificarea unghiulară a pătratului circumscris secțiunii inelare sub influența unor încărcări similare cu cea din figura 6 este, ținînd seama de relația (17) :

$$\gamma_i = \frac{2\tau a^3}{9E_{1i} I_i} = \frac{1}{36} \frac{\tau d^3}{E_{1i} I_i},$$

unde s-a notat cu d diametrul secțiunii inelare $d = 2a$.

Dacă se urmărește să se obțină o secțiune inelară echivalentă cu cea a cadrului pătrat, avînd aceeași grosime a peretelui și același material, rezultă că trebuie ca $\gamma_p = \gamma_i$. De aici se deduce :

$$d = \sqrt[3]{3\eta}\ l_p. \tag{28}$$

Așadar o secțiune inelară avînd diametrul dat de relația (28) se comportă identic (din punctul de vedere a rigidității la deformarea sa unghiulară) cu o secțiune pătrată cu aceeași grosime și avînd latura l_p.

Practic, se înlocuiește cadrul pătrat cu un inel cu aceeași grosime și material și cu diametrul dat de (28), acestuia i se calculează γ_c cu relația (18) care trebuie să fie aceeași și pentru secțiunea cadrului și cu această mărime se obțin eforturile în cadru. De notat că în relația (18) mărimea β din relația (16) poate fi calculată cu expresia :

$$\beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{E_1}{E_{1i}} \left(\frac{a}{h_i}\right)^3 = \frac{1}{2} \frac{E_1}{E_{1p}} \left(\frac{l_p}{h_i}\right)^3 \eta.$$

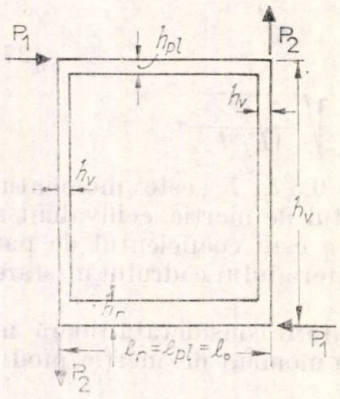


Fig. 8

Momentul încovoietor la nodul cadrului va fi dat de :

$$M_p = \frac{1}{4} E_{1p} l_p^2 \left(\frac{h_p}{l_p}\right)^3 \gamma_c. \qquad (29)$$

În cazul secțiunii de cadru dreptunghiular cu **grosimi diferite** ale elementelor ca în figura 8 **se va face întîi** o echivalare a secțiunii dreptunghiulare cu o secțiune pătrată.

Deformarea unghiulară γ_d a secțiunii din figura 8 sub influența încărcării din figură, unde $|P_1 l_v| = |P_2 l_0|$ se deduce prin mijloace uzuale ale mecanicii construcțiilor :

$$\gamma_d = \frac{\tau l_0 l_v^2}{12 E_{1d} I_v} \quad \frac{3 i_{pl} i_r + 2 i_r i_v + 2 i_{pl} i_v + i_v^2}{i_v i_{pl} + i_r i_v + 6 i_{pl} i_r} \cdot \eta = \frac{\tau l_0 l_v^2}{12 E_{1d} I_v} \rho \eta$$

$$\left(i_k = \frac{I_k}{l_k} = \frac{h_k^3}{12 l_k}\right),$$

în care E_{1d} este modulul de elasticitate al materialului cadrului dreptunghiular.

Comparînd această relație cu cea corespunzătoare secțiunii pătrate, rezultă că un cadru ca cel din figura 8 se poate echivala, din punctul de vedere al deformabilității unghiulare, cu un cadru pătrat executat din același material ($E_{1d} = E_{1p}$) avînd grosimea peretelui constantă și latura l_v, dacă momentul de inerție al acestuia din urmă se ia :

$$I_p^{ech} = I_v \frac{l_v}{l_0} \cdot \frac{1}{\rho} = \frac{(h_p^{ech})^3}{12}. \qquad (30)$$

De aici rezultă și modul de calcul al cadrului cu secțiune dreptunghiulară cu grosimi diferite ca în figura 8.

Se calculează momentul de inerție echivalent cu relația (30) adică de fapt grosimea echivalentă constantă pentru un cadru pătrat de latură

l_v din același material. Apoi se determină deformația unghiulară γ_c cu relația (18) în care β se ia:

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{E_1}{E_{1d}}\left(\frac{l_v}{h_p^{ech}}\right)^3 \eta,$$
$$\eta = \frac{3}{\alpha l_v}\cdot\frac{\sin \alpha l_v - \operatorname{sh} \alpha l_v}{\cos \alpha l_v - \operatorname{ch} \alpha l_v}. \tag{31}$$

Cu mărimea γ_c astfel calculată se determină momentele în nodurile cadrului:

$$|M_{pl}| = 6E_{1d}i_v \frac{3i_r i_{pl} + i_v i_{pl}}{3i_r i_{pl} + 2i_v i_{pl} + 2i_r i_v + i_v^2}\gamma_c,$$
$$|M_r| = 6E_{1d}i_v \frac{3i_r i_{pl} + i_r i_v}{3i_r i_{pl} + 2i_v i_{pl} + 2i_r i_v + i_v^2}\gamma_c. \tag{32}$$

3. CALCULE NUMERICE

3.1. METODOLOGIA ȘI DATE DE CALCUL

Pentru a aprecia efectul aproximațiilor făcute în calculele analitice, au fost efectuate calcule numerice. Acestea au fost efectuate pentru o zonă din masiv suficient de înaltă, 80,0 m, în raport cu dimensiunile structurii și suficient de lungă, 300,0 m, pentru ca efectul condițiilor de margine să nu mai influențeze vecinătatea structurii, care a fost circulară, schematizată printr-un octogon regulat sau pătrată, avînd diametrul, respectiv latura, $2a = l = 5{,}0$ m și grosimea peretelui $h = 0{,}8$ m.

Axul structurii a fost considerat la 25 m adîncime.

Studiul s-a făcut folosind programul de calcul SAP IV, cu ajutorul căruia s-a integrat pas cu pas ecuația diferențială vectorială a mișcării

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} + [C]\{\dot{X}(t)\} + [K]\{X(t)\} = -[M]\{V\}\, a\,(t), \tag{33}$$

în care

$[M]$, $[C]$, $[K]$ reprezintă matricea maselor, respectiv a atenuărilor și a rigidităților; $\{\ddot{X}(t)\}$, $\{\dot{X}(t)\}$, $\{X(t)$ — vectorii accelerațiilor, respectiv a vitezelor și a deplasărilor relative generalizate; $\{V\}$ — un vector de proiecție a tensorului mișcării terenului după componentele vectorului deplasărilor generalizate; $a\,(t)$ — modulul accelerației terenului.

Discretizarea a fost făcută cu elemente finite pătrate sau triunghiulare pentru masiv și elemente rectiliniare de bară pentru structură (opt elemente pentru octogonul ce aproximează secțiunea circulară și cîte două elemente pentru fiecare latură a secțiunii pătrate).

S-au considerat două variante ale caracteristicilor de deformabilitate a terenului, un teren stîncos de rigiditate mare, și un teren de rigiditate medie. În ultimul caz s-a considerat că proprietățile de deformabilitate ale terenului, depinzînd de starea de tensiune, diferă cu adîncimea, distingîn-

du-se opt domenii cu adîncimea de 10,0 m. Caracteristicile mecanice considerate în calcul sînt trecute în tabelul 1.

Tabelul nr. 1

Caracteristicile mecanice considerate în calcul

Caracteristica	Structura	Teren								
		rigid	de rigiditate medie, domeniul							
			1	2	3	4	5	6	7	8
Greutate volumică (kN/m³)	24	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Modulul lui Young (daN/cm²)	290000	100000	1000	1500	1850	2200	3400	2650	2900	3000
Coeficientul lui Poisson	0,17	0,20	0,45	0,37	0,30	0,26	0,23	0,20	0,18	0,16

Matricea de atenuare a fost considerată ca o combinație liniară a matricei maselor și a matricei de rigiditate cu relația:

$$[C] = a[M] + b[K], \tag{34}$$

coeficienții avînd valorile $a = 3{,}21$ s, $b = 0{,}0511$ s^{-1}, pentru terenul rigid și $a = 0{,}63$ s., $b = 0{,}05$ s^{-1}. pentru terenul de rigiditate medie.

Ca încărcare a fost considerată accelerograma prezentată în figura 9 aplicată la limita superioară a zonei de teren considerată.

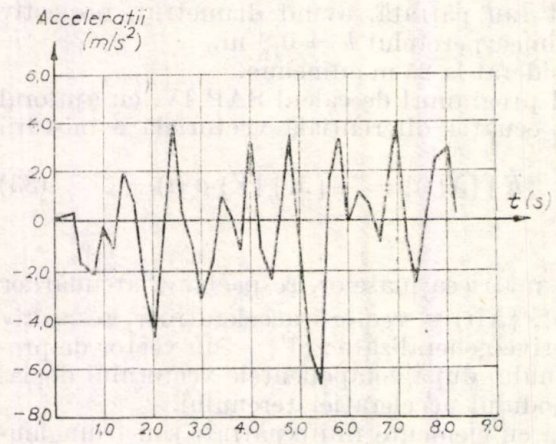


Fig. 9

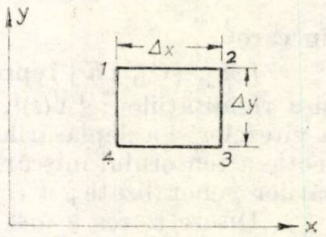


Fig. 10

Mișcarea a fost considerată înclinată, componentele orizontale ale vectorului V din ecuație avînd valoarea 1,0, iar cele verticale avînd valoarea 0,5. Ținînd seama că pentru o propagare pe verticală a mișcării, așa cum se produce în cazul de față, în dreptul structurii componentei orizontale îi corespunde o undă transversală, iar componentei verticale

o undă longitudinală, rezultă că structura este supusă simultan acțiunii celor două tipuri de unde, unda transversală avînd o amplitudine de două ori mai mare decît cea longitudinală. Pentru a separa efectul celor două unde, s-a ținut seama că efectul undei transversale duce la eforturi antisimetrice, pe cînd efectul undei longitudinale la eforturi simetrice. Mărimea intervalului de integrare a fost $\Delta t = 0{,}05$ s.

Calculele au fost făcute atît pentru masiv, în absența structurii, cît și pentru masiv conlucrînd cu structura. Folosind deplasările furnizate de program în vîrfurile unui dreptunghi cu laturi paralele cu axele sistemului de coordonate (fig. 10) din dreptul structurii la diferiți timpi, au fost calculate deformațiile de lunecare în absența structurii, γ_0, și în prezența ei, γ_c, cu relația

$$\gamma = \frac{1}{2}\left[\frac{u'_x - u^4_x}{\Delta y} + \frac{u^2_x - u^3_x}{\Delta y}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{u^2_y - u^1_y}{\Delta x} + \frac{u^3_y - u^4_y}{\Delta x}\right], \qquad (35)$$

în care indicele inferior arată componenta deplasării, iar indicele superior punctul în care se considera deplasarea, iar Δx și Δy sînt laturile corespunzătoare ale dreptunghiului definit de cele patru puncte considerate.

3.2. REZULTATE OBȚINUTE

Rezultatele obținute au arătat că raportul dintre deformația de lunecare a structurii și deformația terenului de fundație în absența structurii $\lambda = \frac{\gamma_c}{\gamma_0}$, este constant, avînd valorile prezentate în tabelul 2. Tot în acest tabel au fost arătate și valorile λ calculate analitic precum și raportul $\frac{\beta}{\beta_0}$, β_0 fiind valoarea particulară a mărimii β care duce la $\lambda = 1$.

Tabelul nr. 2

Deformația de lunecare a structurii raportată la deformația de lunecare a terenului $\frac{\gamma_c}{\gamma_0}$ și raportul $\frac{\beta}{\beta_0}$

	Teren de rigiditate medie		Teren rigid	
	Secțiune circulară	Secțiune pătrată	Secțiune circulară	Secțiune pătrată
γ_c/γ_0 (valori calculate analitic)	0,33	0,75	2,25	2,70
γ_c/γ_0 (valori calculate numeric)	0,45	1,00	2,90	3,05
β/β_0	0,04	0,12	9,25	27,5

În calculele analitice pentru terenul de rigiditate medie, au fost folosite valori ale caracteristicilor de deformabilitate $E = 2000$ daN/cm^2, $\nu = 0{,}25$.

Din examinarea tabelului se observă că pentru structurile rigide în raport cu terenul, $\beta < \beta_0$, efectul conlucrării reduce deformația de lunecare, pe cînd pentru structurile deformabile în raport cu terenul, $\beta > \beta_0$, efectul conlucrării mărește deformația de lunecare.

De menționat însă că valorile γ_0 sînt mult mai mici la terenul stîncos (tare) decît la cel de caracteristici medii ceea ce face ca și eforturile în structură să fie mai mici la terenul tare. Se observă, de asemenea, că între rapoartele $\frac{\gamma_c}{\gamma_0}$ calculate pe cale analitică și cele calculate pe cale numerică, există diferențe de pînă la 30% datorate aproximațiilor făcute în calculele analitice (neglijarea efectului componentei tangențiale a tensiunii de lunecare etc.) Diferențele sînt mai mari pentru secțiunea circulară, datorită, probabil, aproximării cercului printr-un octogon.

În figurile 11 *a* și *b* sînt prezentate pentru exemplificare diagramele de momente încovoietoare la timpul $t = 2{,}5$ s și $t = 5{,}5$ s, cînd, atît exci-

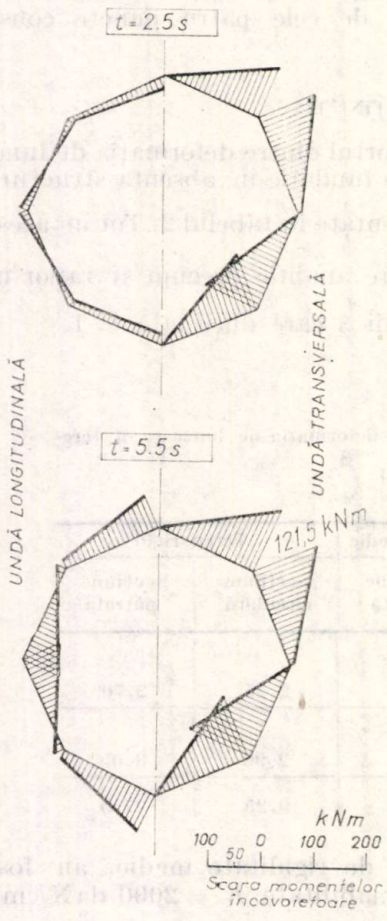


Fig. 11 a

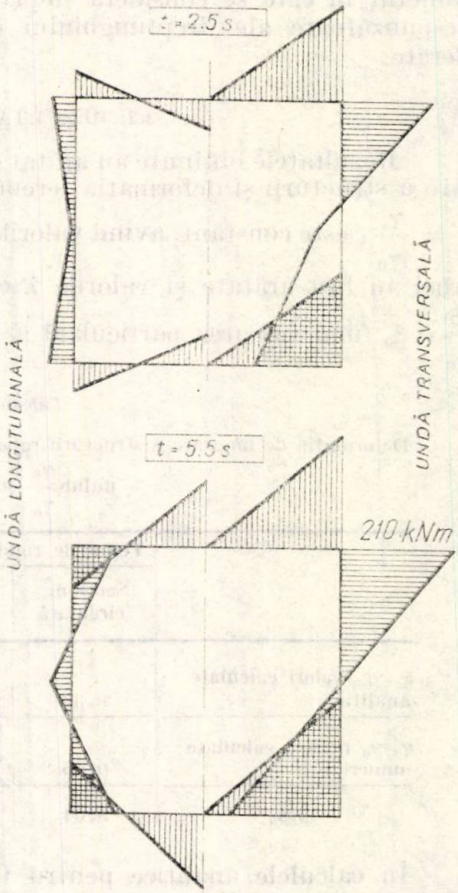


Fig. 11 b

tația, cît și răspunsul, au valori maxime, pentru unda longitudinală și cea transversală pentru terenul mediu.

Din examinarea figurii se observă că efectul undei longitudinale duce la momente încovoietoare, apropiate ca valoare de cele date de efectul undei transversale, dacă se ține seama că amplitudinea mișcării verticale a fost de două ori mai mică decît cea a mișcării orizontale, însă cu altă distribuție (valoarea maximă este în cîmp pentru secțiunea pătrată și în dreptul axelor verticale orizontale pentru secțiunea circulară).

Între valorile momentelor încovoietoare calculate pe cale analitică și cele calculate pe cale numerică, diferența a fost asemănătoare ca și în cazul raportului $\frac{\gamma_e}{\gamma_0}$. Astfel, pentru terenul de rigiditate medie, momentul încovoietor corespunzător propagării undei transversale, calculat analitic, a rezultat $M = 100$ kNm pentru secțiunea circulară și $M = 220$ kNm pentru cea pătrată, pe cînd valorile obținute numeric au fost $M = 121{,}5$kNm, respectiv $M = 210$ kNm.

Așadar testele numerice efectuate verifică într-o măsură bună calculele analitice prezentate în lucrarea de față.

Primită la redacție la 23 octombrie 1984

BIBLIOGRAFIE

1. G. E. MULESKI, T. ARIMAN, C. P. AMNEN, *A shell model of a burried pipe in a seismic enveronment*, J. of Pressure Vessel Technology, Trans. ASME, **101**, p. 44—50 (1979).
2. R. T. KUESEL, *Earthquake design criteria for subway*, Proc. ASCE J. Struct. Div. No St 6, 95, p. 1213—1231 (1969).
3. S. H. OKAMMOTO, *Introduction to the earthquake engineering*, Willey, New York (1975).
4. N. T. FOTIEVA, *Rasciot obdelok stroitelinovo tunelia II iarusa Rogunskoi GES na seismiceskii vozdeistviia*, Ghidrotehniceskoe Stroitelstvo, 9 (1976).
5. T. R. RAȘIDOV, J. J. DORMAN, A. A. ISANHODIAEV, Seismostoikosti tonelinih konstrukții metropolitanov Transport, Moskva (1975).
6. GH. PĂLĂMARU et al., *Experimental investigation regarding soil metrotype structure interaction*, 7th Proceedings the 7th World Conference on Earthquake Engineering, Istanbul, vol. 6, p. 395—401 (1980).
7. M. HAMADA, M. YOKOHAMA, Y. SUGIHARA, *Earthquake observation of underground structure and seismic design*, ibidem, p. 485—493 (1980).
8. J. G. WHITE, *Seismic waves. Radiation transmission and attenuation*, McGraw Hiîl Book Company, New York (1965).

UTILIZAREA REZULTATELOR ÎNCERCĂRII DE ÎNCOVOIERE PRIN ȘOC PENTRU EVALUAREA TENACITĂȚII LA RUPERE K_{1C} A OȚELURILOR

de GH. ZECHERU
Institutul de Petrol și Gaze Ploiești

Aplicarea criteriilor analitice ale mecanicii ruperii la verificarea siguranței în exploatare a construcțiilor tehnice necesită determinarea experimentală, prin încercări complicate și costisitoare, a factorului critic de intensitate a tensiunilor K_{1C} pentru materialele metalice din care sînt confecționate construcțiile analizate. În scopul evitării dificultăților tehnico-economice proprii încercărilor de determinare directă a factorului K_{1C}, au fost dezvoltate metode de stabilire a acestuia folosind rezultatele unor încercări mecanice simple, cum ar fi încercarea de încovoiere prin șoc. În lucrare se prezintă principalele metode de acest fel propuse în literatura de specialitate și rezultatele cercetărilor experimentale întreprinse de autor în vederea selectării metodelor aplicabile pentru evaluarea tenacității K_{1C}, la temperaturi cuprinse între $+20°C$ și $-60°C$, în cazul oțelurilor românești turnate în piese.

1. CONSIDERAȚII PRIVIND DETERMINAREA PARAMETRILOR NECESARI PENTRU APLICAREA METODELOR MECANICII RUPERII LA APRECIEREA SIGURANȚEI ÎN EXPLOATARE A PIESELOR METALICE

Aprecierea siguranței în exploatare a pieselor metalice folosind metodele mecanicii ruperii se bazează pe verificarea condiției de neinițiere a ruperii, ce are forma analitică generală, [1]—[3]:

$$K_1 \leqslant K_{1C} \tag{1}$$

K_1 reprezintă factorul de intensitate a tensiunilor (eforturilor unitare) la vîrful discontinuităților fizice de tip fisură considerate a exista în piesa analizată; el se determină pe cale teoretică, studiind prin metode analitice sau numerice starea de tensiuni și deformații din piesa considerată ca un mediu elastic sau elastoplastic cu fisuri. Soluțiile analitce găsite pînă în prezent, [3]—[7], și rezolvările numerice bazate pe utilizarea metodei elementului finit, [7]—[10], permit stabilirea factorului K_1 într-un număr foarte mare de cazuri privind configurația și dimensiunile piesei studiate, geometria și amplasarea defectelor de tip fisură sau sistemul de solicitare al piesei. Deoarece în dezvoltările matematice legate de aflarea factorului K_1 se consideră că starea defectologică existentă în piesele analizate conține numai defecte plane de tip fisură, la determinarea lui K_1 într-un caz concret se pune problema asimilării (înlocuirii) defectelor reale (sufluri, incluziuni solide, microretasuri, macro- sau microfisuri, defecte de structură etc.) din piesa studiată cu fisuri plane echivalente din punctul de vedere al concentrării tensiunilor și deformațiilor. Considerată pînă nu demult una din dificultățile principale legate de utilizarea metodelor mecanicii ruperii în aplicațiile inginerești, această problemă are în prezent numeroase rezolvări; pentru exemplificare, în tabelul 1 se prezintă modul de determinare a di-

mensiunilor fisurilor echivalente cu diferite defecte plane reale (incluziuni solide, fisuri plane cu geometrie neregulată, sufluri aplatizate prin laminare sau forjare etc.), [11], [12].

K_{1C} reprezintă factorul critic de intensitate a tensiunilor pentru materialul din care este confecționată piesa analizată; deoarece în dezvoltările teoretice proprii mecanicii ruperii se consideră că la vîrful defectelor plane de tip fisură existente în piesa analizată se creează stări de tensiuni și deformații neafectate de prezența unor deformații plastice importante, factorul K_{1C} este o caracteristică de tenacitate, ce exprimă (pentru temperatura la care este determinată) rezistența materialului piesei la inițierea ruperii fragile (inițierea propagării instabile a fisurilor). Determinarea experimentală a factorului K_{1C}, în condiții care să țină seama de semnificația fizică a acestei caracteristici, implică executarea unor încercări mecanice speciale, de mare complexitate, a căror metodologie de realizare este prezentată sintetic în tabelul 2. Dificultățile tehnico-economice legate de realizarea acestor încercări, ce pot fi evidențiate analizînd datele din tabelul 2, reprezintă principalele obstacole în calea extinderii aplicării metodelor mecanicii ruperii la rezolvarea problemelor inginerești privind siguranța în exploatare a pieselor metalice. Pentru depășirea acestora s-au dezvoltat numeroase metode teoretico-experimentale care permit evaluarea suficient de precisă a factorului K_{1C}, fără efectuarea încercărilor complicate și costisitoare de determinare directă a acestei caracteristici de tenacitate; în mulțimea metodelor de acest fel, o categorie importantă este constituită din metodele, prezentate în continuare, ce furnizează relații sau proceduri de stabilire a factorului K_{1C} pe baza rezultatelor încercării de încovoiere prin șoc.

2. METODE DE EVALUARE A FACTORULUI K_{1C} PE BAZA REZULTATELOR ÎNCERCĂRII DE ÎNCOVOIERE PRIN ȘOC

Efectuînd în paralel, la diferite temperaturi, pe epruvete prelevate din diverse materiale metalice (în special din oțeluri), încercări pentru determinarea tenacității la rupere K_{1C} (sau K_{1D} — factorul critic de intensitate a tensiunilor determinat în condiții de solicitare dinamică, [1], [13]) și încercări de încovoiere prin șoc (pe epruvete cu crestătura în formă de V) și analizînd prin metodele statisticii matematice rezultatele obținute, s-a stabilit existența unor dependențe între caracteristicile furnizate de cele două tipuri de încercări, exprimabile prin funcții de regresie (simplă sau multiplă) cu coeficienți de corelație semnificativi.

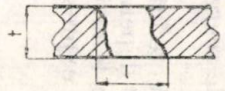
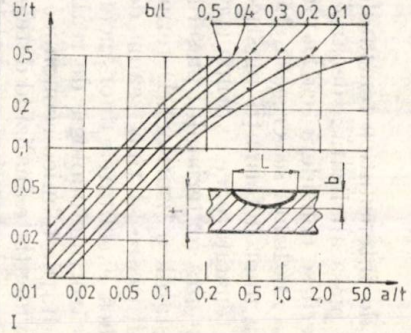
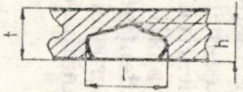
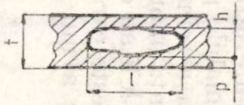
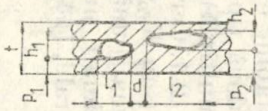
2.1. Cercetările privind existența unor corelații directe între factorul K_{1C} (sau K_{1D}) și energia de rupere KV au evidențiat că dependențele cu cea mai bună veridicitate între aceste caracteristici de tenacitate pot fi exprimate prin funcții de regresie avînd următoarele expresii analitice generale, [14], [15]:

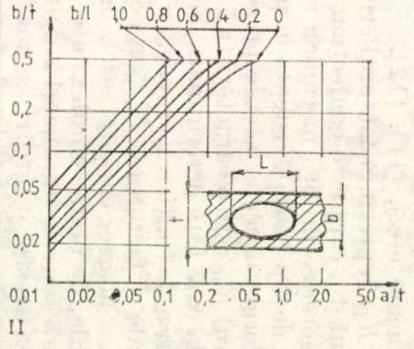
$$K_{1C}^2 = \alpha R_e (KV) - \beta R_e^2 \tag{2}$$

sau

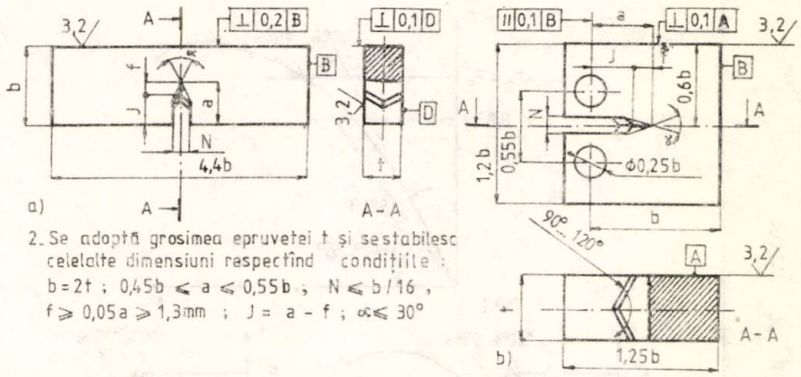
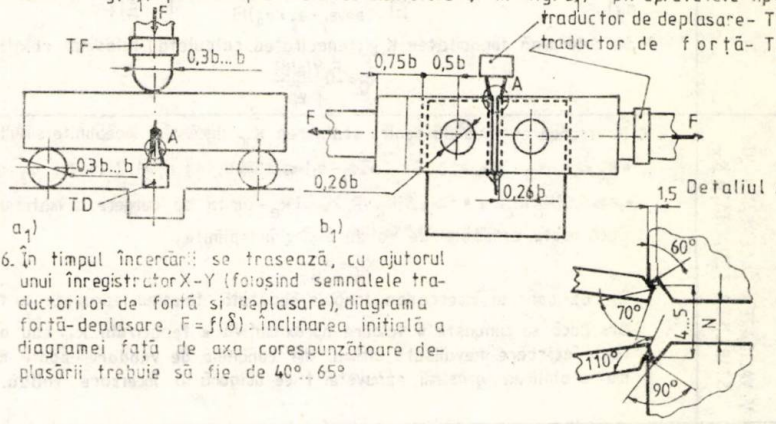
$$K_{1C}^2 = \alpha_1 (KV) - \beta_1 R_e^2 \tag{3}$$

TABELUL 1

CAZUL	SCHIȚA DEFECTULUI REAL	CRITERII DE ECHIVALARE	DIMENSIUNILE FISURII ECHIVALENTE		NOMOGRAME DE CALCUL
			DE TIP ELIPTIC	PĂTRUNSE	
1		—	—	lungimea fisurii: $2a = l$	
2		$h \geq t/2$	—	$2a = l$	
		$h < t/2$	fisură semieliptică: lungimea $L = l$, latimea $b = h$	2a rezultă din nomograma I	
3		$h \geq t/2$		$2a = l$	
		$h < t/2$ și $p \leq h/2$	fisură semieliptică: $L = l$; $b = p + h$	2a rezultă din nomograma I	
		$h < t/2$ și $p > h/2$	fisură eliptică: $L = l$; $b = p$	2a rezultă din nomograma II	
4		$d \leq (l_1 + l_2)/2$	fisură semieliptică: $L = l_1 + d + l_2$, $b = \max(h_1, h_2)$	2a rezultă din nomograma I	
		$d > (l_1 + l_2)/2$	defectele se consideră independente		
5		$d \leq (l_1 + l_2)/2$ și $f \leq (h_1 + h_2)/2$	fisură semieliptică: $L = l_1 + d + l_2$, $b = h_1 + f + h_2$	2a rezultă din nomograma I	
		$d > (l_1 + l_2)/2$ sau $f > (h_1 + h_2)/2$	defectele se consideră independente		
6		$d \leq (l_1 + l_2)/2$	fisură eliptică: $L = l_1 + d + l_2$, $b = p_2 - p_1 + \max(h_1, h_2)$	2a rezultă din nomograma II	
		$d > (l_1 + l_2)/2$	defectele se consideră independente		

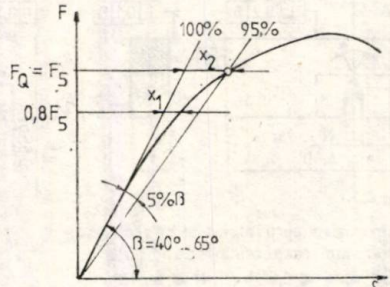


TABELUL 2

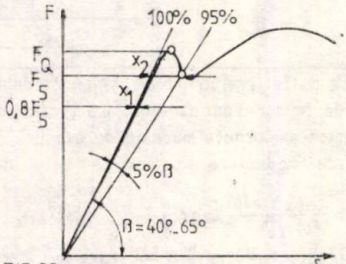
ETAPA DE LUCRU	PRESCRIPȚII ȘI RECOMANDĂRI*
I. STABILIREA FORMEI ȘI DIMENSIUNILOR EPRUVETELOR	1. Se adoptă tipul epruvetei: a) epruvetă de încovoiere, b) epruvetă de tracțiune (tip CT)  2. Se adoptă grosimea epruvetei t și se stabilesc celelalte dimensiuni respectînd condițiile : $b = 2t$; $0{,}45b \leqslant a \leqslant 0{,}55b$; $N \leqslant b/16$, $f \geqslant 0{,}05a \geqslant 1{,}3mm$; $J = a - f$; $\alpha \leqslant 30°$
II. PRELUCRAREA EPRUVETELOR ȘI REALIZAREA FISURILOR	3. Prelucrarea epruvetelor se face astfel: prelucrare mecanică de degroșare, tratamente termice, prelucrare mecanică de finisare (adaos minim 0,5), prelucrare crestături. 4. Fisurile, în prelungirea crestăturilor prelucrate mecanic, se execută pe mașini de încercat la solicitări variabile de încovoiere sau axiale; ciclul de solicitare se proiectează astfel încît: $F_{min} \leqslant F_{max}/4$; $K_o/E = \frac{F_{max} \cdot Y(a/b)}{E \cdot t \cdot \sqrt{b}} \leqslant 0{,}006\ mm^{1/2}$ în care $Y(\frac{a}{b}) = Y_1(\frac{a}{b}) = 11{,}58(\frac{a}{b})^{1/2} - 18{,}42(\frac{a}{b})^{3/2} + 85{,}18(\frac{a}{b})^{5/2} - 150{,}66(\frac{a}{b})^{7/2} + 154{,}8(\frac{a}{b})^{9/2}$, pentru epruvetele de încovoiere, și $Y(\frac{a}{b}) = Y_2(\frac{a}{b}) = 29{,}6(\frac{a}{b})^{1/2} - 185{,}5(\frac{a}{b})^{3/2} + 655{,}7(\frac{a}{b})^{5/2} - 1017(\frac{a}{b})^{7/2} + 638{,}9(\frac{a}{b})^{9/2}$, pentru epruvetele de tracțiune. Obs. Ciclul de solicitare a fost bine proiectat, dacă ultimul mm al fisurii se realizează în min. 10.000 cicluri, iar toată fisura - în min. 50.000 cicluri.
III. EXECUTAREA ÎNCERCĂRII	5. Încercarea se execută pe mașini care realizează schemele de solicitare prezentate în fig. a_1) - pentru epruvetele de încovoiere - și în fig. b_1) - pt. epruvetele tip CT.  6. În timpul încercării se trasează, cu ajutorul unui înregistrator X-Y (folosind semnalele traductorilor de forță și deplasare), diagrama forță-deplasare, $F = f(\delta)$. Înclinarea inițială a diagramei față de axa corespunzătoare deplasării trebuie să fie de 40°...65°

TABELUL 2 (continuare)

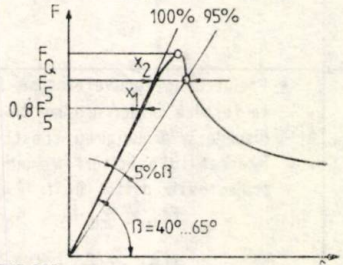
ETAPA DE LUCRU	PRESCRIPȚII ȘI RECOMANDĂRI*.
IV. DETERMINAREA PARAMETRILOR DE CALCUL	7. Pe înregistrarea $F = f(\delta)$ – ce se încadrează în unul din tipurile I, II, III – se determină forța de calcul F_Q



TIP I

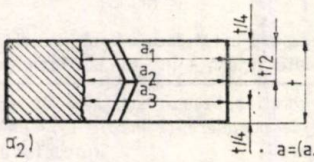


TIP II

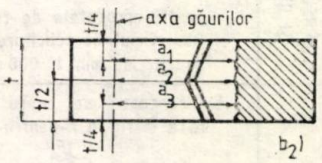


TIP III

8. Pe epruveta ruptă se determină lungimea reală a concentratorului, a, așa cum se arată în fig. a_2) – pentru epruvetele de încovoiere – și în fig. b_2) – pt. epruvetele CT.



a_2) . $a = (a_1 + a_2 + a_3)/3$



b_2)

9. Se determină tenacitatea K_Q (tenacitatea calculată), folosind relația:

$$K_Q = \frac{F_Q \cdot Y(a/b)}{t \cdot \sqrt{b}}$$

V. VALIDAREA ÎNCERCĂRII ȘI STABILIREA TENACITĂȚII K_{1C}	10. Încercarea este validă pentru stabilirea K_{1C} dacă sînt îndeplinite simultan condițiile: • $K_Q \leq 0{,}6K_Q$; • $x_1 < 0{,}25x_2$; • $\lvert a_i - a_j \rvert \leq 2{,}5\%b$, $i \neq j$, $i,j = 1..3$ (v. fig. a_2 și b_2); • $a \geq 2{,}5(K_Q/R_e)^2$; • $t \geq 2{,}5(K_Q/R_e)^2$ (R_e – limita de curgere a materialului). 11. Dacă toate condițiile de validare sînt îndeplinite: $K_{1C} = K_Q$; în caz contrar, încercarea trebuie repetată folosind epruvete cu t mai mare. Obs. Dacă se cunoaște o valoare aproximativă a tenacității K_{1C} sau o valoare K_Q de la o încercare nevalidată, ultima din condițiile de validare poate fi folosită pentru stabilirea grosimii epruvetei t ce asigură o încercare validă.

*.– conform STAS 9760, ASTM 399 și AFNOR A 03-180

dacă temperatura de încercare t este situată în domeniul corespunzător zonei de nivel ductil a curbei $KV = f(t)$, și

$$K_{1C}^2 \text{ (sau } K_{1D}^2) = \gamma E(KV)^{\omega} \tag{4}$$

sau

$$K_{1C} \text{ (sau } K_{1D}) = \gamma_1 (KV)^{\omega_1} \tag{5}$$

dacă temperatura de încercare se află în domeniul corespunzător zonei de tranziție ductil-fragil a curbei $KV = f(t)$.

Formele concrete ale expresiilor (2)—(5) (cu parametrii $\alpha \ldots \omega$ determinați prin metoda celor mai mici pătrate), stabilite pentru o gamă largă de materiale metalice (în special, oțeluri), [14]—[27], stau la baza unei metode de evaluare a factorului K_{1C} fără efectuarea experimentărilor pentru determinarea lui directă : folosind rezultatele încercării de încovoiere prin șoc se construiește curba $KV = f(t)$ pentru materialul studiat, se aleg funcțiile de regresie corespunzătoare caracteristicilor materialului și cu ajutorul lor se stabilește valoarea parametrului de tenacitate K_{1C} (sau K_{1D}) la temperatura dorită sau curba $K_{1C} = g(t)$.

2.2. Analizînd comparativ (pentru diferite mărci de oțeluri) curbele, obținute prin determinări experimentale, ce redau variațiile cu temperatura ale parametrilor de tenacitate K_{1C}, K_{1D}, KV și KV_S (energia de rupere la încercarea de încovoiere statică, folosind epruvete cu crestătură în formă de V, de același tip cu cele utilizate la încercarea de încovoiere prin șoc), s-a constatat, [15], [29], că între funcțiile reprezentate de aceste curbe există următoarele relații de legătură :

$$KV = f(t) \Rightarrow KV_S = f(t - \Delta t) \tag{6}$$

și

$$K_{1D} = g(t) \Rightarrow K_{1C} = g(t - \Delta t), \tag{7}$$

valoarea în °C a parametrului Δt fiind corelată cu limita de curgere la 20°C a materialului studiat R_e, exprimată în N/mm², prin funcția de regresie :

$$\Delta t = \begin{cases} 95 - 0{,}1\ R_e & \text{pentru } 250 \leqslant R_e \leqslant 950, \\ 0 & \text{pentru } R_e > 950. \end{cases} \tag{8}$$

Aceste constatări au condus la formularea unei noi metode de evaluare a factorului K_{1C} pe baza rezultatelor încercării de încovoiere prin șoc, constînd în : determinarea experimentală a curbei $KV = f(t)$, construirea curbei $K_{1D} = g(t)$ utilizînd funcțiile de regresie de tipul (4) sau (5), calcularea valorii parametrului Δt și trasarea curbei $K_{1C} = g(t - \Delta t)$.

2.3. Cercetări relativ recente, [15], [23], [25], efectuate pe o gamă largă de oțeluri, au evidențiat existența unor dependențe între temperatura de tranziție ductil-fragil t_{tr} (determinată pe baza rezultatelor încercării de încovoiere prin șoc) și temperatura $t_{K_{1C}X}$ la care factorul K_{1C} (determinat prin încercări efectuate după metodologia expusă în tabelul 1) are o valoare dată $K_{1C} = X$. Astfel, s-a stabilit că dependența constatată

între temperatura de tranziție t_{KV28} (definită pe baza criteriului : tranziția ductil-fragil se realizează la temperatura la care $KV = 28$ J) și temperaturile $t_{K_{1C}X}$ poate fi exprimată printr-o funcție de regresie avînd forma generală :

$$t_{K_{1C}X} = \alpha t_{KV28} + \beta, \tag{9}$$

în care, coeficientul $\alpha = 1{,}4$, iar parametrul β, în °C, este dat, în funcție de valoarea considerată pentru X, în N/mm$^{3/2}$, de relația :

$$\beta = q(X) = -83{,}5 + \sqrt{3{,}91\,X - 5847{,}5}. \tag{10}$$

Stabilirea dependenței prezentate a condus la formularea unei metode de determinare a curbelor $K_{1C} = g(t)$ pe baza rezultatelor încercării de încovoiere prin șoc, care constă în : stabilirea experimentală a temperaturii t_{KV28}, întocmirea tabloului de valori al funcției $K_{1C} = g(t)$ — dînd diferite valori pentru $K_{1C} = X$ și calculînd cu relația (9) temperaturile corespunzătoare $t_{K_{1C}X}$ — și trasarea curbei $K_{1C} = g(t)$.

Datele necesare utilizării practice a celor trei metode pentru evaluarea tenacității la rupere K_{1C} a oțelurilor sînt prezentate sintetic în tabelul .

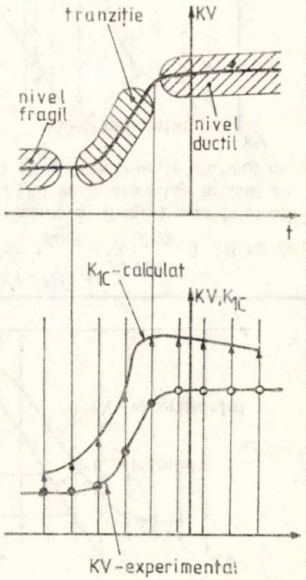
3. CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND STABILIREA METODELOR APLICABILE PENTRU EVALUAREA TENACITĂȚII K_{1C} A OȚELURILOR ROMÂNEȘTI TURNATE ÎN PIESE

Ca exemplificare a modului cum trebuie selectate și aplicate practic metodele de evaluare a tenacității la rupere K_{1C} pe baza rezultatelor încercării de încovoiere prin șoc, se prezintă în continuare rezultatele unui program de determinări experimentale realizat de autor asupra oțelurilor T35MoCrNi08 (0,3...0,4% C ; max. 0,45% Si ; 0,5...0,8% Mn ; max. 0,03% S ; max. 0,03% P ; 0,6...1,0% Cr ; 0,6...1,0% Ni ; 0,15...0,25% Mo), T35Mn14 (0,3...0,4% C ; 0,2...0,44% Si, 1,2...1,6% Mn ; max. 0,04% S ; max. 0,04% P) și T22MoCrNi12 (0,17...0,24% C ; 0,2...0,4% Si ; 0,5...0,8% Mn ; max. 0,03% S ; max. 0,03% P ; 0,4...0,7% Cr ; 1,0...1,4% ... Ni ; 0,15...0,25% Mo), preconizate a fi folosite la fabricarea echipamentelor petroliere destinate exploatării la temperaturi scăzute (pînă la —60°C).

Epruvetele folosite la experimentări au fost prelevate din probe tip placă, cu dimensiunile 200 × 200 × 90, turnate din mai multe șarje elaborate din oțelurile supuse cercetării (5 șarje din oțelul T35MoCrNi08 și cîte 4 șarje din oțelurile T35Mn14 și T22MoCrNi12). Probele turnate aparținînd fiecărei mărci de oțel au fost împărțite în două loturi și s-au tratat termic (înainte de prelucrarea epruvetelor) în două etape : în etapa primară toate probele au fost supuse unui tratament termic compus din recoacere de omogenizare + normalizare ($RO + N$), iar în etapa finală fiecare lot de probe a fost tratat diferențiat, primului lot aplicîndu-i-se normalizare + revenire înaltă ($N + r$), iar celui de-al doilea lot — călire + revenire înaltă (îmbunătățire, $C + r$) ; în ambele cazuri, tratamentul de revenire aplicat a constat din încălzirea probelor la $t_i = 680$°C ($T_i = 953$

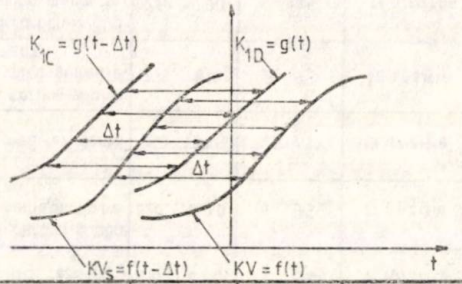
TABELUL 3

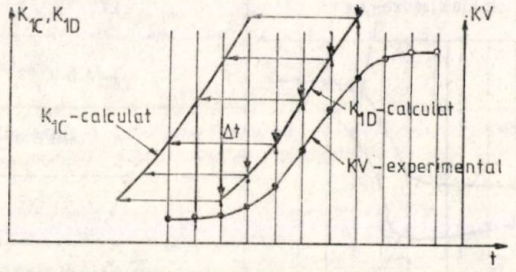
METODA	AUTORI	DOMENII DE VALABILITATE				RELAȚII*, PROCEDURI
		MATERIAL	R_e, N/mm^2	KV, J	TEMPERATURA	
I	BARSOM-NOVAK-ROLFE [14] ... [17]	Oțeluri carbon și aliate de mică, medie și mare rezistență	410...1700	31...121	nivel ductil	$K_{1C}^2 = 640 \cdot R_e \cdot (KV) - 6,4 \cdot (R_e)^2$
	PARIS-MERKLE [15],[18]	Oțeluri carbon și aliate de medie și mare rezistență	$10^6 KV/(R_e)^2 < 40$		nivel ductil	$K_{1C}^2 = 0,48 \cdot 10^6 \cdot (KV) - 1,44 \cdot (R_e)^2$
	AULT-WALD-BERTOLO [14],[19]	Oțeluri aliate de mare rezistență	1610...1980	15...30	nivel ductil	$K_{1C}^2 = 180 \cdot R_e \cdot (KV) - 1,1 \cdot (R_e)^2$
	THORBY-FERGUSON [14],[20]	Oțeluri carbon și aliate de mică rezistență	400...560	5...125	nivel ductil și tranziție	$K_{1C} = 537 \cdot (KV)^{0,534}$
	BARSOM-ROLFE [14] ... [17]	Oțeluri carbon și aliate de mică, medie și mare rezistență	270...1700	4...82	tranziție	$K_{1C}^2 = 0,22 \cdot E \cdot (KV)^{1,5}$
	SAILORS-CORTEN [14],[15],[21]	Oțeluri carbon și aliate de mică rezistență	410...480	7...68	tranziție	$K_{1C} = 461,4 \cdot (KV)^{0,5}$
	LOGAN-CROSSLAND [14], [26]	Oțeluri carbon și aliate de medie și mare rezistență.	820...1420	6...55	tranziție	$K_{1C} = 643 \cdot (KV)^{0,5}$
	BARSOM [14],[15],[27]	Oțeluri carbon și aliate de mică rezistență	250...345	27..61	tranziție	$K_{1D}^2 = 0,65 \cdot E \cdot (KV)$
	BARSOM-SAILORS [14],[21]	Oțeluri carbon și aliate de mică și medie rezistență	270...815	3...95	tranziție	$K_{1D} = 484,8 \cdot (KV)^{0,375}$
	ROBERTS-NEWTON [14]	Oțeluri carbon și aliate de mică, medie și mare rezistență	270..1700	5...125	tranziție	$K_{1C} = 268 \cdot (KV)^{0,63}$
		Oțeluri carbon și aliate de mică și medie rezistență	250...820	3...95	tranziție	$K_{1D} = 711 \cdot (KV)^{0,17}$
	BEGLEY-LOGSDON [14],[15],[28]	Oțeluri carbon și aliate de mică și medie rezistență	270...815	—	nivel fragil	$K_{1C} = 2,27 \cdot R_e^t$; R_e^t - lim. de curgere la temperatura t

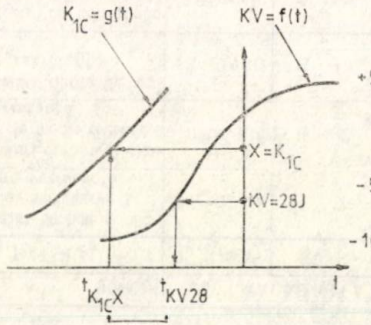


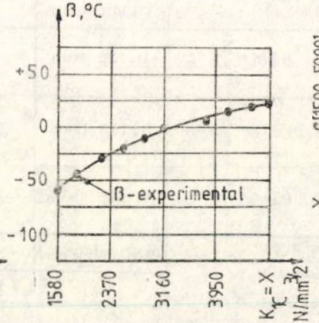
TABELUL 3 (continuare)

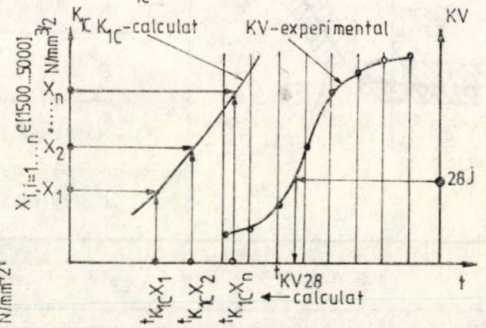
METODA	AUTORI	DOMENII DE VALABILITATE				RELAȚII* PROCEDURI
		MATERIAL	R_e, N/mm^2	KV, J	TEMPERATURA	
II	BARSOM-ROLFE [15], [29]	Oțeluri carbon și aliate de mică și medie rezistență	250...1000	5...100	tranziție	- Se determină experimental $KV = f(t)$ - Se calculează $K_{1D} = g(t)$, folosind relația: $K_{1D}^2 = 0{,}65 \cdot E \cdot (KV)$ - Se calculează: $\Delta t = 95 - 0{,}1 \cdot R_e \geq 0$ și se trasează $K_{1C} = g(t - \Delta t)$
III	MARANDET-SANZ [15], [23], [25]	Oțeluri carbon și aliate de mică și medie rezistență	300...1000	5...125	tranziție	- Se determină experimental $KV = f(t)$ și t_{KV28} - Dînd valori $X = K_{1C}$ și calculînd $t_{K_{1C}X} = 1{,}4\, t_{KV28} + \beta$ (β se determină din diagrama experimentală $\beta = q(X)$ sau folosind relația $\beta = \sqrt{3{,}91X - 5847{,}5} - 83{,}5$), se întocmește tabloul de valori al funcției $K_{1C} = g(t)$ și se construiește graficul ei











* relații valabile dacă K_{1C} se exprimă în N/mm$^{3/2}$, KV - în J, iar R_e și E - în N/mm^2

K), menținerea lor la t_i o durată $\tau_m = 2$ ore (parametrul Hollomon-Jaffe, [30], avînd valoarea $P_{HJ} = T_i\ (18 + 1g\ \tau_m) = 17000$) și apoi răcirea în aer.

Din probele pregătite microstructural prin tratamentele termice aplicate s-au prelucrat prin așchiere epruvete rotunde (cu diametrul $d_0 = 10$ mm) proporționale normale pentru încercarea la tracțiune (STAS 200), epruvete normale cu crestătură în V pentru încercarea de încovoiere prin șoc (STAS 7511) și epruvete tip CT (cu $t = 50$ mm) pentru determinarea tenacității la rupere în condițiile stării plane de deformație (metoda K_{1C}, STAS 9760).

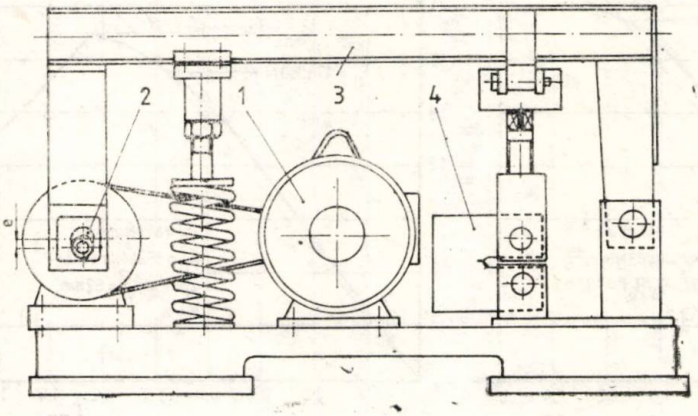


Fig. 1

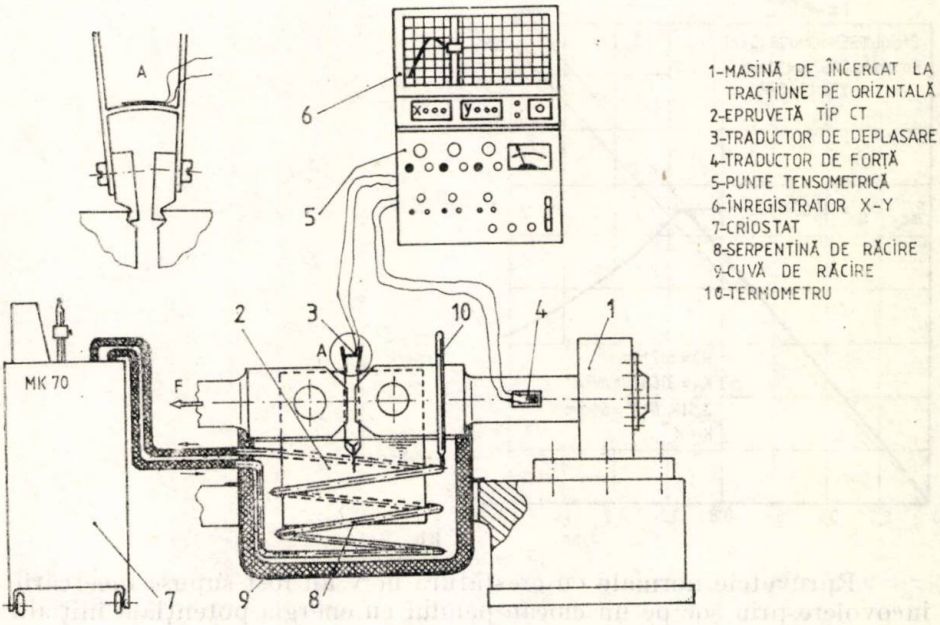


Fig. 2

Epruvetele rotunde proporționale normale au fost supuse încercării la tracțiune, la temperatura $t = 20°C$, pe o mașină universală de 0,3 MN, respectînd metodologia din STAS 200. Caracteristicile mecanice determinate pe baza acestor încercări au fost : rezistența la rupere R_m, limita de curgere convențională $R_{p0,2}$ ($R_{p0,2} = R_e$) și alungirea la rupere A_5.

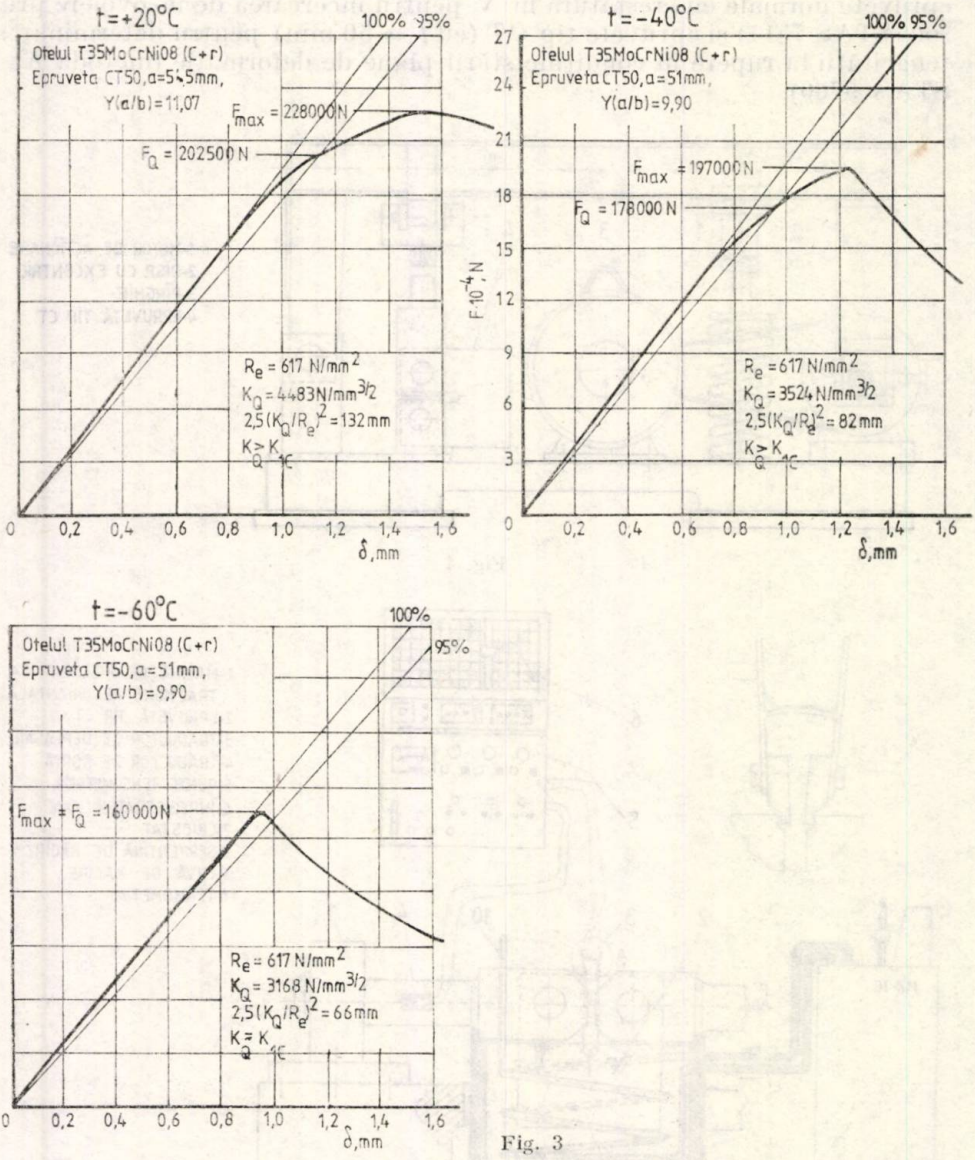


Fig. 3

Epruvetele normale cu crestătură în V au fost supuse încercării de încovoiere prin șoc pe un ciocan-pendul cu energia potențială inițială de 300 J. Încercările au fost efectuate la temperatura ambiantă ($t = 20°C$),

TABELUL 4

DENUMIREA CARACTERISTICILOR DETERMINATE		VALORILE MEDII* ALE CARACTERISTICILOR DETERMINATE PENTRU OȚELUL:						ÎMPRĂȘTIEREA MAXIMĂ A VALORILOR FAȚĂ DE VALORILE MEDII
		T35MoCrNi08		T35Mn14		T22MoCrNi12		
		N+r	C+r	N+r	C+r	N+r	C+r	
R_m, N/mm^2, la t=+20°C		698	773	612	693	573	641	± 15%
R_e, N/mm^2, la t=+20°C		513	617	464	562	406	514	± 15%
A_5, % , la t=+20°C		20	19	24	17	29	24	± 10%
KV, J, la t= ,°C D - nivel ductil T - tranziție	+20	56 D	71 D	59 D	90 D	84 D	86 D	±29%
	0	31 T	65 D	42 T	78 T	56 T	89 D	
	-20	23 T	59 T	27 T	61 T	40 T	47 T	
	-40	16 T	41 T	22 T	47 T	31 T	34 T	
	-60	11 T	28 T	17 T	32 T	20 T	23 T	
t_{KV28} ,°C		-5	-60	-19	-63	-42	-50	-
K_{1C} (sau K_Q), N/mm$^{3/2}$, la t= ,°C	+20	3850	4742	4412	4718	4318	4850	± 5%
	0	2950	4407	3126	4196	3620	4350	
	-20	2301	4002	2687	4050	3112	3311	
	-40	1850	3843	2326	3216	2621	2801	
	-60	1382	3178	2012	2651	2218	2306	

* - mediile calculate pe baza determinarilor efectuate pe 12...25 epruvete din fiecare marcă de oțel (3...5 epruvete din din fiecare sarjă) și lot (variantă) de tratament termic final

respectînd metodologia de lucru din STAS 7511 și la temperaturi scăzute ($0°C \geqslant t \geqslant -60°C$), utilizînd metodologia recomandată în STAS 6833 (epruvetele încercate la temperaturi scăzute au fost răcite într-un ultracriostat tip MF 180 N — R.D.G.). Pentru fiecare din epruvetele pregătite s-a determinat prin efectuarea încercării energia de rupere KV.

Epruvetele tip CT 50 s-au pregătit și încercat aplicînd metodologia expusă în tabelul 2 ; fisurile în prelungirea crestăturilor prelucrate mecanic ale epruvetelor au fost propagate prin solicitări axiale repetate folosind o mașină cu pîrghie și excentric ce materializează schema constructivă prezentată în figura 1, iar încercarea epruvetelor s-a efectuat într-o instalație avînd alcătuirea redată în figura 2. Înregistrările $F = f(\delta)$, de tipul celor prezentate în figura 3, obținute în timpul încercării epruvetelor tip CT au fost utilitate pentru determinarea tenacităților K_Q și K_{1C}.

Rezultatele obținute în urma realizării tuturor încercărilor descrise sînt redate sintetic în tabelul 4, [30], [31].

TABELUL 5

METODA	RELAȚII DE CALCUL	DOMENIUL VALORILOR KV CONSIDERATE ÎN CALCULE	COEFICIENTUL DE CORELAȚIE, r
I	◇ $K_{1C}^2 = 640 \cdot R_e \cdot (KV) - 6{,}4 (R_e)^2$	NIVEL DUCTIL , D	0,319
	MEDIA VALORILOR OBȚINUTE CU RELAȚIILE ▼ ȘI ◇	NIVEL DUCTIL , D	0,704
	▼ $K_{1C} = 537 (KV)^{0{,}534}$	NIVEL DUCTIL , D	0,783
		TRANZIȚIE , T	0,312
	◈ $K_{1C}^2 = 0{,}22 E (KV)^{1{,}5}$	TRANZIȚIE , T	0,739
	▼ $K_{1C} = 461{,}4 (KV)^{0{,}5}$	TRANZIȚIE , T	0,862
	☡ $K_{1C} = 268 (KV)^{0{,}63}$	TRANZIȚIE , T	0,755
II	$K_{1D} = 0{,}65 E (KV)$ $\Delta t = 95 - 0{,}1 R_e$ $K_{1D} = g(t) \Rightarrow K_{1C} = g(t - \Delta t)$	TRANZIȚIE , T	0,714
III	$t_{K_{1C}} X = 1{,}4\, t_{KV28} + \beta$ SE DĂ $t_{K_{1C}} X \rightarrow \beta$, °C $\beta = -83{,}5 + \sqrt{3{,}91 X - 5847{,}5}$ $K_{1C} = X = 0{,}256 \beta^2 + 42{,}7 \beta + 3281$	TRANZIȚIE , T	0,215

Folosind metodele prezentate anterior (tabelul 3) și rezultatele încercărilor de încovoiere prin șoc (tabelul 4) s-au calculat valorile tenacității la rupere K_{1C} ; pentru aprecierea concordanței între aceste valori și cele obținute experimental (tabelul 4) s-au calculat coeficienții de corelație r, [30], expuși în tabelul 5.

Analizînd datele cuprinse în tabelul 5 se constată că, pentru temperaturile corespunzătoare zonelor de tranziție ale curbelor $KV = f(t)$, evaluarea cea mai veridică ($r = 0{,}862$) a factorului K_{1C} este asigurată prin utilizarea relației (Sailors — Corten, [14], [15], [21]):

$$K_{1C} = 461{,}4 \cdot (KV)^{0{,}5}, \tag{11}$$

iar pentru temperaturile ce caracterizează zonele de nivel ductil ale dependențelor $KV = f(t)$, K_{1C} calculat ca medie aritmetică a valorilor obținute din relația (11) și din relația (Barsom — Novak — Rolfe, [14]...[17]):

$$K_{1C}^2 = 640\, R_e\, (KV) - 6{,}4\, R_e^2 \tag{12}$$

se corelează cel mai bine ($r = 0{,}704$) cu valorile experimentale. Diagramele din figura 4 atestă valabilitatea acestor constatări, evidențiind buna concordanță între dependențele $K_{1C} = g(t)$ evaluate prin calcul cu relațiile (11) și (12) (folosind rezultatele încercărilor de încovoiere prin șoc) și cele stabilite pe baza determinărilor experimentale directe.

Continuînd cercetările asupra oțelurilor T35MoCrNi08, T35Mn14 și T22MoCrNi12 prin determinări privind caracteristicile de tenacitate corespunzătoare altor stări structurale decît cele analizate în cadrul programului experimental prezentat [30], [32] și efectuînd cercetări asemănătoare și asupra altor oțeluri turnate (cum ar fi, de exemplu, oțelurile carbon OT 50 și OT 55, [32] și oțelul slab aliat T30MnNi10, [33]), s-a evidențiat că, în toate cazurile, cele mai bune evaluări ale factorului K_{1C} sînt asigurate de relațiile (11) și (12); ca urmare, se poate avansa ideea că recomandarea privind utilizarea acestor relații la determinarea tenacității la rupere K_{1C} (pe baza rezultatelor încercărilor de încovoiere prin șoc) are valabilitate generală în cadrul clasei oțelurilor carbon și slab aliate turnate în piese.

4. CONCLUZII

Tenacitatea la rupere K_{1C}, caracteristică necesară pentru aplicarea principiilor mecanicii ruperii la rezolvarea problemelor inginerești, se determină experimental prin încercări complexe și deosebit de costisitoare (vezi tabelul 2); dificultățile tehnico-economice legate de realizarea unor astfel de încercări sînt evitate dacă se folosesc metodele prezentate în tabelul 3, ce permit evaluarea factorului K_{1C} pe baza rezultatelor încercării de încovoiere prin șoc.

Alegerea metodei adecvate determinării factorului K_{1C} pentru un material ce se studiază nu dispune de criterii fundamentate teoretic. Modalitatea de a decide corect asupra metodei ce trebuie aplicată într-un caz concret, constă în realizarea unui program experimental structurat, condus și finalizat asemănător celui prezentat în lucrare pentru oțelurile slab aliate turnate.

Primită la redacție la 17 iulie 1985

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

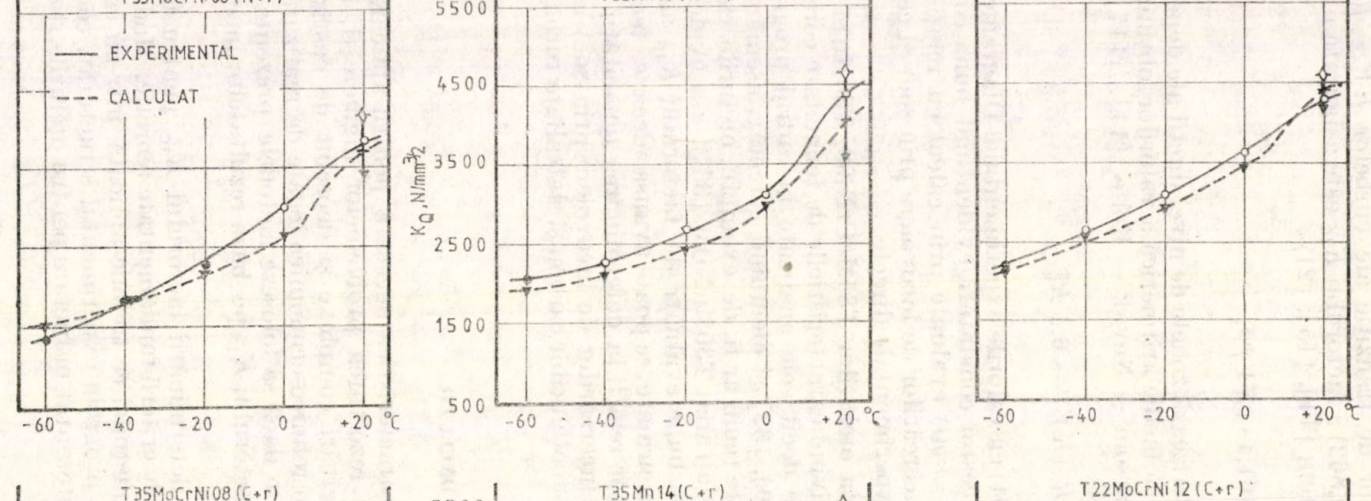

T35MoCrNi08 (N+r)
EXPERIMENTAL
CALCULAT
T35Mn14 (N+r)
T22MoCrNi12 (N+r)
K_Q, N/mm$^{3/2}$
5500
4500
3500
2500
1500
500
-60 -40 -20 0 +20 °C
T35MoCrNi08 (C+r)
T35Mn14 (C+r)
T22MoCrNi12 (C+r)
$K_Q > K_{1C}$
$K_Q = K_{1C}$
rel. SAILORS-CORTEN
rel. BARSOM-NOVAK-ROLFE
media între ▼ și ◇

Fig. 4

BIBLIOGRAFIE

1. D. GIOCLOV, *Mecanica ruperii materialelor*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1977, p. 305—322.
2. GH. ZECHERU, D. RAȘEEV, *O metodă pentru estimarea rezistenței la inițierea ruperii în piesele metalice destinate exploatării la temperaturi scăzute*, S.C.M.A., Tom. 39, nr. 3/1980, p. 441—439.
3. T. PANĂ, *Aplicații inginerești ale mecanicii ruperilor*. Ed. Tehnică, București, 1975, p. 151—162.
4. V. Z. PARTON, E. M. MOROZOV, *Elasto-plastic fracture mechanics*, MIR Publishers, Moscow, 1978, p. 55—87.
5. W. BROWN, J. SRAWLEY, *Plane strain crack toughnes testing of high strength metallic materials* (în limba rusă), MIR, Moscova, 1972, p. 121—142.
6. A. KAMEI, T. YOKOBORI, *Reports of the Research Institute for Strength and Fracture of Materials*, vol. **10**, p. 1—65 (1974).
7. V. V. PANASIUC ș.a., *Metodi ocenki treșcinostoikosti konstrukționnih materialov*, Naukova dumka, Kiev, 1977, p. 190—231.
8. O. L. BOWIE, D. M. NEAL, *A modified mapping-collocation technique for accurate calculation of stress intensity factors*, Int. Journ. of Fracture Mech., nr. 6/1970, p. 199—206.
9. E. BYSKOV, *Calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements*, Int. Journ. of Fracture Mech., nr. 6/1970, p. 159—167.
10. D. M. NEAL, *Stress intensity factors for cracks emanting from rectangular cutouts*, Int. Joûrn. of Fracture Mech., nr. 6/1970, p. 393—400.
11. M. BRAMAT, J.-P. DOUCET, *Aspects actuels de l'Application de la Mécanique de la rupture au cas des Assamblages soudés*, Soudage et Techniques Connexes, sept.-oct./1977, p. 331—350.
12. D. RAȘEEV, GH. ZECHERU, *Tehnologia fabricației aparaturii instalațiilor statice, petrochimice și de rafinării*, Ed. Tehniță, București, 1982, p. 291—297.
13. A. K. SHOEMAKER, S. T. ROLFE, *The static and dynamic low-temperature crack-toughness performance of seven structural steels*, Engineering Fracture Mechanics, nr. 2/1971, p. 87—93.
14. R. ROBERTS, C. NEWTON, *Interpretative report on small-scale test correlations with K_{IC} data*, W.R.C. Bulletin, nr. 265/1983, p. 1—16.
15. G. LECLERCQ ș.a. *Evaluation de la ténacité des matériaux à partir de paramètres issus d'essais mécaniques simples*, C.I.T., nr. 3/1976, p. 727—748.
16. J. M. BARSOM, S. T. ROLFE, *Correlations between K_{IC} and charpy V notch test results in the transition-temperature range*, ASTM-STP 466, 1970, p. 281—302.
17. G. SANZ, *Développements récents dans le domaine de la mécanique de rupture*, Revue de Métallurgie, nr. 10/1977, p. 545—563
18. P. C. PARIS ș.a., *Some further results on J-integral analysis and estimates*, ASTM-STP 537, 1973, p. 231—244
19. R. T. AULT ș.a., *Developement of an improved ultra-high stregth steel for forged aire aft components*, AFMU-TR-71—27, Air Force Materials Laboratory, 1971, p. 1—38.
20. P. N. THORBY, W. G. FERGUSON, *The fracture toughness of HY 60*, Materials Science and Engineering, nr. 22/1976, p. 177—184.
21. R. H. SAILORS, H. T. CORTEN, *Relationship between material fracture toughness using fracture mechanics and transition temperature tests*, ASTM-STP 514, 1972, p. 164—191.
22. A. BAUS, ș.a. *Etude par la mécanique de la rupture de la ténacité, de la fissuration par fatigue et de la fissuration par corrosion sous contrainte d'aciers à très haute résistance*, Revue de Métallurgie, nr. 12/1975, p. 891—934
23. B. MARANDET, G. SANZ, *Etude par la mécanique de la rupture de la ténacité d'aciers à résistance moyenne fournis en forte épaisseur*, Revue de Métallurgie, nr. 4/1976, p. 359—381
24. W. SCHÜTZ, *Versuchsmethoden der Bruchmechanik*, Der Maschinen-Schaden, nr. 5/1975, p. 137—148
25. G. SANZ, *Essai de mise au point d'une methode quantitative de choix des qualités d'aciers vis-à-vis du risque de rupture fragile*, Revue de Métallurgie — C.I.T., iulie, 1980, p. 622—642

26. J. G. LOGAN, B. CROSSLAND, *The fracture thoughness of En 25 and a 3% Ni—Cr—Mo—V steels at various strength levels together with Charpy impact data*, Practical Aplications of Fracture Mechanics to Pressure Vessel Technology, I.M.E., 1971, p. 148—155.
27. J. M. BARSOM, *Development of the AASHTO fracture toughness recuirements for bridge steels* Engineering Fracture Mechanics, nr. 7, 1975, p. 605—618.
28. J. A. BEGLEI, W. A. LOGSDON, *Correlation of fracture toughness and Charpy properties, for rotor steels*, Rapport Westinghouse, iulie, 1971, p. 22—86.
29. S. T. ROLFE, *Use of fracture mechanics in design*, International Metallurgical Review septembrie, 1974, p. 183—198.
30. GH. ZECHERU, *Contribuții la studiul construcției prevenitoarelor de erupție folosite la forajul de mare adîncime*, Teză de doctorat, I.P.G., Ploiești, 1981, p. 111—156.
31. D. RAȘEEV, GH. ZECHERU, *Cercetări privind comportarea unor oțeluri turnate folosite în utilajul petrolier destinat funcționării în zone geografice cu temperaturi scăzute*, Construcția de mașini, nr. 5/1980, p. 303—309.
32. D. RAȘEEV ș.a., *Cercetări privind comportarea oțelurilor turnate în piese utilizate în construcția echipamentului petrolier funcționînd în climat de temperaturi scăzute (pînă la —60 C)*, Contract de cercetare științifică nr. 64/78, I.P.G. Ploiești, 1979, p. 4—35.
33. D. RAȘEEV ș.a., *Cercetări privind utilizarea oțelurilor T30MnNi10 și T35MoCrNi08 la realizarea armăturilor petroliere pentru temperaturi scăzute*, Contract de cercetare științifică nr. 29/82, I.P.G. Ploiești, 1982, p. 3—27.

JOACHIM RAABE, *Hydro, power : The Design, Use and Function of Hydromechanical Hydraulic and Electrical Equipment* (Energie hidraulică : Proiectarea, exploatarea și funcționarea echipamentului hidromecanic, hidraulic și electric), VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1985, 628 p.

Joachim Raabe, profesor la Universitatea Tehnică din München, este recunoscut pe plan internațional ca unul dintre marii specialiști din domeniul mașinilor și echipamentelor hidraulice. Cărțile și numeroasele lucrări ale sale sînt considerate ca lucrări de referință. Se menționează în mod deosebit cea mai recentă carte a Prof. J. Raabe „Energia hidraulică" apărută în 1985, lucrare de înalt nivel tehnico-științific, reprezentînd o vastă monografie prin sintetizarea a peste 1000 de titluri bibliografice. Fiecare capitol conține contribuții originale experimentale sau teoretice ale autorului sau ale colaboratorilor săi de la Școala de mașini hidraulice din München.

Astfel, în capitolul 1 se prezintă potențialul hidraulic pe plan mondial și nivelul său de valorificare în diferite țări precum și viitorul valorificării acestei energii în centrale hidroelectrice și de acumulare prin pompaj.

În capitolul al 2-lea se dezvoltă aspectele economice ale centralelor hidroelectrice prin exemplificare cu cele mai tipice centrale din acest punct de vedere.

În capitolul al 3-lea este redată o sinteză a construcțiilor hidrotehnice și a echipamentelor hidromecanice ce se întîlnesc la diferite amenajări hidroelectrice. Se prezintă numeroase realizări cu elemente constructive principale și cu geometria lor.

Capitolul al 4-lea, se preocupă de numărul de unități de hidroagregate și diametrul economic al rotorului turbinei pentru diferite dispoziții de amenajări. Se acordă o atenție specială coeficientului k_{u_e} al vitezei de transport periferice optime. Pentru CHEAP se analizează îndeaproape volumul rezervorului sau al bazinului de acumulare.

În capitolul al 5-lea se prezintă sintetic baza teoretică a hidrodinamicii mașinilor hidraulice atît în cazul fluidelor ideale, cît și a celor reale. Sînt redate relațiile principale ce pot servi la calculul pierderilor hidraulice, volumice și mecanice din aceste mașini.

Capitolul al 6-lea se ocupă de rezolvarea problemelor indirecte și directe a rețelelor plane de profile precum și a rețelelor radial-axiale, utilizate la construcția rotoarelor turbinelor hidraulice.

În capitolul al 7-lea se abordează o problemă ce preocupă azi numeroși cercetători din domeniul mașinilor hidraulice și anume pierderile hidraulice turbionare și stratul limită. Se speră că pe această cale se va reuși să se modeleze mai bine curentul din rotor și să se sporească randamentul mașinilor hidraulice.

Capitolul al 8-lea are ca obiect cavitația și lovitura de berbec cu efectele lor dăunătoare. Se prezintă germenii cavitației precum și dinamica bulei cavitaționale. Aspectele eroziunii cavitaționale sînt analizate atît din punct de vedere al mecanismelor de distrugere, cît și al aparaturii de laborator utilizată pentru studiul rezistenței materialelor la cavitație,

Cu privire la cavitația din turbomașini, autorul definește înălțimea de aspirație precum și coeficientul de cavitație și stabilește legătura dintre NSPH și diferite cifre caracteristice de cavitație. Se marchează diferențele cavitației de la turbine și pompe și se stabilește pe baza acestor date comportarea la cavitație a turbinelor-pompă. Autorul încearcă să stabilească expresia coeficientului de cavitație în funcție de parametrii geometrici, cinematici și hidrodinamici ai mașinii.

Se evidențiază apariția suprapresiunilor, respectiv a loviturii de berbec în conductele de aducțiune prin dezvoltarea bazelor teoretice a metodei caracteristicilor. Exemplele de calcul reflectă influența acestor suprapresiuni asupra comportării în funcționare a turbinei Pelton precum și a mașinilor hidraulice turbine-pompe.

În capitolul al 9-lea sînt prezentate criteriile de similitudine utilizate în studiul și proiectarea mașinilor hidraulice. Sînt schițate diagramele universale ce caracterizează funcționarea mașinilor hidraulice. O atenție aparte se acordă metodei termodinamice utilizată la măsurarea randamentului turbinelor hidraulice. În același timp se tratează efectul de scară energetic și corecția randamentului turbinei industriale atunci cînd se cunoaște randamentul modelului, respectiv diagrama universală a acestuia.

Se prezintă tehnici experimentale utilizate la studiul curenților din mașinile hidraulice, precum și sonde și dispozitive speciale realizate în Laboratorul de mașini hidraulice de la Universitatea Tehnică din München.

În continuare, se prezintă amplu cercetările întreprinse în acest laborator de Castorph asupra măsurării curenților nestaționari din turbina Kaplan ; de W. Kühnel privitor la influența numărului paletelor rotorice asupra curenților din turbinele axiale. Rezultatele experimentale sînt comparate cu calculele teoretice și se găsește o bună corespondență.

În continuare sînt redate sintetic cercetările efectuate de N. Fürtner, R. Gerich, G. Mollenkopf și E. Hartner privind dinamica curenților nestaționari în vecinătatea paletelor rotorice la mașinile hidraulice, la ieșire din rotorul turbinelor Francis și la intrare în tubul de aspirație.

Cel mai amplu capitol este capitolul al 10-lea în care se prezintă proiectarea și construcția turbomașinilor. Se începe cu turbinele axiale, verticale și orizontale, oferind numeroase ansamble cu cotele principale și caracteristicile specifice. Se acordă o atenție specială diametrului optim al rotorului stabilit atît în condițiile optime de funcționare energetice, cît și cavitaționale. O prezentare sumară se referă la mașinile hidraulice axiale reversibile utilizate în centralele hidroelectrice mareemotrice. De asemenea, sînt alese cu multă măiestrie cele mai bune construcții de turbine Francis și Pelton care sînt descrise detaliat. Se oferă etapele principale și unele relații empirice pentru calculul hidrodinamic și mecanic al rotorului turbinei Francis.

Avînd în vedere dezvoltarea CHEAP, autorul acordă o atenție specială mașinilor hidraulice turbine-pompă prezentînd ansamblele și elementele caracteristice ale celor mai reușite mașini de acest tip precum și bazele proiectării lor în funcționare ca pompe.

În capitolul al 11-lea se concentrează toată baza teoretică a reglării automate a turbinelor hidraulice precum și schemele generale ale regulatoarelor de turație. În încheiere se descriu atît sub aspect constructiv, cît și funcțional, generatoarele și mașinile electrice utilizate în centralele hidroelectrice.

Prin originalitatea structurii și conținutului cărții, prin vastul material bibliografic, prin aportul personal al autorului, lucrarea se detașează net de lucrările similare și poate fi folosită de specialiștii din domeniul proiectării, cercetării, construcției și exploatării turbinelor hidraulice și al centralelor hidroelectrice, precum și al mașinilor hidraulice reversibile.

Ioan Anton

E. TRUCKENBRODT, *Lehrbuch der angewandten Fluidmechanik* (Manual de mecanica fluidelor aplicată), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1983, XX + 236 pag., 118 fig.

Acest manual reprezintă, în intenția autorului, o introducere în mecanica fluidelor destinată studenților care se pregătesc pentru a deveni ingineri mecanici. Ca urmare, din ansamblul problematicii mecanicii fluidelor au fost alese acele capitole care permit să se formeze o idee generală asupra acestei discipline și în același timp prezintă importanță pentru aplicațiile practice.

Primul capitol, cu caracter introductiv, conține o expunere asupra proprietăților fizice și constantelor de material ale fluidelor precum și o serie de considerații asupra aspectelor fizice ale curgerii fluidelor.

Capitolul al doilea este dedicat prezentării legilor fundamentale ale mecanicii fluidelor respectiv ale staticii, cinematicii și dinamicii fluidelor. În ceea ce privește aceasta din urmă, se consideră atît mișcarea fluidelor ideale, cît și aceea a fluidelor reale.

În cel de-al treilea capitol, sînt cuprinse mai multe aplicații ale ecuațiilor fundamentale la mișcări simple ale fluidelor incompresibile. Sînt considerate mai întîi unele mișcări fără frecare, cu accent special asupra mișcărilor staționare sau nestaționare în cadrul teoriei firului de curent. În continuare este tratată în amănunt mișcarea în conducte, laminară și turbulentă, inclusiv problema rezistențelor locale de diferite tipuri.

Capitolul al patrulea este consacrat prezentării mișcărilor simple ale fluidelor compresibile, tot în cadrul teoriei firului de curent.

În capitolul al cincilea este studiată mișcarea fluidelor ideale incompresibile, irotațională sau rotațională. După prezentarea unor rezultate cu caracter general, se trece la cazul mișcărilor irotaționale (potențiale) plane, dîndu-se mai multe exemple. În ceea ce privește mișcările rotaționale, după cîteva aspecte generale, se tratează problema aripii de anvergură infinită (teoria profilelor) și de anvergură finită.

Ultimul capitol se ocupă de mișcările laminare și turbulente în stratul limită. În afară de aspectele fundamentale, matematice și fizice, inclusiv acela al desprinderii, este prezentată problema stratului limită pe o placă plană.

Avîndu-se în vedere caracterul introductiv al acestui manual, accentul este pus asupra bunei înțelegeri a fenomenelor fizice și a legilor teoretice fundamentale din mecanica fluidelor. Apraratul matematic utilizat corespunde acestui scop, demonstrațiile fiind în general simple sau simplificate, evitîndu-se complicațiile. Este dată o mare atenție aplicațiilor în cele mai diverse probleme de interes practic, numeroase și bine alese, care sporesc în mod considerabil interesul manualului.

Scris într-un stil clar, care permite lectura în bune condiții, cu o prezentare a problemelor în care se observă experiența deosebită a autorului, manualul este util și pentru ingineri sau specialiști din alte domenii, în rezolvarea unor probleme în care intervin elemente din mecanica fluidelor.

T. Oroveanu

RUDOLF ZURMÜHL, SIGURD FALK, *Matrizen und ihre Anwendungen für Angewandte Mathematiker, Physiker und Ingenieure. Fünfte, uberarbeitete und erweiterte Auflage. Teil 1: Grundlagen* (Matrice și aplicațiile lor pentru matematicienii care se ocupă de aplicații, fizicieni și ingineri. Ediția a cincea prelucrată și amplificată. Partea întîi: Bazele). Sprlnger Verlag, Berlin, Heidelberg, Tokio,1984, XIV + 342 pag., 53 fig.

Binecunoscuta lucrare a defunctului profesor Rudolf Zurmühl, ale cărei prime patru ediții au purtat titlul „Matrizen und ihre technische Anwendungen" (Matrice și aplicațiile lor tehnice) apare într-o a cincea ediție, revizuită și mărită prin grija profesorului Sigurd Falk Datorită creșterii materialului prezentat, lucrarea apare în două părți dintre care prima conține bazele teoretice ale calculului cu matrice.

În primul capitol, este definită noțiunea de matrice prin intermediul transformărilor liniare și sînt prezentate regulile elementare de calcul. Un paragraf special este dedicat produsului matricelor, iar un altul matricei inverse a unei matrice date. Sînt introduse apoi matricele complexe, iar un ultim paragraf are ca obiect transformările liniare și schimbările de coordonate.

Capitolul al doilea este consacrat studiului sistemelor de ecuații algebrice liniare. În primul paragraf este expus algoritmul lui Gauss, iar în paragrafele următoare, după aprofundarea noțiunii de dependență liniară a unui sistem de vectori, sînt tratate sistemele generale de ecuații liniare, sistemele ortogonale de vectori și matricele polinomiale.

Formele pătratice și aplicațiile lor formează obiectul celui de al treilea capitol.

O problemă deosebit de importantă pentru aplicații și anume aceea a valorilor proprii este tratată în capitolul al patrulea. În afara paragrafului referitor la valori proprii și la vectori proprii, semnalăm pe cele referitoare la matricele simetrice și hermitice și la matricele normale sau normalizabile.

Capitolul al cincilea se referă la structura matricelor. Într-un paragraf al acestuia este introdusă forma normală a lui Jordan, iar în altele sînt tratate probleme referitoare la funcțiile de matrice și ecuațiile matriceale precum și la matricele parametrice.

În ultimul capitol este prezentată o problemă importantă pentru aplicațiile tehnice și anume aceea a matricelor bloc.

Din această prezentare sumară a conținutului, rezultă că volumul conține toate problemele importante ale teoriei matricelor precum și o serie de aplicații, tratate sub formă principială, aplicațiile propriu-zise formînd obiectul celui de-al doilea volum. Dezvoltările teoretice sînt prezentate într-un stil deosebit de clar și susținute acolo unde este cazul cu exemple concrete de calcul care facilitează înțelegerea teoriei.

Date fiind numeroasele aplicații ale calculului cu matrice în știință și tehnică, această lucrare este deosebit de utilă și oferă un instrument de lucru valoros pentru specialiștii din multe domenii.

T. Oroveanu

FRIEDEL HARTMANN, *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics* (Baza matematică a mecanicii structurilor). Springer Verlag, Berlin 1985, 368 pag., 174 fig., 72 indicații bibliografice

Spre deosebire de cărțile ce tratează aspectele matematice ale problemelor de mecanica structurilor, cartea de față își propune să fundamenteze matematic această disciplină inginerească. Autorul ei, inginer constructor și matematician, a dezvoltat un cadru teoretic consistent și logic ce asigură înțelegerea bazei matematice a mecanicii structurilor.

În cele 11 capitole ale cărții sînt date unele noțiuni de matematică, sînt deduse principiile de lucru mecanic și cele energetice, metodele de calcul liniar și neliniar bazate pe acestea, cît și aplicații la structuri din elemente liniare, din plăci plane si curbe și masive.

Primul capitol se referă la vectori și matrice, derivate și integrale, diferențiale Gateaux, funcționale și spații Sobolev. Se prezintă apoi ecuațiile diferențiale, respectiv cu derivate parțiale ale problemelor de valori marginale pentru principalele tipuri de elemente structurale cum sînt barele solicitate axial, grinzile încovoiate, plăcile încovoiate, plăcile și corpurile elastice.

În capitolul al 2-lea se introduc, pe baza studiului unui resort elastic, două identități integrale smple G și B (Green și Betti). Acestea se scriu apoi pentru operatorii diferențiali D din ecuațiile în depasări ale elementelor de mai sus, permițînd enunțarea teoremei de bază a mecanicii structurilor. Drept consecințe ale acesteia se formulează în primul rînd principiul deplasărilor virtuale, principiul forțelor virtuale și principiul lui Betti și apoi definiția energiei interne și a echilibrului. Zece propoziții rezumă principalele caracteristici ale structurii matematice a staticii mediilor continue. Extinderea principiilor de lucru mecanic și a principiului lui Betti la structuri compuse ca grinzile continue, grinzile cu zăbrele și cadrele are loc în capitolul al 3-lea. Se definesc și se deduc matricele rigidităților pentru diferite deplasări ale elementelor liniare.

Principiile energetice sînt formulate în capitolul al 4-lea. Se arată că oricărei probleme regulate de valori marginale îi corespund trei principii : principiul de bază, principiul energiei potențiale minime și principiul complementar și se definesc funcționalele corespunzătoare. Ultimele două principii rezultă din restrîngerea energiei totale la clasa funcțiilor geometric, respectiv static admisibile. În literatura de specialitate principiul complementar este prezentat de obicei ca un principiu de minim și formulat în tensiuni. Autorul îl formulează însă în deplasări ca principiu de maxim al energiei complementare, punînd astfel în evidență simetria față de principiul de minim al energiei potențiale, formulat ca de obicei tot în deplasări. Strîns legată de noțiunile introduse este definirea metodei deplăsărilor și a metodei eforturilor. Utilizarea multiplicatorilor Lagrange permite obținerea unui principiu variațional situat între principiul de bază și principiul energiei potențiale minime, cu condiții de margine geometrice relaxate. Capitolul se încheie cu probleme privind algebra mecanicii structurilor în formularea specifică cărții.

Capitolul al 5-lea este rezervat forțelor concentrate, reformulîndu-se principiile din capitolul al 2-lea pentru elemente structurale sub aceste acțiuni. După introducerea soluțiilor fundamentale pentru bare, grinzi, plăci încovoiate respectiv plăci și corpuri elastice se deduc cele două identități integrale G și B cu care se formulează principiul deplasărilor virtuale, principiul forțelor virtuale și principiul lui Betti. Teoremele lui Castigliano încheie acest capitol. Pe baza rezultatelor capitolului 5, capitolul al 6-lea se ocupă de problema funcțiilor de influență. După deducerea reprezentărilor integrale ale deplasărilor și derivatelor lor, definirea funcțiilor Green și a condițiilor de compatibilitate pe frontieră, se prezintă metoda elementelor de frontieră.

Capitolul al 7-lea reia principalele probleme tratate în capitolele anterioare pentru operatorii D, la nivelul operatorilor A — corespunzători sistemelor de ecuații ce preced ecuațiile în deplasări. Astfel, se reformulează identitățile de bază, principiile de lucru mecanic și principiile energetice. Aplicarea acestora permite formularea metodei mixte a mecanicii structurilor.

Următoarele trei capitole tratează probleme speciale. Plăcile curbe subțiri sînt prezentate pe scurt în capitolul al 8-lea, pe baza modelului Koiter. Capitolul al 9-lea se ocupă de calculul de ordinul doi al grinzilor, probleme de stabilitate și de flambaj lateral a grinzilor, voalarea plăcilor, probleme neconservative, probleme de valori inițiale și de vibrații, cît și de principiul lui Hamilton. Extinderea conceptelor tratate în carte la teoria neliniară o elasticității, cît și a analiza deplasărilor mari a grinzilor și plăcilor are loc în capitolul al 10-lea.

Elementele finite fac obiectul capitolului 11, ca modele de deplasări, respectiv modele mixte în concordanță cu principiile energetice ale operatorilor D respectiv A. Pentru modelele de deplasări se utilizează principiul minimului energiei potențiale, deoarece matricea rigidităților obținută astfel este definită pozitiv. După definirea funcțiilor de formă se propune un procedeu simplu pentru aprecierea erorilor în această metodă, apoi se introduc funcțiile de formă neconforme și verificările acestora. Urmează teoria principiilor energetice hibride necesară pentru deducerea elementelor finite hibride. Ideea de bază constă în a considera elementul finit ca o structură compusă ca în capitolul al 3-lea, modul de lucru fiind exemplificat pe o bară. Capitolul se încheie cu principii energetice hibride pentru operatori A.

Analiza cărții permite aprecierea că autorului i-a reușit o tratare sistematică, unitară și riguroasă a materiei, cu multe exemplificări. Este impresionant cum, pornind de la cîteva noțiuni de matematică și mecanică, se dezvoltă o teorie clară și consistentă ce nu lasă loc nici celei mai mici nesiguranțe.

Cartea pledează pentru înțelegerea bazei matematice a mecanicii structurilor, estompată în tratarea inginerească tradițională a acestei discipline de bază. Ca atare este foarte utilă tuturor celor ce lucrează în mecanica corpului solid, mai ales la abordarea eficientă a problemelor ce

nu și-au găsit încă o rezolvare mulțumitoare. Fiind o lucrare foarte originală, unică în literatura de specialitate traducerea ei în limba română ar fi bine venită.

R. Friedrich

O. AXELSSON, V. A. BARKER, *Finite Element Solution of Boundary Value Problems. Theory and Computation* (Soluții cu elemente finite ale problemelor cu valori marginale. Teorie și calcul), Academic Press, Orlando, 1984, 432 pagini, 201 indicații, bibliografice

Scopul declarat al cărții este de a prezenta o introducere în aspectele teoretice și de calcul numeric ale metodei elementelor finite (MEF) pentru rezolvarea unor probleme cu valori marginale ale ecuațiilor diferențiale respectiv cu derivate parțiale. Se concentrează în principal asupra problemelor liniare autoconjugate de ordinul doi, pe baza cunoașterii cărora se pot aborda și probleme mai complexe.

Capitolul 1 se ocupă de funcționale pătratice pe spații vectoriale finite. Pentru minimizarea acestora se aplică metoda pantei maxime și metoda gradienților conjugați, atît în forma simplă, cît și în cea precondiționată. Precondiționarea se realizează în două variante : prin suprarelaxare succesivă simetric , respectiv prin factorizare incompletă.

Discutarea problemelor cu valori marginale în formulare variațională începe în capitolul al 2-lea. Se dau definițiile și teoremele fundamentale pentru funcționale în spațiul unidimensional, insistîndu-se asupra ecuației Euler-Lagrange. Urmează discutarea condițiilor de frontieră naturale și esențiale și extinderea problemelor discutate la două și trei dimensiuni. În încheierea acestei prezentări clasice a calculului variațional se indică unele probleme fizice ce conduc la minimizarea unei funcționale pătratice.

Tratarea modernă a ecuațiilor cu derivate parțiale, bazată pe utilizarea analizei funcționale în general și a spațiilor Hilbert în particular, este redată în capitolul al 3-lea. Prin completare, setul funcțiilor admisibile este lărgit în sensul lui Sobolev, acest proces de completare fiind de importanță fundamentală pentru MEF.

Capitolul al 4-lea cuprinde o prezentare scurtă a metodei Ritz-Galerkin pentru minimizarea unei funcționale pătratice, indicîndu-se și posibilități de apreciere a erorilor soluției.

Aplicarea metodei Ritz-Galerkin cu funcții de bază polinomiale definite pe subregiuni conduce la MEF din capitolul al 5-lea, cel mai voluminos al cărții. După prezentarea proprietăților fundamentale ale rețelelor de elemente finite se studiază trei tipuri de funcții de bază : liniare, respectiv pătratice pentru elemente triunghiulare și biliniare pentru elemente rectangulare. Urmează deducerea matricelor caracteristice ale elementelor finite, cît și a proprietăților lor principale. Funcțiile de bază izoparametrice, dezvoltate în continuare, au avantajul de a asigura o libertate mai mare în alegerea rețelei de elemente, mai ales pentru aproximarea frontierelor curbe. Sînt prezentate de asemenea ideile de bază ale analizei erorilor MEF apelîndu-se la teoria interpolării în spații Sobolev și la rezultatele obținute în capitolul al 4-lea. După discutarea numărului de condiționare spectrală, capitolul se încheie cu tratarea singularităților introduse de colțuri și interfețe între materiale diferite.

Capitolul al 6-lea, este rezervat metodelor directe pentru rezolvarea ecuațiilor MEF cum sînt metoda Gauss și metoda Cholesky. Aceste metode reprezintă și baza pentru tehnica de factorizare incompletă utilizată în capitolul 1 la precondiționarea în vederea aplicării metodei gradientului conjugat. Se tratează strategii de numerotare a nodurilor rețelei de elemente finite în vederea obținerii unor matrice cu o bandă cît mai îngustă, respectiv cu un înveliș cît mai redus. De asemenea se discută tehnici speciale ca condensarea statică și metode de rezolvare frontală a sistemelor de ecuații. Capitolul se încheie cu prezentarea principalelor erori la construirea și rezoîvarea ecuațiilor MEF.

Metodele iterative pentru rezolvarea ecuațiilor MEF fac obiectul capitolului al 7-lea. Pe baza celor prezentate în capitolul 1 se analizează precondiționările în metoda gradientului conjugat, funcție de tipul de condiții de frontieră. Compararea metodelor directe și indirecte scontate în evidență avantajele și dezavantajele acestora în ceea ce privește memoria necesară și efortul de calcul cerut. Este interesantă și introducerea în problematica metodelor multirețea pentru rezolvarea problemelor cu elemente finite.

Într-o anexă sînt date polinoamele Cebîșev utilizate în capitolul 1 la tratarea metodei gradientului conjugat. Fiecare capitol al cărții se încheie cu exerciții propuse, unele indicații pentru rezolvarea acestora, cît și cu o bibliografie.

Aspectele matematice ale MEF prezentate clar și detaliat în aceast carte sînt foarte utile celor interesați în aplicarea eficientă și în dezvoltarea acestei metode numerice cu aplicabilitate largă și în științele inginerești și matematice.

R. Friedrich

PROPRIETĂȚI CONSTITUTIVE ÎN TERMOVÎSCOELASTICITATEA LINIARĂ. I. COMPATIBILITATE CU TERMODINAMICA ȘI CU TERMOSTATICA

de IOANA LUCA (ICECHIM), E.SOÓS (INCREST)

În această primă parte a lucrării privim termovîscoelasticitatea liniară, de tip Boltzmann—Volterra, ca pe o teorie autonomă. Presupunînd că ecuația constitutivă a materialului este compatibilă cu termodinamica, respectiv cu termostatica, determinăm restricțiile ce sînt impuse asupra funcției de relaxare de ipotezele admise.

§1. INTRODUCERE

Avînd la bază rezultatele lui Coleman și Noll [1], [2], respectiv ale lui Coleman [3], [4], în lucrarea [5] am determinat relația ce există între teoria termodinamică a materialelor simple, cu memorie slăbită, pe de o parte, și teoria materialelor termovîscoelastice liniare de tip Boltzmann-Volterra, pe de altă parte (pentru cazul liniar vezi și [6], Cap. 3); am dedus totodată anumite restricții impuse asupra funcționalei de răspuns de cea de a doua lege a termodinamicii, exprimată de inegalitatea lui Clausius-Duhem în forma stipulată de Truesdell și Toupin.

Pentru a prezenta pe scurt rezultatele din [5] presupunem că este fixată o configurație de referință a corpului; admitem că în această configurație tensiunea reziduală este nulă, entropia specifică are valoarea zero, temperatura absolută fiind $\theta_0 \geqslant 0$, iar densitatea de masă ρ_0. În spiritul teoriilor liniare admitem că la orice moment $t \in (-\infty, \infty)$ și în orice particulă X a corpului, deformarea configurației de referință este „mică", variațiile de temperatură sînt de asemenea „mici". Vom utiliza următoarele notații: $\mathbf{T}$ — tensorul tensiune al lui Cauchy, η — densitatea de entropie pe unitatea de masă; $h = \rho_0 \eta$ — densitatea de entropie pe unitatea de volum; $\mathbf{E}$ — tensorul deformațiilor infinitezimale; θ — temperatura absolută și $T = \theta - \theta_0$ — variația (infinitezimală) a temperaturii absolute. În cele ce urmează, dependența cîmpurilor de particule X nu va fi menționată explicit.

Pentru simplificarea raționamentelor este util să introducem mulțimea $\mathcal{A}$ a perechilor $\Lambda = (\mathbf{A}, a)$, unde $\mathbf{A}$ este un element din mulțimea $\mathcal{S}$ a tensorilor simetriei de ordinul al doilea, iar a este un punct din mulțimea R a numerelor reale. Pe mulțimea $\mathcal{A}$ vom introduce următoarele operații care îi conferă structura de spațiu vectorial 10-dimensional cu produs interior:

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, a_1 + a_2), \qquad \alpha\Lambda = (\alpha\mathbf{A}, \alpha a),$$

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 + a_1 a_2, \qquad |\Lambda| = \sqrt{\Lambda \cdot \Lambda} = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + a^2},$$

$$\forall\, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A} \in \mathcal{S},\ a_1,\ a_2,\ a \in \mathrm{R},\quad \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda \in \mathcal{A}.$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 5, 1986, P. 429—445

Două perechi de tipul menționat sînt :

$$\Pi = (\mathbf{T}, -h), \qquad \Delta = (\mathbf{E}, T).$$

Cu notațiile introduse, ecuația constitutivă a unui material termovîscoelastic liniar de tip Boltzmann-Volterra poate fi scrisă în următoarea formă condensată (vezi [5]) *)

$$\Pi(t) = \mathcal{R}(0)\,\Delta(t) + \int_0^\infty \dot{\mathcal{R}}(s)\,\Delta^t(s)\mathrm{d}s. \tag{1.1}$$

În relația precedentă $\mathcal{R} : [0, \infty) \to \mathrm{Lin}\,\mathcal{A}$ reprezintă *funcția de relaxare*; valorile sale $\mathcal{R}(s)$ sînt aplicații liniare (tensori) definiți pe $\mathcal{A}$ cu valori în $\mathcal{A}$; punctul suprapus semnifică operația de derivare în raport cu argumentul s, iar $\Delta^t : [0, \infty) \to \mathcal{A}$ reprezintă istoria deformației și a variației de temperatură pînă la momentul curent t.

Structura mai detaliată a funcției de relaxare este precizată de

$$\mathcal{R}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}(s) & -\mathbf{N}(s) \\ -\mathbf{P}(s) & -g(s) \end{bmatrix}, \qquad s \in [0, \infty). \tag{1.2}$$

Aici $\mathcal{G}(s) \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{S}$ este un tensor de ordinul patru, $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{P}(s) \in \mathcal{S}$, iar $g(s) \in R$ **).

Mai precizăm că prin norma $|\mathcal{M}|$ a unui tensor $\mathcal{M} \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{A}$ înțelegem numărul

$$|\mathcal{M}| = \max_{|\Lambda| \leqslant 1} |\mathcal{M}\Lambda|, \qquad \Lambda \in \mathcal{A}.$$

Alte noțiuni ce vor mai apare în aceste considerații introductive vor fi precizate în paragraful următor.

Situîndu-ne în cadrul termodinamicii materialelor cu memorie slăbită considerat de Coleman, deci făcînd uz explicit de relația ce există între funcționala constitutivă corespunzătoare lui Π și cea corespunzătoare energiei libere specifice, implicată de inegalitatea Clausius-Duhem, și extinzînd analiza lui Coleman de la cazul izoterm la cel în care pot apare și variații de temperatură, în lucrarea [5] am demonstrat valabilitatea următoarlor două proprietăți :

P_1 : Tensorul $\mathcal{R}(\infty) = \lim_{s \to \infty} \mathcal{R}(s)$ există și este simetric.

P_2 : Tensorul $\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(\infty)$ este simetric și pozitiv semidefinit.

Observăm că din P_1 și P_2 urmează că este adevărată și proprietatea

P_3 : Tensorul $\mathcal{R}(0)$ este simetric.

---

*) Legătura dintre notațiile folosite în [5] și cele utilizate aici este evidentă și poate fi stabilită imediat.

**) Menționăm că într-o teorie termodinamică completă a vîscoelasticității liniare mai sînt necesare ipoteze constitutive privind energia liberă specifică și fluxul de căldură (vezi de exemplu, [5] sau [6], Cap. 3) ; cum însă ele nu vor interveni explicit în raționamentele noastre nu vor fi menționate în această lucrare.

Semnificația rezultatelor de mai sus devine mai clară dacă analizăm evoluția temporală a tensiunii și entropiei în cazul unui impuls deformație-temperatură aplicat la momentul t_0 :

$$\Delta(t) = \begin{cases} \mathbf{0} \text{ pentru } -\infty < t < t_0, \\ \Delta \text{ pentru } \quad t_0 \leqslant t < \infty. \end{cases} \tag{1.3}$$

În cazul acestei istorii, conform ecuației constitutive (1.1), obținem următorul răspuns pentru momentele temporale $t \geqslant t_0$:

$$\Pi(t) = \mathcal{R}(tt_0)\Delta. \tag{1.4}$$

Din relația precedentă rezultă, în particular,

$$\Pi(t_0) = \mathcal{R}(0)\,\Delta, \qquad \Pi(\infty) = \lim_{t\to\infty} \Pi(t) = \mathcal{R}(\infty)\Delta.$$

Pe baza celor două cazuri limită este justificat să numim $\mathcal{R}(0)$ *modulul termoelastic instantaneu*, iar $\mathcal{R}(\infty)$ *modulul termoelastic de echilibru*. În acest mod, cele trei proprietăți $P_1 - P_3$ pot fi anunțate în următoarea formă echivalentă :

P_1 : Modulul termoeleastic de echilibru este simetric.

P_2 : Diferența dintre modulul termoelastic instantaneu și cel de echilibru este un tensor simetric și pozitiv semidefinit.

P_3 : Modulul termoelastic instantaneu este simetric.

Evident, proprietatea P_2 reflectă prezența fenomenului de disipare, specific materialelor termovîscoelastice.

În încheierea acestor considerații preliminarii accentuăm faptul că, în cadrul stabilit de Coleman al termodinamicii materialelor cu memorie slăbită, nu am reușit să decidem dacă următoarele proprietăți — observate experimental în multe cazuri — sînt sau nu adevărate :

P_4 : Modulul de echilibru $\mathcal{G}(\infty)$ este pozitiv semidefinit; modulul de echilibru $g(\infty)$ este nenegativ.

P_5 Modulul instantaneu $\mathcal{G}(0)$ este pozitiv semidefinit; modul instantaneu $g(0)$ este nenegativ.

P_6 Funcție de relaxare $\mathcal{R} : [0, \infty) \to \operatorname{Lin} \mathcal{A}$ este simetrică pentru orice $s \geqslant 0$.

P_7 Funcția de relaxare $\mathcal{G} : [0, \infty) \to \mathcal{S}$ este pozitiv semidefinită, iar funcția de relaxare $g : [0, \infty) \to R$ este nenegativă pentru orice $s \geqslant 0$.

P_8 : Componentele funcției de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ sînt funcții monoton desrescătoare sau crescătoare de veriabila reală s.

Analiza ce va fi efectuată în această lucrare are drept scop să precizeze condițiile în care unle din proprietățile de mai sus au loc și are la bază rezultatele obținute de Day (vezi [7] — [11]) în cazul proceselor izoterme, restricție care în lucrarea noastră va fi ridicată.

Punctul de pornire a analizei va consta în admiterea ecuației constitutive (1.1), fără a presupune că ea derivă obligatoriu din densitatea de energie liberă (ca potențial), precum și din postularea următoarei proprietăți de disipare, a cărei valabilitate în cadrul termodinamicii

materialelor cu memorie slăbită a fost demonstrată de Coleman [3]:

P_9: *Lucrul mecanic-căldura* $l(\Delta(\cdot))$ ce corespunde oricării ciclu $\Delta(\cdot)$ este nenegativ; mai precis,

$$l(\Delta)\ (\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t, \Delta)(\cdot)\cdot\dot{\Delta}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathbf{T}(t, \Delta)(\cdot)\cdot\dot{\mathbf{E}}(t) - h(t, \Delta(\cdot)\ \dot{T}(t)\}\ \mathrm{d}t \geqslant 0$$

oricare ar fi istoria $\Delta(\cdot)$ așa încît există momentele $t_0 < t_1$ cu proprietățile: $\Delta(t) = \Delta(t_0)$ pentru $-\infty < t < t_0$, $\Delta(t) = \Delta(t_1)$ pentru $t_1 = t < \infty$, iar $\Delta(t_0) = \Delta(t_1)$.

Paragraful 2 al lucrării conține definițiile noțiunilor principale ce vor fi utilizate în continuare și o teoremă care va preciza valoarea lucrului mecanic-căldurii ce corespunde unui proces termomecanic foarte lent, respectiv foarte rapid, aducînd astfel clarificări suplimentare legate de semnificația modulului termoelastic de echilibru, respectiv a celui instantaneu.

§2. NOȚIUNI ȘI REZULTATE PRELIMINARE

În acest paragraf vom introduce cîteva concepte și vom demonstra cîteva proprietăți care vor fi necesare pentru obținerea unor consecințe ce decurg din anumite ipoteze care vor fi admise pe parcursul lucrării. Noțiunile și proprietățile respective, ca și metodele de demonstrație, sînt extinderi ale conceptelor, proprietăților și procedeelor utilizate de Day în cazul izoterm, la situația în care această restricție nu mai este impusă (pentru acest paragraf vezi în special [9] și [11], Cap. 1,6).

Definiția 2.1. Tensorul $\mathcal{M}^T \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{A}$ se numește *transpusul* tensorului $\mathcal{M} \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{A}$, dacă $\Lambda_1 \cdot \mathcal{M}^T\Lambda_2 = \Lambda_2 \cdot \mathcal{M}\Lambda_1$, $\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{A}$.

Defnția 2.2 Tensorul $\mathcal{M}$ se numește *simetric* dacă $\mathcal{M}^T = \mathcal{M}$, *antisimetric*, dacă $\mathcal{M}^T = -\mathcal{M}$ și *pozitiv semidefinit* dacă $\Lambda \cdot \mathcal{M}\Lambda \geqslant 0$, $\forall \Lambda \in \mathcal{A}$.

Observăm că prin utilizarea convenției de tip Voigt un tensor $\mathcal{M} \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{A}$ poate fi reprezentat printr-o matrice 7×7; dacă $\mathcal{M}$ este un tensor simetric și matricea 7×7 care îl reprezintă este simetrică.

Definiția 2.3. O pereche $\Delta(\cdot) = (\mathbf{E}(\cdot), T(\cdot))$ de funcții continue, cu derivate continue pe porțiuni, definite pe $(-\infty, \infty)$ și cu valori în $\mathcal{A}$ se numește *drum* sau *proces termomecanic* dacă există două momente t_0 și t_1, $t_0 < t_1$, și perechile constante Λ, Ω din $\mathcal{A}$, numite valoarea inițială, respectiv finală a drumului, astfel încît $\Delta(t) = \Lambda$ pentru $t < t_0$ și $\Delta(t) = \Omega$ pentru $t_1 < t$. Notăm $\Lambda = \Delta(-\infty)$, $\Omega = \Delta(\infty)$ și spunem că drumul $\Delta(\cdot)$ leagă starea termomecanică Λ cu starea termomecanică Ω.

Observăm că suportul derivatei $\dot{\Delta}(\cdot)$ este obligatoriu o mulțime *compactă* a axei reale.

Definiția 2.4. Un drum (proces) este *închis* (*ciclu*) dacă $\Delta(-\infty) = \Delta(\infty)$ și spunem că un drum pornește din *starea naturală* dacă $\Delta(-\infty) = \mathbf{0}$.

Definiția 2.5. Un drum se numește *izoterm* dacă $\Delta(\cdot) = (\mathbf{E}(\cdot), 0)$, deci dacă $T(t) = 0$ pentru $t \in (-\infty, \infty)$ și *rigid* dacă $\Delta(\cdot) = (\mathbf{0}, T(\cdot))$, deci

dacă $\mathbf{E}(t) = \mathbf{0}$ pentru $t \in (-\infty, \infty)$. Un drum izoterm va fi notat, de obicei prin $\mathbf{E}(\cdot)$, iar un drum rigid prin $T(\cdot)$.

Definiția 2.6. Dacă $\Delta(\cdot)$ este un drum și $\tau \in R$ este fixat, drumul

$$\Delta(t, \alpha) = \Delta(\tau + \alpha(t - \tau)), \qquad t \in (-\infty, \infty) \tag{2.1}$$

se numește *întîrzierea* (*retardarea*) *drumului* $\Delta(\cdot)$, dacă $0 < \alpha < 1$ și *accelerarea drumului* $\Delta(\cdot)$ dacă $\alpha \geqslant 1$.

Drumul întîrziat (accelerat) parcurge aceleași valori ca și cel inițial, dar mai „lent" (mai „accelerat").

În raționamentele ce urmează, un rol esențial va fi jucat de

Teorema 2.1 ([11], Cap. 1, §1.2). Tensorul $\mathfrak{M} \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{A}$ este *simetric* dacă și numai dacă

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Delta}(t) \cdot \mathfrak{M}\Delta(t)\mathrm{d}t \geqslant 0 \tag{2.2}$$

pentru orice drum închis $\Delta(\cdot)$ din $\mathcal{A}$.

De asemenea, un rol important va avea conceptul introdus prin

Definiția 2.7. Lucrul mecanic-căldura $l(\Delta(\cdot))$ ce corespunde drumului $\Delta(\cdot)$ este dat de relația

$$l(\Delta(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t, \Delta(\cdot)) \cdot \dot{\Delta}(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

Deoarece suportul derivatei $\dot{\Delta}(\cdot)$ este compact, integrala din (2.3) se calculează pe un segment de lungime finită al axei reale.

Următoarele două definiții precizează conceptul de funcție de relaxare, respectiv de material termoviscoelastic liniar.

Definiția 2.8. O funcție $\mathfrak{R} : [0, \infty) \to \mathrm{Lin}\,\mathcal{A}$ se numește *funcție de relaxare* dacă are derivată continuă $\dot{\mathfrak{R}}(\cdot)$ pe $[0, \infty)$ și satisface următoarele două condiții:

$$\int_0^{\infty} |\dot{\mathfrak{R}}(t)|\mathrm{d}| < \infty, \qquad \int_0^{\infty} t|\dot{\mathfrak{R}}(t)\mathrm{d}t < \infty. \tag{2.4}$$

Din $(2.4)_1$ rezultă (vezi [11], Cap. 6, §6.1) că modulul termoelastic de echilibru

$$\mathfrak{R}(\infty) = \lim_{t \to \infty} \mathfrak{R}(t)$$

există și este un element din $\mathrm{Lin}\,\mathcal{A}$.

Definiția 2.9. Un material se numește *termovîscoelastic liniar de tip Boltzmann — Volterra* dacă pentru orice drum $\Delta(\cdot)$ perechea tensiune-entropie $\Pi = (\mathbf{T}, -h)$ se exprimă cu ajutorul perechii deformație-temperatură $\Delta = (\mathbf{E}, T)$ prin relația

$$\Pi(t, \Delta(\cdot)) = \mathfrak{R}(0)\,\Delta(t) + \int_0^{\infty} \dot{\mathfrak{R}}(s)\,\Delta^t(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.5}$$

unde $\mathcal{R}(\cdot)$ este o funcție de relaxare, iar $\Delta^t(\cdot)$ este *istoria drumului* pînă la momentul curent t, fiind definită prin relația $\Delta^t(s) = \Delta(t-s)$, $s \geqslant 0$.

Reamintim că relațiile constitutive privind energia liberă specifică și fluxul de căldură nu intervin în raționamentele noastre și, în consecință, ele nu vor fi specificate în această lucrare.

Pe baza noțiunilor introduse și extinzînd în mod corespunzător procedeul lui Day (vezi în special [9] și [11], Cap. 6, §6.1) de la cazul izoterm la cel general, putem enunța și demonstra

Teorema 2.2. Pentru orice drum $\Delta(\cdot)$ au loc evaluările

$$a)\ \lim_{\alpha\to 0} l(\Delta(\cdot\,\alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Delta}(t)\cdot\mathcal{R}(\infty)\,\Delta(t)\,dt, \tag{2.6}$$

$$b)\ \lim_{\alpha\to\infty} l(\Delta(\cdot,\ \alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Delta}(t)\cdot\mathcal{R}(0)\Delta(t)dt + $$

$$+ (\Delta(\infty) - \Delta(-\infty))\cdot(\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(\infty))\,\Delta(-\infty). \tag{2.7}$$

Înainte de a trece la demonstrarea relațiilor (2.6) și (2.7) precizăm că un rezultat de acest tip a fost obținut de Gurtin și Herrera ([12]) în cazul materialelor vîscoelastice liniare, deci în situația în care efectele termice pot fi complet neglijate.

Demonstrație.

a) Ținînd seama de (2.1), (2.3) și (2.5), avem

$$l(\Delta(\cdot,\alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t,\ \Delta(\cdot,\ \alpha))\cdot\dot{\Delta}(t,\ \alpha)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha\dot{\Delta}(\tau + \alpha(t-\tau))\cdot\left\{\mathcal{R}(0)\Delta(\tau+\alpha(t-\tau)) + \int_0^{\infty}\dot{\mathcal{R}}(s)\Delta(\tau+\alpha(t-s-\tau))ds\right\}dt.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \tau + \alpha(t-\tau)$ obținem

$$l(\Delta(\cdot,\alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot{\Delta}(u)\cdot\left\{\mathcal{R}(0)\Delta(u) + \int_0^{\infty}\dot{\mathcal{R}}(s)\,\Delta(u-\alpha s)\ ds\right\}du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\Delta(u)\cdot\mathcal{R}(\infty)\Delta(u)\,du + \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\dot{\Delta}(u)\dot{\mathcal{R}}(s)(\Delta(u-\alpha s)-\Delta(u))\,ds\,du. \tag{2.8}$$

Fie $c = \sup|\dot{\Delta}(\cdot)|$; atunci $|\Delta(u-\alpha s)-\Delta(u)| \leqslant c\alpha s\ \forall u\in\mathcal{R},\ s\geqslant 0$; deoarece suportul lui $\dot{\Delta}(\cdot)$ este compact, iar funcția de relaxare $\mathcal{R}((\cdot)$

satisface condiția $(2.4)_2$, din evaluarea precedentă urmează că

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\dot{\Delta}(u)\cdot\dot{\mathcal{R}}(s)\,(\Delta(u-\alpha s)-\Delta(u))\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u\right| = O(\alpha);$$

astfel, făcînd $\alpha \to 0$ în (2.8), obținem evaluarea (2.6).

b) Din (2.8) avem

$$l(\Delta(\cdot,\alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty}\dot{\Delta}(u)\cdot\mathcal{R}(0)\Delta(u)\mathrm{d}u+(\Delta(\infty)-\Delta(-\infty))\cdot(\mathcal{R}(0)-\mathcal{R}(\infty))\Delta(-\infty)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\dot{\Delta}(u)\cdot\dot{\mathcal{R}}(s)\,(\Delta(u-\alpha s)-\Delta(-\infty))\mathrm{d}s\mathrm{d}u. \tag{2.9}$$

Alegînd t_0 și t_1 așa încît să avem $\Delta(t) = \Delta(-\infty)$ pentru $t \leqslant t_0$ și $\Delta(t) = \Delta(\infty)$ pentru $t_1 \leqslant t$, pe baza ipotezelor de regularitate făcute asupra drumurilor și a funcțiilor de relaxare, obținem succesiv :

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\dot{\Delta}(u)\cdot\dot{\mathcal{R}}(s)\,(\Delta(u-\alpha s)-\Delta(-\infty))\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u\right| \leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t_1}\int_{0}^{(u-t_0)/\alpha}\dot{\Delta}(u)\cdot\dot{\mathcal{R}}(s)(\Delta(u-\alpha s)-\Delta(-\infty))\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u\right| \leqslant$$

$$\leqslant \bar{c}\int_{t_0}^{t_1}\int_{0}^{(u-t_0)/\alpha}\mathrm{d}s\mathrm{d}u = \frac{\bar{c}(t_1-t_0)^2}{2\alpha},$$

unde $\bar{c}$ este o constantă aleastă corespunzător. Utlizînd rezultatul de mai sus și făcînd $\alpha \to \infty$ în (2.9), găsim evaluarea (2.7).

§3. COMPATIBILITATE CU TERMODINAMICA; CONSECINȚE

În acest paragraf vom admite axiomatic, deci independent de considerații termodinamice, valabilitatea proprietății P_9 și vom cerceta consecințele ce decurg din această ipoteză. În acest scop dăm

Definiția 3.1. Spunem că funcția de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ a unui material termovîscoelastic liniar este *compatibilă cu termodinamica* dacă lucrul mecanic-căldura $l(\Delta(\cdot))$ ce corespunde oricărui *ciclu* $\Delta(\cdot)$ este *nenegativ*, deci dacă

$$l(\Delta(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty}\Pi(t,\Delta(\cdot)\cdot\dot{\Delta}(t)\mathrm{d}t \geqslant 0, \tag{3.1}$$

oricare ar fi ciclul $\Delta(\cdot)$.

Denumirea adoptată se justifică prin faptul că proprietatea (3.1), admisă *axiomatic* de noi, poate fi demonstrată în cadrul termodinamicii materialelor cu memoria slăbită (vezi Coleman [3], [4]).

Unele restricții impuse de proprietatea P_9 asupra funcției de relaxare sînt precizate în teorema următoare (pentru cazul izoterm (vezi Day[9] și [11], Cap. 6);

Teorema 3.1. Dacă funcția de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ este compatibilă cu termodinamica, atunci modulii $\mathcal{R}(0)$ și $\mathcal{R}(\infty)$ sînt *simetrici* și

$$\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(s) \geqslant 0, \text{ sau, echivalent, } \mathcal{R}(0) \geqslant \mathcal{R}(s), \quad \forall s \geqslant 0. \tag{3.2}$$

În particular,

$$\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(\infty) \geqslant 0 \qquad \text{și} \qquad -\dot{\mathcal{R}}(s) \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Demonstrație. Fie $\Delta(\cdot)$ un ciclu și $\Delta(\cdot, \alpha)$ drumul dat de (2.1). Deoarece $\Delta(., \alpha)$ este de asemenea un ciclu, din condiția de compatibilitate cu termodinamica urmează inegalitatea

$$l(\Delta(., \alpha)) \geqslant 0;$$

în particular,

$$\lim_{\alpha \to 0} l(\Delta(., \alpha)) \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \lim_{\alpha \to \infty} l(\Delta(., \alpha)) \geqslant 0.$$

Prin urmare, pe baza teoremei 2.2 urmează că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Delta}(t) \cdot \dot{\mathcal{R}}(\infty) \Delta(t) \mathrm{d}t \geqslant 0 \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Delta}(t) \cdot \mathcal{R}(0) \Delta(t) \mathrm{d}t \geqslant 0,$$

pentru orice ciclu $\Delta(\cdot)$. Simetria tensorilor $\mathcal{R}(0)$ și $\mathcal{R}(\infty)$ rezultă astfel din teorema 2.1.

Fie acum ciclul $\Delta(\cdot)$ construit cu ajutorul elementului Ω din $\mathcal{A}$ și al numerelor pozitive ε și s, $\varepsilon < s$, în modul următor :

$$\Delta(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pentru } t \leqslant 0, \\ \varepsilon^{-1} t \Omega & \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ \Omega & \text{pentru } \varepsilon \leqslant t \leqslant s, \\ \varepsilon^{-1}(\varepsilon - t + s)\Omega & \text{pentru } s \leqslant t \leqslant s + \varepsilon, \\ \mathbf{0} & \text{pentru } s + \varepsilon \leqslant t. \end{cases} \tag{3.4}$$

Pe baza ecuației constitutive (2.5) și pentru acest drum, inegalitatea (3.1) capătă forma următoare :

$$\varepsilon^{-2} \int_0^{\varepsilon} \int_0^{t} \Omega \cdot \mathcal{R}(t-u)\, \Omega \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t - \varepsilon^{-2} \int_s^{s+\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \Omega \cdot \mathcal{R}(t-u)\, \Omega \mathrm{d}u \mathrm{d}t +$$

$$+ \varepsilon^{-2} \int_s^{s+\varepsilon} \int_s^{t} \Omega \cdot \mathcal{R}(t-u)\, \Omega \mathrm{d}u \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Utilizînd teorema mediei și făcînd $\varepsilon \to 0$, din inegalitatea precedentă obținem

$$\Omega \cdot \mathcal{R}(0)\,\Omega - \Omega \cdot \mathcal{R}(s)\Omega \geqslant 0 \qquad \forall \Omega \in \mathcal{A},\ s \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Din (3.5) urmează (3.2) și, în particular, (3.3); evaluarea $(3.3)_2$ este o consecință imediată a inegalității (3.2).

Din teorema demonstrată urmează că proprietățile $P_1 - P_3$, deduse în [5] în cadrul termodinamicii materialelor simple cu memorie slăbită, pot fi obținute și pe baza proprietății de compatibilitate cu termodinamica, deci *fără* a face apel la energia specifică liberă și la inegalitatea lui Clausius-Duhem, care conferă caracter de potențial termodinamic funcției lui Helmholtz și implică totodată pozitivitatea disipării interne pe orice ciclu. În cadrul admis de Coleman $P_1 - P_3$ sînt consecințe nemijlocite ale celor două proprietăți aminitite și ale faptului că funcția lui Helmholtz are — pe mulțimea tuturor istoriilor ce se termină în același punct — valoare minimă pentru istoria constantă, proprietatea de asemenea implicată de inegalitatea lui Clausius-Duhem în cadrul teoriei lui Coleman.

În schimb, valabilitatea sau falsitatea proprietăților $P_4 - P_8$ *nu poate fi decisă* în cadrul termodinamicii materialelor simple cu memorie slăbită; în particular, în cazul unui material *termoelastic* liniar, teoria lui Coleman *nu* poate furniza nici un răspuns la întrebările : Este $\mathcal{G}(o)$ pozitiv semidefinit? Este $g(0)$ nenegativ?

În consecință, pentru clarificarea statutului proprietăților $P_4 - P_8$ în cazul materialelor termovîscoelastice liniare și, în particular, al celor termoelastice, sînt necesare *noi* ipoteze restrictive, logic *independente* de cele conținute în—și implicate de—inegalitatea Clausius-Duhem.

Vom încheia acest paragraf cu o teoremă care constituie extinderea unui rezultat al lui Day [10], obținut pentru materiale vîscoelastice, la cazul corpurilor termovîscoelastice. Definiția și teorema ce urmează precizează relația existentă între materialele termovîscoelastice, pe de o parte, și cele termoelastice, pe de altă parte.

Definiția 3.2. Un material termovîscoelastic liniar caracterizat de funcția de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ se numește material *termoelastic liniar* dacă $\mathcal{R}(\cdot)$ are valoare *constantă*, deci dacă

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{R}(0) \qquad \forall s \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Teorema 3.2. Dacă funcția de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ este compatibilă cu termodinamica, atunci materialul termovîscoelastic caracterizat de $\mathcal{R}(\cdot)$ este termoelastic liniar dacă și numai dacă modulul instantaneu este egal cu modulul de echilibru; adică

$$\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}(\infty). \tag{3.7}$$

Demonstrație. Trebuie să arătăm că admiterea relației (3.7) și a ipotezei de compatibilitate cu termodinamica (3.1) ne conduce la (3.6). Pentru aceasta, fie u un număr pozitiv fixat, Λ, $\Omega \in \mathcal{A}$ și numerele pozitive ε, λ, μ care satisfac $\mu < \lambda < 0 < \varepsilon < \min(u, \lambda - u)$. Construim un drum

închis și liniar pe porțiuni $\Delta_{\varepsilon\lambda\mu}(.)$ astfel

$$\Delta_{\varepsilon\lambda\mu}(s) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pentru } s \leqslant -\lambda, \\ \varepsilon^{-1}(s+\lambda)\mathbf{\Lambda} & \text{pentru } -\lambda \leqslant s \leqslant -\lambda+\varepsilon, \\ \mathbf{\Lambda} & \text{pentru } -\lambda+\varepsilon \leqslant s \leqslant -\lambda+u, \\ \mathbf{\Lambda}+\varepsilon^{-1}(s+\lambda-u)\mathbf{\Omega} & \text{pentru } -\lambda+u \leqslant s \leqslant -\lambda+u+\varepsilon, \\ \mathbf{\Lambda}+\mathbf{\Omega} & \text{pentru } -\lambda+u+\varepsilon \leqslant s \leqslant 0, \\ \mu^{-1}(\mu-s)(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{\Omega}) & \text{pentru } 0 \leqslant s \leqslant \mu, \\ \mathbf{0} & \text{pentru } \mu \leqslant s. \end{cases} \tag{3.8}$$

Deoarece $\Delta_{\varepsilon\lambda\mu}(\cdot)$ pleacă din starea naturală și este o funcție derivabilă a.p.t., ecuația constitutivă (2.5) se poate scrie

$$\mathbf{\Pi}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{R}(t-s)\dot{\mathbf{\Delta}}_{\varepsilon\lambda\mu}(s)\mathrm{d}s. \tag{3.9}$$

Conform cu (2.3), (3.8), și (3.9) lucrul mecanic-căldura ce corespunde drumului construit este

$$l(\Delta_{\varepsilon\lambda\mu}(\cdot)) = \int_{-\lambda}^{\mu} \mathbf{\Pi}(t)\cdot\dot{\mathbf{\Delta}}_{\varepsilon\lambda\mu}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\lambda}^{\mu}\int_{-\lambda}^{t} \dot{\mathbf{\Delta}}_{\lambda\varepsilon\mu}(t)\cdot\mathcal{R}(t-s)\dot{\mathbf{\Delta}}_{\varepsilon\lambda\mu}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t =$$

$$= \varepsilon^{-2}\int_{-\lambda}^{-\lambda+\varepsilon}\int_{-\lambda}^{t} \mathbf{\Lambda}\cdot\mathcal{R}(t-s)\mathbf{\Lambda}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \varepsilon^{-2}\int_{-\lambda+u}^{-\lambda+u+\varepsilon}\int_{-\lambda}^{-\lambda+\varepsilon} \mathbf{\Omega}\cdot\mathcal{R}(t-s)\mathbf{\Lambda}\mathrm{d}s\mathrm{d}t +$$

$$+\varepsilon^{-2}\int_{-\lambda+u}^{-\lambda+u+\varepsilon}\int_{-\lambda+u}^{t} \mathbf{\Omega}\cdot\mathcal{R}(t-s)\mathbf{\Omega}\mathrm{d}s\mathrm{d}t - (\varepsilon\mu)^{-1}\int_{0}^{\mu}\int_{-\lambda}^{-\lambda+\varepsilon} (\mathbf{\Lambda}+\mathbf{\Omega})\cdot\mathcal{R}(t-s)\mathbf{\Lambda}\mathrm{d}s\mathrm{d}t -$$

$$-(\varepsilon\mu)^{-1}\int_{0}^{\mu}\int_{-\lambda+u}^{-\lambda+u+\varepsilon} (\mathbf{\Lambda}+\mathbf{\Omega})\cdot\mathcal{R}(t-s)\mathbf{\Omega}\mathrm{d}s\mathrm{d}t + \mu^{-2}\int_{0}^{\mu}\int_{0}^{t} (\mathbf{\Lambda}+\mathbf{\Omega})\cdot\mathcal{R}(t-s)(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{\Omega})\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

De aici,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} l(\Delta_{\varepsilon\lambda\mu}(\cdot)) = \frac{1}{2}\Lambda\cdot\Re(0)\,\Lambda + \Omega\cdot\Re(u)\,\Lambda + \frac{1}{2}\Omega\cdot\Re(0)\Lambda -$$

$$-\mu^{-1}\int_0^{\mu}(\Lambda+\Omega)\cdot\Re(t+\lambda)\Lambda dt - \mu^{-1}\int_0^{\mu}(\Lambda+\Omega)\cdot\Re(t+\lambda-u)\,\Omega dt +$$

$$+\mu^{-2}\int_0^{\mu}\int_0^{t}(\Lambda+\Omega)\cdot\Re(t-s)(\Lambda+\Omega)ds dt.$$

Mai departe,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} l(\Delta_{\varepsilon\lambda\mu})(\cdot) = \frac{1}{2}\Lambda\cdot\Re(0)\,\Lambda + \Omega\cdot\Re(u)\,\Lambda +$$

$$+\frac{1}{2}\Omega\cdot\Re(0)\,\Omega - (\Lambda+\Omega)\cdot\Re(\infty)\,(\Lambda+\Omega) +$$

$$+\mu^{-2}\int_0^{\mu}\int_0^{t}(\Lambda+\Omega)\cdot\Re(t-s)(\Lambda+\Omega)\,ds dt.$$

Schimbînd ordinea de integrare, integrala de mai sus capătă expresia

$$\int_0^1(1-s)(\Lambda+\Omega)\cdot\Re(\mu s)(\Lambda+\Omega)ds.$$

Astfel obținem în final

$$\lim_{\mu\to\infty}\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} l(\Delta_{\varepsilon\lambda\mu})(\cdot) = \frac{1}{2}\Lambda\cdot\Re(0)\,\Lambda + \Omega\cdot\Re(u)\Lambda +$$

$$+\frac{1}{2}\Omega\cdot\Re(0)\Omega - \frac{1}{2}(\Lambda+\Omega)\cdot\Re(\infty)(\Lambda+\Omega).$$

Deoarece compatibilitatea cu termodinamica impune

$$l(\Delta_{\varepsilon\mu\lambda}(\cdot)) \geqslant 0,$$

urmează că trebuie să vem

$$\lim_{\mu\to\infty}\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} l(\Delta_{\varepsilon\lambda\mu}(\cdot)) \geqslant 0,$$

adică

$$\frac{1}{2}\Lambda\cdot\Re(0)\Lambda + \Omega\cdot\Re(u)\Lambda + \frac{1}{2}\Omega\cdot\Re(0)\Omega - \frac{1}{2}(\Lambda+\Omega)\cdot\Re(\infty)(\Lambda+\Omega) \geqslant 0.$$

Deoarece $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}(\infty)$, inegalitatea de mai sus se reduce la

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathcal{R}(u)\mathbf{\Lambda} - \frac{1}{2}\mathbf{\Omega} \cdot \mathcal{R}(0)\mathbf{\Lambda} - \frac{1}{2}\mathbf{\Lambda} \cdot \mathcal{R}(0)\mathbf{\Omega} \geqslant 0$$

sau

$$\mathbf{\Omega} \cdot (\mathcal{R}(u) - \frac{1}{2}\mathcal{R}(0) - \frac{1}{2}\mathcal{R}^T(0))\mathbf{\Lambda} \geqslant 0 \quad \forall \mathbf{\Lambda}, \mathbf{\Omega} \in \mathcal{A}, \quad u \geqslant 0.$$

Aceasta conduce la

$$\mathcal{R}(u) = \frac{1}{2}(\mathcal{R}(0) + \mathcal{R}^T(0)), \qquad \forall u \geqslant 0,$$

adică funcţia de relaxare are valoare constantă.

Făcînd mai sus $u = 0$, rezultă că $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}^T(0)$, deci simetria lui $\mathcal{R}(0)$, o proprietate deja demonstrată în teorema 3.1.

§4. DISIPATIVITATE; COMPATIBILITATE CU TERMOSTATICA; CONSECINŢE

În acest paragraf vom cerceta unele consecinţe ce decurg din anumite ipoteze (logic independente de a doua lege a termodinamicii în forma inegalităţii Clausius-Duhem) privind valorile admisibile pe care le poate avea lucrul mecanic-căldura care corespunde unor procese particulare (izoterme sau rigide) care pornesc din starea naturală. Analiza ce urmează va arăta că *numai* o parte a acestor ipoteze este acceptabilă din punct de vedere fizic.

Definiţia 4.1. Funcţia de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ se numeşte *izoterm disipativă* dacă pentru orice moment $u \in R$ şi pe orice *drum izoterm* care pleacă din *starea naturală* are loc inegalitatea

$$\int_{-\infty}^{u} \mathbf{\Pi}(t, \mathbf{\Delta}(\cdot)) \cdot \dot{\mathbf{\Delta}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{u} \mathbf{T}(t, \mathbf{E}(\cdot)) \cdot \dot{\mathbf{E}}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

unde

$$\mathbf{T}(t, \mathbf{E}(\cdot)) = \mathcal{G}(0)\mathbf{E}(t) + \int_{0}^{\infty} \dot{\mathcal{G}}(s)\, \mathbf{E}^t(s)\,\mathrm{d}s. \tag{4.2}$$

Definiţia 4.2. Funcţia de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ se numeşte *rigid incompatibilă cu termostatica* dacă pentru orice moment $u \in R$ şi pe orice *drum rigid* care pleacă din *starea naturală* are loc inegalitatea

$$\int_{-\infty}^{u} \mathbf{\Pi}(t, \mathbf{\Delta}(\cdot)) \cdot \dot{\mathbf{\Delta}}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{u} h(t, T(\cdot))\, \dot{T}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0, \tag{4.3}$$

unde

$$h(t,\ T(\cdot))=g(0)T(t)+\int_0^\infty \dot{g}(s)\ T^t(s)\mathrm{d}s. \tag{4.4}$$

Definiția 4.3. Funcția de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ se numește *rigid compatibilă cu termostatica* dacă pentru orice moment $u \in R$ și pe orice *drum rigid* care pleacă din *starea naturală* are loc inegalitatea

$$\int_{-\infty}^{u} h(t,\ T(\cdot))\dot{T}(t)\mathrm{d}t \geqslant 0, \tag{4.5}$$

unde $h(t,\ T(\cdot))$ este dat de (4.4).

În cazul materialelor vîscoelastice liniare conceptul de funcție de relaxare disipativă apare în lucrarea [13] a lui König și Meixner; consecințe ce decurg din proprietatea de disipare au fost investigate de Shu și Onat [14], de Gurtin și Herrera [12], de Osborn [15]; legătura ce există între compatibilitatea cu termodinamica și disipativitatea a fost clarificată de Day ([9], [11], Cap. 6). Admiterea naturii disipative a funcției de relaxare a unui matrial vîscoelastic exprimă convingerea noastră că trebuie să efectuăm lucru mecanic dacă dorim să deformăm corpul; admiterea proprietății de disipativitate izotermă în cazul unui material termovîscoelastic exprimă aceeași idee : este necesară efectuarea unui lucru mecanic pentru deformarea corpului cu păstrarea temperaturii sale inițiale.

Admiterea valabilității proprietății din definiția 4.2 constituie o extrapolare a proprietății de compatibilitate cu termodinamica la procese rigide ce pornesc din starea naturală, dar nu sînt cicluri. Vom vedea că această extrapolare conduce la concluzii inacceptabile din punctul de vedere al termostaticii, fapt ce justifică și terminologia utilizată.

În termostatică se admite că energia internă a unui corp care nu este deformat crește dacă temperatura corpului crește (deci *căldura specifică* a corpului este *pozitivă*) și că entropia corpului este o funcție crescătoare de energia sa internă (pentru detalii vezi de exp. [16]). Admiterea proprietății din definiția 4.3 constituie o extrapolare — la cazul materialelor termovîscoelastice — a proprietăților amintite și exprimă convingerea noastră că mărind temperatura corpului — fără a-l deforma — mărim simultan și conținutul său de entropie. Aceste considerații justifică și terminologia folosită în definiția 4.3.

Trecem acum la prezentarea unor consecințe ce decurg din admiterea valabilității proprietăților caracterizate prin definițiile 4.1 — 4.3.

Următoarele trei teoreme, pe care le dăm pentru completitudine, se datoresc lui Gurtin și Herrera [12], respectiv lui Day ([9], [11], Cap. 6) și au fost stabilite în cazul materialelor vîscoelastice, deci prin restrîngerea clasei proceselor admisibile la cele izoterme. Pentru a încadra rezultatele amintite în contextul mai general considerat de noi, facem uz de relația de structură (1.2) și introducem

Definiția 4.4. Funcția de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ se numește *izoterm compatibilă cu termodinamica* dacă satisface relația (3.1) pe orie *ciclu izoterm* și *rigid compatibilă cu termodinamica* dacă satisface relația (3.1) pe orice *ciclu rigid.*

Teorema 4.1 (Gurtin, Herrera). Dacă funcția de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ este izoterm disipativă, atunci modulii $\mathcal{G}((0)$ și $\mathcal{G}(\infty)$ sînt simetrici pozitiv semidefiniți și

$$\mathcal{G}(0) \geqslant \pm\, \mathcal{G}(s) \qquad \forall s \geqslant 0. \tag{4.6}$$

În particular, $-\mathcal{G}(0) \geqslant 0$, iar inegalitatea $(3.3)_1$ poate fi întărită și avem

$$\mathcal{G}(0) \geqslant \mathcal{G}(\infty) \geqslant 0. \tag{4.7}$$

Teorema 4.2 (Day).

(*a*) $\mathcal{R}(\cdot)$ este izoterm disipativ dacă și numai dacă este izoterm compatibil cu termodinamica și modulul de echilibru $\mathcal{G}(\infty)$ este pozitiv semidefinit.

(*b*) $\mathcal{R}(\cdot)$ este izoterm compatibil cu termodinamica dacă și numai dacă funcția de relaxare $\mathcal{R}(\cdot) - \mathcal{R}(\infty)$ este izoterm disipativă și modulul de echilibru $\mathcal{G}(\infty)$ este simetric.

Așa cum a arătat Day, din teoremele precedente urmează

Teorema 4.3 (Day). Dacă $\mathcal{R}(\cdot)$ este izoterm compatibil cu termodinamica și, în particular, dacă $\mathcal{R}(\cdot)$ este izoterm disipativ atunci moduli $\mathcal{G}(0)$ și $\mathcal{G}(\infty)$ sînt simetrici și

$$\mathcal{G}(0) - \mathcal{G}(\infty) \geqslant \pm\,(\mathcal{G}(s) - \mathcal{G}(\infty)) \quad \forall s \geqslant 0. \tag{4.8}$$

În plus, au loc inegalitățile

$$\mathcal{G}(0) \geqslant \mathcal{G}(\infty) \quad \text{și} \quad -\dot{\mathcal{G}}(0) \geqslant 0. \tag{4.9}$$

În cazul materialelor termovîscoelastice și prin adaptarea procedeelor lui Day pot fi obținute unele rezultate duale celor de mai sus, care se referă la proprietățile funcției de relaxare $g(\cdot)$.

Teorema 4.4. Dacă $\mathcal{R}(\cdot)$ este rigid incompatibil cu termostatica, atunci

$$g(0) \leqslant 0, \qquad g(\infty) \leqslant 0 \quad \text{și} \quad g(0) \leqslant \pm\, g(s) \qquad \forall s \geqslant 0 \tag{4.10}$$

În particular,

$$g(0) \leqslant g(\infty) \leqslant 0 \quad \text{și} \quad \dot{g}(0) \geqslant 0. \tag{4.11}$$

Demonstrație. Notăm

$$q(T(\cdot)) = -\int_{\infty}^{\infty} h(t,\ T(\cdot))\dot{T}(t)\mathrm{d}t, \tag{4.12}$$

unde $T(\cdot)$ este un drum (rigid) arbitrar, iar legătura dintre $h(t,\ T(\cdot))$ și $T(\cdot)$ este dată de relația constitutivă (4.4).

Dacă $T(\cdot)$ este un drum ce pleacă din starea naturală, atunci și drumul $T(., \alpha)$, dat de relația (2.1), pleacă din starea naturală și deci conform definiției 4.2 trebuie să avem

$$q(T(\ .,\ \alpha)) \geqslant 0,$$

de unde rezultă

$$\lim_{\alpha \to 0} q(T(\ .,\ \alpha)) \geqslant 0 \qquad \text{și} \qquad \lim_{\alpha \to \infty} q(T(\ .,\ \alpha)) \geqslant 0.$$

Pe baza relației de structură (1.2), a teoremei 2.2 și a faptului că drumul este rigid, din inegalitățile precedente deducem că modulele $g(0)$ și $g(\infty)$ trebuie să satisfacă restricțiile

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{T}(t) g(0)\, T(t)\mathrm{d}t \leqslant 0 \qquad \text{și} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \dot{T}(t)\, g(\infty)\, T(t) \leqslant 0;$$

de aici prin integrare se obțin inegalitățile $(4.10)_{12}$.

Fie drumul (rigid) $T(\cdot)$ construit cu ajutorul numerelor reale arbitrare a, b și prin utilizarea numerelor reale de asemenea arbitrare, dar pozitive, ε, s, în modul următor

$$T(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad t \leqslant 0, \\ \varepsilon^{-1} t a & \text{pentru} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ a & \text{pentru} \quad \varepsilon \leqslant t \leqslant s, \\ a + \varepsilon^{-1}(t - s)b & \text{pentru} \quad s \leqslant t \leqslant s + \varepsilon, \\ a + b & \text{pentru} \quad s \leqslant t. \end{cases} \tag{4.13}$$

Inegalitatea (4.3) corespunzătoare acestui drum ne conduce la relația

$$a^2 \varepsilon^{-2} \int_0^{\varepsilon}\int_0^{t} g(t-u)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}t + ab\varepsilon^{-2} \int_s^{s+\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} g(t-u)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}t +$$

$$+ b^2 \varepsilon^{-2} \int_s^{s+\varepsilon}\int_0^{t} g(t-u)\mathrm{d}u\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Făcînd $\varepsilon \to 0$, obținem

$$\frac{1}{2} a^2 g(0) + abg(s) + \frac{1}{2} b^2 g(0) \leqslant 0. \tag{4.14}$$

Dacă luăm în (4.14) $b = -a$, găsiim $g(0) \leqslant g(s)$, iar dacă luăm $a = b$ găsim $g(0) \leqslant -g(s)$, $s \geqslant 0$, Făcînd $s \to \infty$ și ținînd seama de $(4.10)_2$ obținem $(4.11)_{1,2}$; $(4.11)_3$ urmează din $(4.10)_3$.

Observăm, în particular, că în cazul analizat din $(4.10)_2$ urmează *nepozitivitatea* căldurii specifice instantanee $c(0) = \theta_0 \rho_0^{-1} g(0)$ rezultat inac-

ceptabil din punct de vedere fizic. În consecinţă putem afirma că funcţia de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ *nu* poate fi rigid incompatibilă cu termostatica.

Prin repetarea raţionamentului precedent se poate demonstra

Teorema 4.5. Dacă $\mathcal{R}(\cdot)$ este rigid compatibil cu termostatica, atunci

$$g(0) \geqslant 0, \quad g(\infty) \geqslant 0 \quad \text{şi} \quad g(0) \geqslant \pm g(s) \quad \forall s \geqslant 0. \tag{4.15}$$

În particular,

$$g(0) \geqslant g(\infty) \geqslant 0 \quad \text{şi} \quad -\dot{g}(0) \geqslant 0. \tag{4.16}$$

Din compararea relaţiilor (4.6), (4.7) cu (4.15), (4.16) urmează că teorema precedentă constituie *dualul* teoremei 4.1 a lui Gurtin şi Herrera.

Din (4.16) rezultă totodată că, în cazul analizat, căldura specifică instantanee $c(0)$ este nenegativă, consecinţă corectă din punct de vedere fizic. Astfel putem conchide că din acest punct de vedere, funcţia de relaxare poate fi rigid compatibilă cu termostatica. Cu toate acestea, următorul rezultat *va restrînge* drastic domeniul în care precedentul rezultat este semnificativ; avem

Teorema 4.6. Dacă funcţia de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ este rigid compatibilă şi cu termodinamica *şi* cu termostatica, atunci $g(\cdot)$ are o *valoare constantă, nenegativă*; mai precis

$$\dot{g}(s) = g(0) = g(\infty) \geqslant 0 \qquad \forall s \geqslant 0. \tag{4.17}$$

Demonstraţie. Relaţiile (4.17) urmează imediat din $(4.15)_{1,3}$, combinate cu (3.2) şi cu relaţia de structură (1.2).

În cazul analizat relaţia constitutivă (4.4) capătă forma simplă

$$h(t, T(\cdot)) = h(t, T(t)) = g(0)\, T(t), \quad g(0) \geqslant 0. \tag{4.18}$$

Rezultă astfel că dacă materialul este un conductor de căldură rigid, valoarea curentă a entropiei specifice este complet determinată de valoarea curentă a temperaturii, deci *nu* poate fi în nici un mod influenţată de preistoria variaţiilor de temperatură. Acest rezultat surprinzător este analog cu cel obţinut de Gurtin [18] în studiul implicaţiilor inegalităţii Clausius-Duhem asupra naturii ecuaţiilor constitutive spaţial nelocale ale unui conductor rigid. În timp ce în cazul analizat de Gurtin restricţiile termodinamice interzic posibilitatea apariţiei efectelor spaţial nelocale, în cazul investigat de noi restricţiile termodinamice şi termostatice impuse elimină posibilitatea apariţiei efectelor temporal nelocale.

Pe baza rezultatului obţinut considerăm că problema determinării caracteristicilor funcţiei de relacare $g(\cdot)$ rămîne *deschisă*, iar restricţia impusă în teorema 4.5 trebuie să fie înlocuită cu o condiţie care să implice nenegativitatea căldurii specifice instantanee, *fără* să elimine posibilitatea apariţiei efectelor temporal nelocale.

Rezumînd analiza efectuată în acest paragraf putem spune că, în cazul materialelor termovîscoelastice, răspunsurile concludente la problemele legate de proprietăţile P_4, P_5 şi P_7 deocamdată *lipsesc*, chiar şi în cazul particular al unui conductor de căldură rigid. Se va vedea în schimb că în privinţa proprietăţilor P_6 şi P_8 situaţia teoriei este satisfăcătoare.

Primită la redacţie la 8 octombrie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals with application in continuum mechanics*, Arch. Rat. Mech. Anal., **6**, 355 — 370 (1960).
2. B. D. COLEMANN, W. NOLL, *Fundations of linear viscoelasticity*, Rev. Modern. Phys., **33**, 239 — 249 (1961).
3. B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, 1—46 (1964).
4. B. D. COLEMAN, *On thermodynamcs, strain impulses and viscoelasticity*, Arc. Rat. Mech. Anal., **17**, 230 — 254 (1964).
5. I. LUCA, E. SOÓS, *Restricții trmodinamice în termovîscoelasticitatea liniară*, St. Cerc. Mec., Apl., **45** (1986).
6. R. M. CHRISTENSEN, *Theory of viscoelasticity*, Academic Press New York, London, 1971.
7. W. A. DAY, *On monotonicity of relaxation functions of viscoelastic materials*, Proc. Cambridge Philos Soc., **67**, 503 — 508 (1970).
8. W. A. DAY, *Time-reversal and symmetry of the relaxation function of a linear viscoelastic material*, Arch. Rat. Mech. Anal., **40**, 155 — 159 (1971).
9. W. A. DAY *Restrictions on relaxation functions in linear viscoelasticity*, Quart, J. Mech. Appl. Math, **24**, 487 — 497 (1971).
10. W. A. DAY *When is a linear viscoelastic material elastic*, Mathematika, **18**, 134 — 137 (1971).
11. W. A. DAY *The thermodynamics of simple materials with fading memory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
12. M. E. GURTIN, I. HERRERA, *On dissipation inequalities and linear thermoelasticity*, Quart. Appl. Math., **23**, 235 — 245 (1965).
13. A. KÖNIG, J. MEIXNER, *Lineare Systeme und lineare Transformationen*, Math. Nachr. **19**, 256 — 322 (1958).
14. L. S. SHU, E. T. ONAT, *On anisotropic linear viscoelastic solids*, Proc. Fourth. Symp. on Naval Structural Mechanics, Purdue Univ., 1965.
15. R. B. OBSBORN, *Material properties inequalities in viscoelasticity*, Int. J. Engng. Sci., **9**, 713 — 723 (1971).
16. I. LUCA, E. SOÓS, *Termostatica fluidelor termoeleastice* I— III, St. Cerc. Mec. Apl., **44**, 505 — 524 (1985), **45**, 3 — 22 și 111 — 129 (1986).
17. T. G. ROGERS, A. C. PIPKIN, *Asymetric relaxation and compliance matrices in linear viscoelasticity*, ZAMP, **14**, 334 — 343 (1963).
18. M. E. GURTIN, *Thermodynamics and the possibility of spatial interaction in elastic materials* Arch. Rat. Mech. Anal., **19**, 339 — 352 (1965).
19. S. R. de GROOT, P. MAZUR, *Non equilibrium thermodynamics*, North,-Holland, Amsterdam, 1962.

CIOCNIREA NORMALĂ A SISTEMELOR DE SOLIDE

de ȘT. STAICU
Institutul Politehnic București

Lucrarea studiază ciocnirea dintre mai multe corpuri ale unui sistem material, utilizînd teoria vectorilor duali. Astfel, se exprimă sub forma matriceală teorema momentului cinetic dual și se dau relațiile generale necesare calculului coeficienților de restituire. Ca aplicație, se studiază ciocnirea normală a două solide și se stabilește o formulă pentru coeficientul de restituire al ciocnirii unui sistem de sfere.

1. INTRODUCERE

În ecle ce urmează se stabilesc relațiile matriceale privind dinamica ciocnirii simultane a unui sistem de rigide.

Să considerăm un reper fix $\Omega\xi\eta\zeta$ (T_0) în raport cu care se deplasează sistemul de corpuri $T_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ solidare cu triedrele mobile $C_i x_i y_i z_i$ (fig. 1.) Presupunînd că originile acestor triedre coincid cu centrele

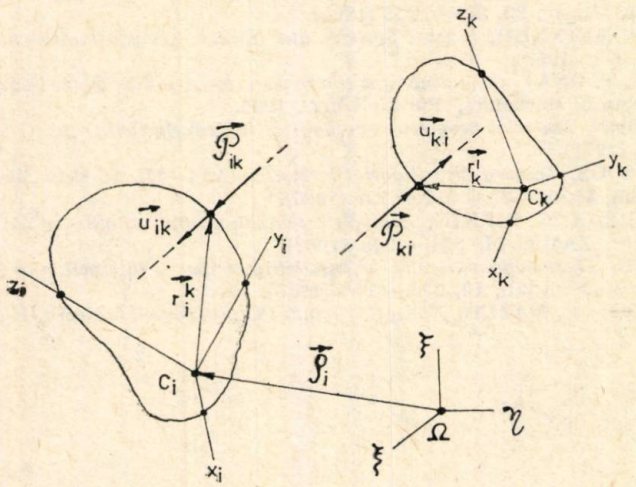


Fig. 1

de masă ale rigidelor, parametrii de poziție ai unui sistem T_k în raport cu reperul mobil T_i, vor fi coordonatele relative x_{ki}, y_{ki}, z_{ki} ale originii C_k și unghiurile relative ale lui Euler ψ_{ki}, θ_{ki}, φ_{ki} formate de axele $C_k x_k$, $C_k y_k$, $C_k z_k$ cu axele $C_i x_i$, $C_i y_i$ și, respectiv, $C_i z_i$. Acești parametri formează matricele coloană

$$(r_{ki}) = \begin{bmatrix} x_{ki} \\ y_{ki} \\ z_{ki} \end{bmatrix}, \qquad (\lambda_{ki}) = \begin{bmatrix} \psi_{ki} \\ \theta_{ki} \\ \varphi_{ki} \end{bmatrix} \qquad (i, k = 1, 2, 3, \ldots, n;\ i \neq j), \quad (1)$$

care pot reprezenta blocurile matricelor

$$(R_{ki}) = \begin{bmatrix} (r_{ki}) \\ \hline 0 \end{bmatrix}, \qquad (\Lambda_{ki}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline (\lambda_{ki}) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Introducînd natricele de rotaţie ale lui Euler [5]:

$$[a_{\psi}^{ki}] = \begin{bmatrix} \cos\psi_{ki} & \sin\psi_{ki} & 0 \\ -\sin\psi_{ki} & \cos\psi_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(a_{\theta}^{ki}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{ki} & \sin\theta_{ki} \\ 0 & -\sin\theta_{ki} & \cos\theta_{ki} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$[a_{\theta}^{ki}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{ki} & \sin\varphi_{ki} & 0 \\ -\sin\varphi_{ki} & \cos\varphi_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se construieşte matricea ortogonală de transformare

$$[a_{ki}] = [a_{\varphi}^{ki}]\,[a_{\theta}^{ki}]\,[a_{\psi}^{ki}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}^{ki} & \alpha_{12}^{ki} & \alpha_{13}^{ki} \\ \alpha_{21}^{ki} & \alpha_{22}^{ki} & \alpha_{23}^{ki} \\ \alpha_{31}^{ki} & \alpha_{32}^{ki} & \alpha_{33}^{ki} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

care permite trecerea din sistemul mobil T_i în sistemul alăturat T_k. Dezvoltînd calculele [1] se identifică uşor elementele matricei de trecere $[a_{ki}]$.

Fie O_1^j un punct al rigidului T_i, fixat prin coordonatele x_i^j, y_i^j, z_i^j, care formează matricea coloană

$$(r_i^j) = \begin{bmatrix} x_i^j \\ y_i^j \\ z_i^j \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Poziţia relativă a acestui punct, care coincide în timpul ciocnirii cu punctul Q_k^l al rigidului T_l, va fi dată de relaţia matriceală

$$(r_i^j) = (r_{ki}) + [a_{ki}]^T\,(r_k^{lj}) \tag{6}$$

sau de forma sa echivalentă

$$[r_i^j] = [r_{ki}] + [a_{ki}]^T\,[r_k^l]\,[a_{ki}], \tag{7}$$

exprimate cu ajutorul matricelor pătratice antisimetrice

$$\rfloor r_{ki}\lfloor = \begin{bmatrix} 0 & -z_{ki} & y_{ki} \\ z_{ki} & 0 & -x_{ki} \\ -y_{ki} & x_{ki} & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Matricea coloană

$$(r_k) = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \tag{9}$$

conţine coordonatele punctului Q_k^l pe axele triedrului T_k.

Dacă se utilizează matricele (2) se va observa că relaţiile (6) şi (7) pot fi scrise sub o nouă formă

$$(R_i^j) = (R_{ki}) + [A_{ki}]^T (R_k^l),$$

$$[R_i^j] = [R_{ki}] + [A_{ki}]^T [R_k^l] [A_{ki}], \tag{10}$$

în care matricele pătratice

$$[A_{ki}] = \left[\begin{array}{c|c} [a_{ki}] & \\ \hline 0 & [a_{ki}] \end{array}\right], \quad [R_{ki}] = \left[\begin{array}{c|c} [e] & 0 \\ \hline [r_{ki}] & 0 \end{array}\right] \tag{11}$$

conţin matricele de tecere (4), matricele antisimetrice (8) şi matricea unitate

$$[e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

2. CIOCNIREA SIMULTANĂ A MAI MULTOR RIGIDE

Mişcarea rigidului T_i, în raport cu reperul fix $\Omega\xi\eta\xi$, este caracterizată de viteza $\vec{v}_i$ a originii C_i şi de viteza unghiulară $\vec{\omega}_i$. Aceşti vectori definesc vectorul viteză dual absolută a solidului T_i în centrul său de greutate, care va fi reprezentat prin matricea componentelor pe axele legate de rigid [11]

$$(V_i) = \left[\begin{array}{c} (v_i) \\ \hline (\omega_i) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} v_x^i \\ v_y^i \\ v_z^i \\ \omega_x^i \\ \omega_y^i \\ \omega_z^i \end{bmatrix}. \tag{13}$$

De asemenea, viteza dual a rigidului T_k în punctul C_k va conţine componentele vectorilor $\vec{v}_k$ şi $\vec{\omega}$ pe axele triedrului T_k, adică

$$(V_k) = \left[\begin{array}{c} (v_k) \\ \hline (\omega_k) \end{array}\right]. \tag{14}$$

Pentru a studia ciocnirea sistemului considerat, se calculează mai întîi momentele cinetice duale, în raport cu punctul fix Ω, ale solidelor

T_i. T_k, utilizînd definiţiile şi rezultatele din lucrarea [10]. Astfel, matricele coloane ale celor doi vectori duali pot fi exprimate prin relaţiile duale

$$(K_\Omega^i) = [M_i]\,[A_i]\,[\mathscr{R}_i^0]\,[A_i]^T\,(V_i) + [\tilde{\mathbf{M}}_i]\,(V_i), \tag{15}$$

$$(K_\Omega^k) = [M_i]\,[A_k]\,[\mathscr{R}_k^0]\,[A_k]^T\,(V_k) + [\tilde{\mathbf{M}}_k]\,(V_k). \tag{15}$$

În aceste expresii,

$$[M_i] = \left[\begin{array}{c|c} [m_i] & 0 \\ \hline 0 & [m_i] \end{array}\right], \quad [M_k] = \left[\begin{array}{c|c} [m_k] & 0 \\ \hline 0 & [m_k] \end{array}\right] \tag{16}$$

sînt matricele maselor, iar

$$[\tilde{\mathbf{M}}_i] = \left[\begin{array}{c|c} [m_i] & 0 \\ \hline 0 & [J_i] \end{array}\right], \quad [\tilde{\mathbf{M}}_k] = \left[\begin{array}{c|c} [m_k] & 0 \\ \hline 0 & [J_k] \end{array}\right] \tag{17}$$

reprezintă matricele generale de inerţie, care conţin matricele tensorilor de inerţie ai rigidelor, $[J_i]$ şi $[J_k]$, calculate faţă de axele triedrelor proprii [6], [7]. Se mai observă că matricele de transformare $[A_i]$, $[A_k]$ permit trecerea din sistemul $\Omega\xi\eta\zeta$ în sistemele legate de rigidele T_i, T_k şi că matricele

$$[\mathscr{R}_i^0] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline [\rho_i] & 0 \end{array}\right], \quad [\mathscr{R}_k^0] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline [\rho_k] & 0 \end{array}\right] \tag{18}$$

depind de matricele antisimetrice $[\rho_i]$, $[\rho_k]$ ale vectorilor de poziţie $\overrightarrow{\Omega C_i}$ şi $\overrightarrow{\Omega C_k}$.

Să izolăm cele două corpuri T_i, T_k şi să introducem în punctele de contact percuţiile $\vec{\mathscr{P}}_{ij}$, $\vec{\mathscr{P}}_{kl}$.

Teorema momentului cinetic dual în raport cu centrul de masă [2] aplicată pentru faza de compresiune a ciocnirii rigidelor T_i şi T_k, se exprimă prin relaţiile

$$(W_i) - (V_i') = \sum_j \mathscr{P}_{ij}^c [\tilde{\mathbf{M}}_i]^{-1}\,[R_i^j]\,(U_{ij}),$$

$$(W_k) - (V_k') = \sum_l \mathscr{P}_{kl}^c [\tilde{\mathbf{M}}_k]^{-1}\,[R_k^l]\,(U_{kl}), \tag{19}$$

unde (W_i) şi (W_k) sînt matricele vitezelor duale la sfîrşitul primului interval al ciocnirii, iar matricele coloane

$$(U_{ij}) = \left[\begin{array}{c} (u_{ij}) \\ \hline 0 \end{array}\right], \quad (U_{kl}) = \left[\begin{array}{c} (u_{kl}] \\ \hline 0 \end{array}\right] \tag{20}$$

precizează versorii direcţiilor normale la suprafeţele corpurilor în punctele de contact. Procedînd asemănător şi pentru faza de destindere, vom avea

$$(V_i'') - (W_i) = \sum_j \mathscr{P}_{ij}^d [\tilde{\mathbf{M}}_i]^{-1}\,[R_i^j]\,(U_{ij}),$$

$$(V_k'') - (W_k) = \sum_l \mathscr{P}_{kl}^d [\tilde{\mathbf{M}}_k]^{-1}\,[R_k^l]\,(U_{kl}). \tag{21}$$

În continuare, vom face ipoteza că, la sfîrșitul fazei de compresiune, componentele normale ale vitezelor punctelor de contact sînt egale. Această condiție poate fi exprimată cu ajutorul vectorilor duali sub următoarea formă :

$$(U_{ik})^T [R_i^k]^T (W_i) + (U_{ki})^T [R_k^i]^T (W_k) = 0$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n; \quad i \neq k). \tag{22}$$

Se observă că matricele versorilor $\vec{u}_{ik}$ și $\vec{u}_{ki}$ sînt legate prin relația

$$(U_{ik}) + [A_{ki}]^T (U_{ki}) = 0. \tag{23}$$

Să înmulțim relațiile (19) la stînga cu matricele $\{[R_i^k](U_{ik})\}^T$ respectiv, $\{[R_k^i](U_{ki})\}^T$ și apoi să însumăm ; rezultă

$$-(U_{ik})^T [R_i^k]^T (V_i') - (U_{ki})^T [R_k^i] (V_k') =$$
$$= \sum_j \mathscr{P}_{ij}^c (U_{ik})^T [R_i^k]^T [\tilde{M}_i]^{-1} [R_i^j] (U_{ij}) +$$
$$+ \sum_l \mathscr{P}_{kl}^c (U_{ki})^T [R_k^i]^T [\tilde{M}_k]^{-1} [R_k^l] (U_{ll}). \tag{24}$$

Procedînd asemănător cu (21), se obține

$$(U_{il})^T [R_i^k]^T (V_i'') + (U_{ki})^T [R_k^i]^T (V_k'') =$$
$$= \sum_j \mathscr{P}_{ij}^d (U_{ik})^T [R_i^k] [\tilde{M}_i]^{-1} [R_i^j] (U_{ij}) +$$
$$+ \sum_l \mathscr{P}_{kl}^d (U_{ki})^T [R_k^i] [\tilde{M}_k]^{-1} [R_k^l] (U_{kl}). \tag{25}$$

Sistemul de ecuații, (24, (25) furnizează intensitățile percuțiilor normale $\mathscr{P}_{ik}^c$ și $\mathscr{P}_{ik}^d$ cu ajutorul cărora se pot calcula coeficienții de restituire

$$k_{ik} = \frac{\mathscr{P}_{ik}^d}{\mathscr{P}_{ik}^c} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n; \quad i \neq k). \tag{26}$$

Dacă se elimină vitezele duale (W_i), (W_k) între relațiile (19) și (21) se vor obține vitezele duale pierdute pe perioada ciocnirii :

$$\delta(V_i) = \sum_j \mathscr{P}_{ij} [\tilde{M}_i]^{-1} [R_i^j] (U_{ij}),$$
$$\delta(V_k) = \sum_l \mathscr{P}_{kl} [\tilde{M}_k]^{-1} [R_k^l] (U_{kl}), \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n; \quad i = k). \tag{27}$$

3. CIOCNIREA NORMALĂ A DOUĂ RIGIDE

Ca aplicație, vom presupune acum cazul ciocnirii a două solide rigide de mase m_1 și m_2, avînd centrele de greutate în originile axelor C_1 și C_2. Unele aspecte ale ciocnirii a două corpuri au fost studiate de C. Iacob [3], [4], R. Voinea [8] și N. Pandrea [11].

Fie $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$ vectorii de poziție ai punctului de contact, față de triedrele atașate celor două corpuri. Pornind de la relațiile (24) și (25), putem scrie două condiții scalare din care se deduc imediat percuțiile

$$\mathscr{P}_c = -\frac{(U_{12})^T[R_1]^T(V_1')+(U_{21})^T[R_2]^T(V_2')}{(U_{12})^T[R_1]^T[\tilde{M}_1]^{-1}[R_1](U_{12})+(U_{21})^T[R_2]^T[\tilde{M}_2]^{-1}[R_2](U_{21})},$$

$$\mathscr{P}_d = \frac{(U_{12})^T[R_1]^T(V_1'') + (U_{21})^T[R_2]^T(V_2'')}{(U_{12})^T[R_1]^T[\tilde{M}_1]^{-1}[R_1](U_{12})+(U_{21})^T[R_2]^T[\tilde{M}_2]^{-1}[R_2](U_{21})}, \tag{28}$$

Să observăm că

$$(U_{21}) + [U_{21}](U_{12}) = 0 \tag{29}$$

și să detrminăm coeficientul de restituire al ciocnirii, aplicînd formula (26); rezultă

$$k = \frac{(U_{12})^T\{[A_{21}]^T[R_2]^T(V_2'') - [R_1]^T(V_1'')\}}{(U_{12})^T\{[R_1]^T(V_1') - [A_{21}]^T[R_2]^T(V_2')\}}. \tag{30}$$

Percuția interioată $\mathscr{P}$ se determină prin însumarea relațiilor (28):

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_c + \mathscr{P}_d = \tag{31}$$

$$= (1+k)\frac{(U_{12})^T\{[A_{21}]^T[R_2]^T(V_2')-[R_1]^T(V_1')\}}{(U_{12})^T\{[R_1]^T[\tilde{M}_1]^{-1}[R_1]+[A_{21}]^T[R_2]^T[\tilde{M}_2]^{-1}[R_2][A_{21}]\}(U_{12})}.$$

Mai departe, pornind de la relațiile (27), vom calcula vitezele duale la sfîrșitul ciocnirii

$$(V_1'') = (V_1') + \mathscr{P}[\tilde{M}_1]^{-1}[R_1](U_{12}), \tag{32}$$
$$(V_2'') = (V_2') - \mathscr{P}[\tilde{M}_2]^{-1}[R_2][A_{21}](U_{12}).$$

Energia cinetică a vitezelor pierdute,

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\delta(V_i)^T[\tilde{M}_i]\delta(V_i) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\{\delta(v_i)^T[m_i]\delta(v_i) + \delta(\omega_i)^T[J_i]\delta(\omega_i)\}, \tag{33}$$

are, în cazul ciocnirii celor două solide, următoarea expresie

$$E_p = \frac{(1+k)^2}{2}\frac{\{(V_2')^T[R_2][A_{21}](U_{12}) - (V_1')^T[R_1](U_{12})\}^2}{(U_{12})^T\{[R_1]^T[\tilde{M}_1]^{-1}[R_1]+[A_{21}]^T[R_2]^T[\tilde{M}_2]^{-1}[R_2][A_{21}]\}(U_{12})} =$$

$$= \frac{1}{2}P\{1/m_1+1/m_2+(u_{12})^T\{[r_1]^T[J_1]^{-1}[r_1]+[a_{21}]^T[r_2]^T[J_2]^{-1}[r_2][a_{21}]\}(u_{12})\}. \tag{34}$$

Relații asemănătoare pentru energia cinetică E_p au obținut C. Iacob [3], [4], R. Voinea [8] și N. Pandrea [11].

Dacă se calculează și pierderea de energie cinetică, pe durata ciocnirii, adică

$$\Delta E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\{(V_i')^T[\tilde{M}_i](V_i') - (V_i'')^T[\tilde{M}_i](V_i'')\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\{(v_i')^T[m_i](v_i')+(\omega_i')^T[J_i](\omega_i')-(v_i'')^T[m_i](v_i'')-(\omega_i'')^T[J_i](\omega_i'')\},$$

se obține relația

$$\Delta E = \frac{1-k}{1+k}E_p, \tag{36}$$

care generalizează teorema lui Carnot, cunoscută sub forma

$$\Delta E = E_p. \tag{37}$$

Relația generalizată (36), pentru cazul ciocnirii a două corpuri, a fost obținută, prin metode vectoriale, de C. Iacob [3], [4].

Expresiile obținute pentru energia cinetică a vitezelor pierdute și pierderea de energie cinetică verifică teorema energiei cinetice în cazul fenomenelor de ciocnire

$$\Delta E + E_p = \mathscr{P}(U_{12})^T\{[A_{21}]^T[R_2]^T(V_2')^T - [R_1]^T(V_1')\}. \tag{38}$$

4. CIOCNIREA NORMALĂ A n SFERE

Să considerăm un grup de n sfere care se ciocnesc în același interval de timp. Pentru a determina coeficientul de restituire dintre sferele T_s și T_{s+1} vom aplica relațiile (19) sub forma

$$\begin{aligned} m_i(w - v_i') &= \mathscr{P}^c_{i-1,i} - \mathscr{P}^c_{i,i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \\ m_k(w - v_k') &= \mathscr{P}^c_{k-1,k} - \mathscr{P}^c_{k,k+1} \qquad (k = s+1, \ldots, a) \end{aligned} \tag{39}$$

de unde rezultă

$$\mathscr{P}^c_{s,s+1}\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=s+1}^{n} m_i m_k(v_k' - v_k'). \tag{40}$$

De asemenea, relațiile (21) conduc la

$$\mathscr{P}^d_{s,s+1}\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=s+1}^{n} m_i m_k(v_k'' - v_i''). \tag{41}$$

Așadar, formula coeficientului de restituire, care se adaugă la relațiile (39), este următoarea

$$k_{s,s+1} = \frac{\mathscr{P}^d_{s,s+1}}{\mathscr{P}^c_{s,s+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=s+1}^{n} m_i m_k(v_k'' - v_i''}{\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=s+1}^{n} m_i m_k(v_i' - v_k')} \quad (s = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{42}$$

Primit la redacție la 18 februarie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. STAICU, *Introducere în mecanica teoretică*, Ed. Științifică și enciclopedică, București, 1983.
2. R. VOINEA, ȘT. STAICU, *Sur le choc du solide rigide soumis aux liaisons*, Rev. Roum. Sci. Techn.— Méc. Appl., **26**, 5 (1981).
3. C. IACOB, *Asupra generalizării teoremei lui Lazare Carnot în cazul ciocnirii a două solide rigide libere*, St. Cerc. Mec. Apl., **43**, 5 — 6 (1984).
4. C. IACOB, *Asupra axiomelor mecanicii șocurilor și a geenralizării teoremei lui Lazare Carnot* St. Cerc. Mec. Apl., **44**, 2 (1985).
5. D. MANGERON, N. IRIMICIUC, *Mecanica rigielor cu aplicații în inginerie*, Ed. Tehnică, București, 1978 (vol. I), 1980 (vol. II).
6. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
7. C. IACOB, *Mecanica teoretică*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1980.
8. R. VOINEA, *O expresie generală a energiei cinetice pierdute în cazul ciocnirii a două corpuri solide*, Sesiunea de comunicări științifice a Instit. Politehnic București, mai 1984.
9. ȘT. STAICU, *Expresii matriceale pentru viteze și accelerații în mișcarea compusă a sistemelor*, St. Cerc. Mec. Apl., **44**, 3 (1985).
10. ȘT. STAICU, *Forme matriceale pentru ecuațiile de mișcare a sistemelor*, Sesiunea de comunicări științifice a Instit. Politehnic București, mai 1984.
11. N. PANDREA, *Studiul general al ciocnirilor cu ajutorul vectorilor duali*, St. Cerc. Mec. Apl., **36**, 6 (1977).
12. J. WITTEMBURG, *Dynamics of systems of rigid bodies*, Stuttgart, 1977, Mir, Moskva, 1980.

SARCINILE AERODINAMICE PE ORGANELE AVIONULUI ÎN CAZUL MANEVRELOR LONGITUDINALE NELINIARE CU VARIAȚII MICI DE ALTITUDINE ȘI VITEZĂ. I*)

de I. ȚEPOSU

Institutul de Aviație, INCREST, București

Este elaborată o nouă teorie, neliniară, pentru calculul răspunsului la comenzi și al sarcinilor aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor longitudinale cu variații mici de altitudine și viteză. Cu o precizie suficient de bună, pot fi descrise manevre cu variații semnificative ale unghiului de incidență și ale altor parametri. Problema este rezolvată complet, dîndu-se și o aplicație numerică.

1. INTRODUCERE

Problema determinării răspunsului avionului la o comandă dată a flapsului, profundorului sau frînei aerodinamice și în special aceea a estimării sarcinilor aerodinamice extreme, maxime și minime, pe diferitele organe componente în cazul manevrelor simetrice, prezintă interes practic deosebit din punctul de vedere al dimensionării corecte a structurii de rezistență pentru avionul în cauză. De aceea, această problemă a fost abordată de mulți autori (vezi, de exemplu [1] — [4]) și au fost elaborate metode de calcul care, în cele mai multe situații, au dat soluții satisfăcătoare cerințelor practice.

Referitor la problema estimării sarcinilor critice pe organele componente ale avionului cel puțin trei aspecte trebuie privite, într-o primă etapă, separat. Primul este legat de integrarea sistemului de ecuații, exact sau aproximativ, care descrie mișcarea avionului. Cu alte cuvinte este vorba despre modul de aproximare a mișcării și metoda concretă de determinare a răspunsului. Al doilea aspect constă în definirea cazurilor critice de calcul, adică a combinațiilor de altitudini, viteze de zbor, factori de sarcină, precum și a celor mai critice comenzi admise pentru flaps, profundor sau frînă aerodinamică. Prin urmare, acest aspect ese legat de clasa avionului în cauză, de specificațiile sale și, în ultimă instanță, de regulamentul de calcul care a fost adoptat drept bază de proiectare. În al treilea rînd, estimarea sarcinilor critice depinde în mod esențial de precizia cu care sînt cunoscute caractristicile aerodinamice (polare, derivate), gravimetrice și inerțiale pentru avionul respectiv.

Pe de altă parte, între cele trei aspecte menționate mai sus există o strînsă interdependență de compatibilitate. În acest sens este suficient de semnalat faptul că o manevră violentă în cazul unui avion de luptă, la incidențe mari sau în regim transonic, nu poate fi descrisă corect prin aproximația liniară a sistemului de ecuații.

Determinarea răspunsului avionului la comenzi, în particular la comanda flapsului și profundorului, revine la rezolvarea problemei Cauchy

*) Bibliografia va fi dată în partea a doua

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 5, 1986, P. 454—484

pentru un sistem de ecuații diferențiale neliniare. Determinarea soluției exacte într-o anumită vecinătate a punctului inițial este posibilă numai prin integrare numerică, pe calculator. Acest mod de abordare are avantaje și dezavantaje care sînt cunoscute, de aceea nu vom insista asupra lor.

Liniarizarea ecuațiilor mișcării longitudinale a avionului se poate face în mai multe moduri, opțiunea fiind detrminată de scopul concret propus. Cea mai utilizată aproximație și cunoscută în literatura de specialitate, este cea a scurtei perioade. De aceea, în continuare vom prezenta pe scurt ipotezele care stau la baza acestei aproximații cu scopul de a scoate în evidență avantajele metodei propuse în lucrarea de față.

a) O primă ipoteză este aceea că manevra se execută la un număr Mach constant. Deoarece nu se ține seama nici de variația altitudinii, rezultă că și viteza de zbor a avionului este constantă în timpul manevrei. În continuare, ca o consecință a acestei ipoteze, se neglijează și variația derivatelor aerodinamice în raport cu viteza și altitudinea de zbor. Ipoteza a), cu consecințele sale, este acceptată parțial în prezenta lucrare. Din punct de vedere practic, această ipoteză poate fi acceptată pentru toate situațiile pentru care variațiile de altitudine și viteză în timpul manevrei sînt mesemnificative, în particular pentru situațiile cînd plecarea în manevră se face din zbor orizontal.

b) A doua ipoteză utilizată în aproximația scurtei perioade constă în neglijarea rezistenței la înaintare produsă de bracajul profundorului în timpul manevrei. Această ipoteză, la care se renunță în lucrarea de față, poate conduce la erori semnificative cel puțin în două situații : cînd bracajele ating valori mari, sau cînd distanța dintre axa longitudinală a avionului și punctul de aplicație al sarcinii aerodinamice pe profundor este mare. Un exemplu în acest sens este cazul ampenajelor în formă de T, soluție constructivă întîlnită frecvent în proiectarea avioanelor de transport.

c) A treia ipoteză presupune că în intervalul de timp dintre începutul manevrei și acela cînd pe ampenajul orizontal apare sarcina aerodinamică maximă, unghiul de pantă al traiectoriei nu se modifică semnificativ. O consecință a acestei ipoteze este neglijarea componentei forței gravitaționale pe direcția paralelă cu curentul neperturbat. Ipoteza c) cu consecințele sale poate fi acceptată în cazul unor manevre destul de particulare. Pentru manevrele cu variații mari ale factorului de sarcină în centrul de greutate al avionului această ipoteză este încălcată în mod brutal, iar cceptarea ei implică riscuri serioase în ceea ce privește corectitudinea oluției. Din acest motiv, în prezenta lucrare se renunță la ipoteza c).

d) A patra ipoteză se referă la neglijarea variației forței de tracțiune a motorului cu viteza și altitudinea. De regulă, în aproximația scurtei perioade se neglijează complet tracțiunea, însă această simplificare nu este esențială din punctul de vedere al reprezentării soluției problemei. Ipoteza d) este cceptatăă în această lucrare, fiind compatibilă cu a). Dacă variațiile de altitudine și viteză sînt mari, acceptarea ipotezei d) poate conduce la erori importante.

În afară de cele patru ipoteze menționate, aproximația scurtei perioade mai presupune și altele. Printre acestea remarcăm neglijarea efectelor nestaționare, în particular influența deformării structurii asupra derivatelor aerodinamice și faptul că prin bracajul profundorului nu se modifică poziția punctului de aplicație al sarcinii aerodinamice pe ampe-

najul orizontal. Această ultimă ipoteză nu este esențială din punctul de vedere al reprezentării soluției și se poate renunța la ea fără dificultate. De altfel, în cazul configurațiilor obișnuite se poate estima că erorile introduse pot fi neglijate chiar și în cazul unor evoluții complexe. Pe de altă parte, influența deformării structurii avionului sub acțiunea sarcinilor aerodinamice și inerțiale poate introduce erori mari. Această problemă de aeroelasticitate este suficient de complexă și nu vom insista asupra ei. Remarcăm doar faptul că acceptarea ipotezei avionului rigid este compatibilă cu acceptarea ipotezei a). De asemenea, se poate aprecia că în cazul configurațiilor de alungire mică sau moderată și suficient de rigide acceptarea acestei ipoteze conduce la aproximații rezonabile.

Cu observațiile anterioare privind ipotezele de lucru, scopul lucrării de față este determinarea răspunsului avionului la comanda profundorului, flapsului sau frînei aerodinamice și calculul sarcinilor aerodinamice de manevră pe principalele organe componente, o atenție deosebită fiind acordată ampenajului orizontal. Ideea de bază a lucrării este aceea de a descompune sarcinile aerodinamice pe fiecare din organele avionului cu considerarea interacțiunii aerodinamice reciproce. De asemenea, în dezvoltarea componentelor forțelor și momentelor pe axele de coordonate se reține și termenii de ordinul doi, în felul acesta renunțînu-se, cel puțin parțial, la ipoteza c). Procedînd astfel, ecuațiile mișcării longitudinale a avionului sînt aproximate printr-un sistem de trei ecuații diferențiale neliniare de o formă relativ particulară, Reprezentarea soluției problemei Cauchy se dă sub forma unui sistem de trei ecuații integrale. de asemenea neliniare. În cazul cînd se admite aproximația scurtei perioade, prin reprezentarea menționată se obține direct soluția, care este cunoscută. În caz contrar trebuie rezolvat sistemul de ecuații integrale, cea mai indicată metodă fiind cea a aproximațiilor succesive, considerînd drept primă aproximație soluția corespunzătoare scurtei perioade. Se demonstrează că procesul de aproximații succesive este convergent și se fac cîteva considerații privind integrarea numerică. De asemenea, în final, se prezintă și un exemplu de calcul.

2. NOTAȚII

2.1. SISTEMELE DE REFERINȚĂ

În lucrarea de față sînt utilizate două sisteme de referință. Ecuațiile de mișcare ale avionului sînt scrise în sistemul din figura 1, legat de avion, iar forțele aerodinamice sînt exprimate în sistemul de referință aerodinamic din figura 2. În figura 1 este prezentată legătura dintre sistemul de referință legate de avion și cel inerțial, legat de un reper fix de la sol, iar în figura 2 legătura dintre sistemul de referință legat de avion și cel aerodinamic.

Sensurile pozitive ale forțelor, momentelor, unghiurilor și bracajelor suprafețelor de comandă sînt explicitate în figurile 1 și 2. În legătură cu sistemul de referință aerodinamic (sau experimental conform [5]) remarcăm faptul că de obicei nu se lucrează cu componentele X_a, Y_a și Z_a ale forțelor șn acest sistem, ci cu L(portanța), Y(forța laterală) și D (rezistența la înaintare). Între aceste forțe există relațiile $L = -Z_a$ $Y = Y_a$ și $D = -X_a$.

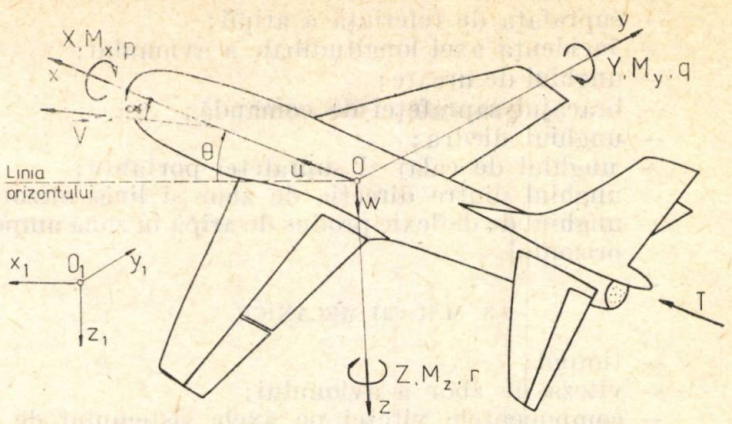


Fig. 1. — Sistemul de referinţă Oxyz legat de avion. Sensul pozitiv al forţelor şi momentelor. Forţe aerodinamice X şi Z ; Moment aerodinamic My; Componentele vitezei u şi w; $O_{1x_1y_1z}$ sistemul de referinţă inerţial

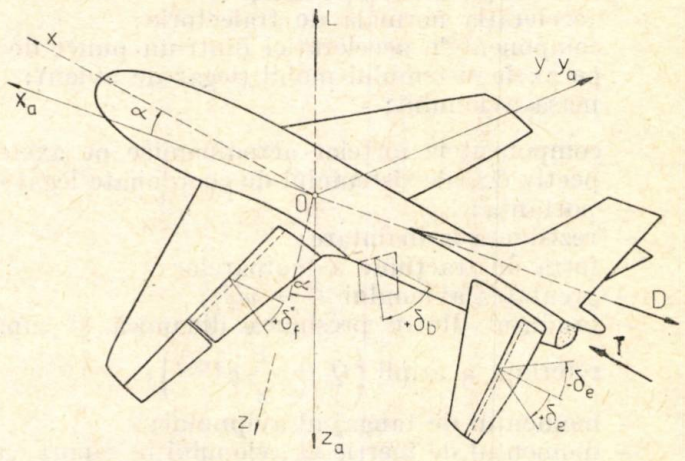


Fig. 2. — Sistemul de referinţă aerodinamic $Ox_ay_az_a$ Sensul pozitiv al bracajelor Forţe aerodinamice L şi D. Coeficienţi adimensionali C_L, C_D şi C_T

2.2. MĂRIMI GEOMETRICE

i, j, k — versorii axelor sistemului de coordonate *Oxyz* legate de avion;

$xi+yj+zk$ — vectorul de poziţie, faţă de centrul de greurate al avionului al sarcinii aerodinamice ce acţionează pe unul din organele sale;

d_{A0}[m] — braţul forţei aerodinamice care acţionează pe stabilizator;

$\bar{c}$[m] — coarda medie aerodinamică (de referinţă) a aripii;

H[m] — altitudinea de zbor a avionului;

$S[m^2]$ — suprafaţa de referinţă a aripii;
$\alpha[°, rad]$ — incidenţa axei longitudibale a avionului;
$\theta[°, rad]$ — unghiul de urcare;
$\delta[°, rad]$ — bracajul saprafeţei de comandă;
$\Gamma[°, rad]$ — unghiul diedru;
$\varkappa[°, rad]$ — unghiul de calaj al suprafeţei portante;
$\gamma[°, rad]$ — unghiul dintre direcţia de zbor şi linia orizontală;
$\varepsilon[°, rad]$ — unghiul de deflexie produs de aripă în zona ampenajului orizontal.

2.3. MĂRIMI MECANICE

$t[s]$ — timpul;
$V[m/s]$ — viteza de zbor a avionului;
$u, w[m/s]$ — componentele vitezei pe axele sistemului de coordonate legat de avion (din fig. 1);
$a[m/s]$ — viteza sunetului în curent neperturbat la altitudinea H;
$q[rad/s]$ — viteza de tangaj al avionului;
$\dot{q}[rad/s^2]$ — acceleraţia de tangaj;
$g[m/s^2]$ — acceleraţia gravitaţională;
$a_n(m/s^2]$ — acceleraţia normală de traiectorie;
a_x, a_y, a_z — componentele acceleraţiei dintr-un punct de pe avion pe axele sistemului mobil (legat de avion);
$m[kg]$ — masa avionului;
X, $Z[daN]$ — componentele forţelor aerodinamice pe axele Ox, respectiv Oz, ale sistemului de coordonate legat de avion;
$L[daN]$ — portanţa;
$D[daN]$ — rezistenţa la înaintare;
$T[daN]$ — forţa de tracţiune a motoarelor :
$G[daN]$ — greutatea avionului $G = mg$);
$Q[daN]$ — produsul dintre presiunea dinamică şi suprafaţa de referinţă a aripii $\left(Q = \frac{1}{2} qV^2S\right)$;
$My[daN_0m]$ — momentul de tangaj al avipnului;
$I_y[kgm^2]$ — momentul de inerţie al avionului în raport cu axa Oy;
$\rho[daNs^2/m^2]$ — densitatea aerului la altitudinea H.

2.4. COEFICIENŢI ADIMENSIONALI

C_L — coeficientul de portanţă $(= L/Q)$;
C_D — coeficientul de rezistenţă la înaintare $(= D/Q)$;
C_m — coeficientul momentului de tangaj $\left(C_m = \frac{My}{\bar{c}Q}\right)$;
$\bar{X}_{CG}$ — poziţia centrului de greutate al avionului adimensionalizată la $\bar{c}$ (măsurată de la bordul de atac al $\bar{c}$);
M — numărul Mach de zbor $(= V/a)x$
n_x, n_z — componentele factorului de suprasarcină pe axele Ox, respectiv $Oz(n_x = -a_x/g,\ \ n_z = -a_z/g)$;

n_{1x}, n_{1z} — componentele factorului total de sarcină pe axele Ox, respectiv Oz;
ε_α — panta unghiului de deflexie produs de aripă în zona ampenajului orizontal;
$d\alpha/d\delta$ — eficacitatea bracajului suprafeței de comandă;
Λ — alungirea suprafeței portante;
ζ — factor de corecție al presiunii dinamice datorită blocajului produs de aripă în zona ampenajului orizontal.

2.5. DERIVATE AERODINAMICE

$C_{L\alpha}$ — panta portanței în raport cu incidența;
$C_{L\dot{\alpha}}$ — panta portanței în raport cu variația incidenței;
C_{Lq} — panta portanței în raport cu viteza de tangaj;
$C_{L\delta}$ — panta portanței în raport cu bracajul suprafeței de comandă;
$C_{m\alpha}$ — panta momentului de tangaj în raport cu incidența;
$C_{m\dot{\alpha}}$ — panta momentului de tangaj în raport cu variația incidenței;
C_{mq} — panta momentului de tangaj în raport cu viteza de tangaj;
$C_{m\delta}$ — panta mpmentului de tangaj în raport cu bracajul suprafeței de comandă.

2.6. SUFIXE ȘI ALTE NOTAȚII

$A = (a_{ij})$ — matricea coeficienților de influență a părții liniare din sistemul ecuațiilor de mișcare a avionului;
B — vector ce conține partea neliniară a sistemului de ecuații;
$\Phi = (\varphi_{ij})$ — matricea fundamentală a sistemului omogen care la momentul inițial coincide cu matricea unitate;
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare sistemului omogen;
A — se referă la aripă;
F — se referă la fuzelaj;
AF — se referă la combinația aripă-fuzelaj;
AO — se referă la ampenajul orizontal;
b — se referă la frîna aerodinamică;
t — se referă la stabilizator;
$f\varepsilon$ — se referă la flaps;
e — se referă la profundor;
T — se referă la tracțiunea motoarelor;
X_0 — mărimea X este calculată la momentul inițial t_0;
$\dot{X}$ — se referă la mărimea X derivată în raport cu timpul t;
X_* — mărimea X este calculată la portanță nulă;
ΔX — se referă la abaterea mărimii X față de valoarea la momentul inițial,

$$\Delta X = X(t) - X(t_0);$$

Observație. Restul de notații folosite în lucrare sînt definite în locul unde apar.

3. APROXIMAREA FORȚELOR ȘI MOMENTELOR

3.1. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Vom studia mișcarea în sistemul de referință $Oxyz$ (vezi fig. 1) legat de avion. Utilizînd notațiile din capitolul al 2-lea, ecuațiile de mișcare ale avionului în cazul manevrelor longitudinale sînt (vezi [6])

$$\begin{aligned} X - mg\sin\theta &= m(\dot{u} + qw), \\ Z + mg\cos\theta &= m(\dot{w} - qu), \\ My &= I_y \cdot \dot{q}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

unde au fost neglijate efectele datorate rotației pămîntului. Funcțiile necunoscute din sistemul (3.1) sînt u, w și q, iar variabila independentă timpul t. În locul lui u și w vom introduce funcțiile necunoscute V și α prin intermediul relațiilor

$$u = V\cos\alpha, \qquad w = V\sin\alpha. \tag{3.2}$$

Cu această schimbare, funcțiile necunoscute vor fi α, q și V. De asemenea, funcția necunoscută $\theta(t)$ se determină prin intermediul lui q din relația

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} q(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.3}$$

t_0 fiind momentul cînd începe manevra, iar θ_0 valoarea lui θ la momentul inițial. Mai remarcăm faptul că, în conformitate cu scopul ce ni l-am propus în lucrare nu ne preocupăm de distanțele parcurse de avion în planul vertical, cu alte cuvinte de mărimile x_1 și z_1 legate de sistemul de referință fix (de exemplu un punct de la sol). Pe de altă parte, această problemă se poate rezolva fără dificultate de îndată ce se determină α, q și V.

Dacă ținem seama de a3.2) și (3.3), sistemul (3.1) devine

$$\begin{aligned} X - mg\sin\theta &= m[\dot{V}\cos\alpha + (q - \dot{\alpha})\,V\sin\alpha], \\ Z + mg\cos\theta &= m[\dot{V}\sin\alpha + (\dot{\alpha} - q)\,V\cos\alpha], \\ M_y &= I_y\dot{q}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

În continuare ne propunem să aproximăm componentele forțelor și momentelor aerodinamice și să rezolvăm problema Cauchy pentru sistemul (3.4) în cazul cînd comenzile profundorului, flapsului sau frînei aerodinamice, precum și forța de tracțiune a motoarelor sînt funcții cunoscute

de timp. Pe această cale vom obține răspunsul avionului la comenzile menționate și vor putea fi calculate forțele de manevră pe componentele sale.

3.2. DESCOMPUNEREA FORȚELOR ȘI MOMENTELOR AERODINAMICE

Alegem axa Ox astfel încît să coincidă cu axa longitudinală a avionului, iar forțele și momentele aerodinamice le descompunem în următoarele componente (vezi fig. 3) :

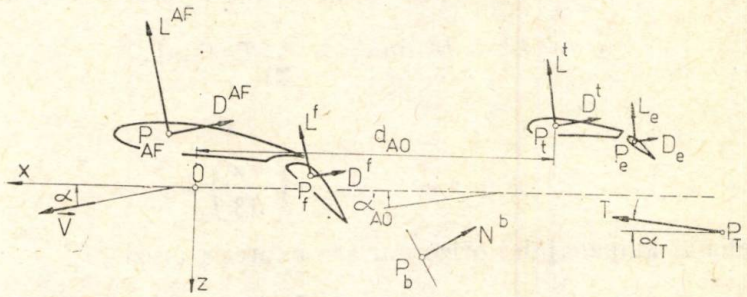


Fig. 3. — Descompunerea forțelor aerodinamice pe elementele avionului. Manevre longitudinale.

— portanța și rezistența la înaintare a combinației aripă-fuzejaj L^{AF} și D^{AF}, cu punctul de aplicație în $P_A(x^A, 0, z^A)$. Flapsul este în poziție neutră, $\delta_f = 0°$. De asemenea, în afară de momentul produs de forțele menționate, combinația aripă-fuzelaj mai conține momentul liber M_{y*}^{AF} care provine din momentul la portanță nulă al aripii și din momentul liber al fuzelajului;

— portanța și rezistența produsă de flaps în interacțiune cu aripa, cînd bracajul simetric este δ_f. Le notăm cu L^f, respectiv D^f și au punctul de aplicație $P_f\ (x^f, 0, z^f)$;

— forța aerodinamică normală produsă de frînele aerodinamice cînd bracajul acestora este $\delta_i^b (i = 1, 2, \ldots, m)$. Notăm această forță cu N_i^b și are punctul de aplicație $P_b^i(x_i^b, y_i^b, z_i^b)$. Presupunem că cele m frîne aerodinamice lucrează astfel încît produc numai moment de tangaj;

— portanța și rezistența la înaintare a ampenajului orizontal, în interacțiune cu aripa și fuzelajul, datorate efectului incidenței și vitezei de tangaj. Le notăm cu L^t, respectiv D^t și au punctul de aplicație în $P_t(x^t, 0, z^t)$. Profundorul este în poziția neutră, $\delta_e = 0°$.

— portanța și rezistența la înaintare datorate bracajului simetric δ_e al profundorului. Notăm aceste foțe cu L^e și D^e, avînd punctul de aplicație în $P_e(x^e, 0, z^e)$;

— forța $T_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ de tracțiune a motorului i, care face unghiul α_i^T cu axa Ox și are punctul de aplicație în punctul $P_T^i(x_i^T, y_i^T, z_i^T)$. Presupunem că cele n motoare funcționează astfel încît nu produc momente de ruliu sau girație.

3.3. APROXIMAREA COMPONENTELOR X, Z ȘI M_y

Cu descompunerea din paragraful 3.2 a forțelor și momentelor aerodinamice, componentele în lungul axelor de coordonate au expresiile (vezi și fig. 3),

$$X = (L^{AF} + L^f)\sin\alpha + (L^t + L^e)\sin\alpha'_{A0} - (D^{AF} + D^f)\cos\alpha -$$

$$- (D^t + D^e)\cos\alpha'_{AO} + \sum_{i=1}^{n} T_i \cos\alpha_i^T - \sum_{i=1}^{m} N_i^b \sin\delta_i^b, \tag{3.5a}$$

$$Z = -(L^{AF} + L^f)\cos\alpha - (L^t + L^e)\cos\alpha_{A0} - (D^{AF} + D^f)\sin\alpha -$$

$$- (D^t + D^e \sin\alpha'_{AO} - \sum_{i=1}^{n} T_i \sin\alpha_i^T, \tag{3.5.b}$$

unde

$$\alpha'_{A0} = \alpha_{AO} - x_{AO} - \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\delta}\right)_e \delta_e, \tag{3.6}$$

iar incidența ampenajului orizontal are expresia (vezi [5])

$$\alpha_{AO} = (1 - \varepsilon_\alpha)\,\alpha + (q + \dot{\alpha}\varepsilon_\alpha)\frac{d_{AO}}{V} + \chi_{AO} + \left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\delta}\right)_e \delta_e, \tag{3.7}$$

În (3.5b) s-au neglijat componentele pe axa Oz ale forțelor datorate bracajului celor n frîne aerodinamice.

Momentul de tangaj, față de centrul de greutate al avionului, are expresia

$$M_y = M_{y*}^{AF} + (z^A L^{AF} + z^f L^f + x^A D^{AF} + x^f D^f)\sin\alpha + (x^A L^{AF} + x^f L^f -$$

$$- z^A D^{AF} - z^f D^f)\cos\alpha + (z^t L^t + z^e L^e + x^t D^t + x^e D^e)\sin\alpha'_{AO} +$$

$$+ (x^t L^t + x^e L^e - z^t D^t - z^e D^e)\cos\alpha'_{AO} + \sum_{i=1}^{n} T_i(z_i^T \cos\alpha_i^T + x_i^T \sin\alpha_i^T) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} N_i^b(x_i^b \cos\delta_i^b - z_i^b \sin\delta_i^b). \tag{3.5c}$$

Mărimile x^A, z^A, x^f, ... sînt definite prin intermediul figurii 3 și reprezintă proiecțiile vectorilor de poziție pe axele sistemului de coordonate pentru fiecare din forțele care acționează pe organele avionului în conformitate cu descompunerea din paragraful 3.2.

În relațiile (3.5) vom nelgija variația cu numărul Mach, în timpul manevrei, a mărimilor care depind de acest parametru. De asemenea, admitem ipoteza că incidențele α sînt moderate, în sensul că vom accepta aproximațiile $\sin\alpha = \alpha$ și $\cos\alpha = 1$. Pentru $\alpha = 16°$, care poate fi considerată incidență mare, eroarea pe care o facem prin prima aproximație este de ordinul $+1\%$, iar prin cea de a doua de ordinul a $+3\%$. Ca o consecință a acestei ipoteze rezultă că și unghiul α'_{AO} este moderat, astfel că vom putea accepta și aproximațiile $\sin\alpha'_{AO} = \alpha'_{AO}$ respectiv $\cos\alpha'_{AO} = 1$.

Prin urmare, componentele din (3.5) ale forțelor și momentului de tangaj devin

$$X = \alpha(L^{AF} + L^f) + \alpha'_{A0}(L^t + L^e) - (D^{AF} + D^f) - (D^t + D^e) + \\ + \sum_{i=1}^{n} T_i \cos\alpha_i^T - \sum_{i=1}^{m} N_i^b \sin\delta_i^b, \tag{3.8a}$$

$$Z = -(L^{AF} + L^f) - (L^t + L^e) - \sum_{i=1}^{n} T_i \sin\alpha_i^T, \tag{3.8b}$$

$$M_y = M_{y*}^{AF} + x^A L^{AF} + x^f L^f + x^t L^t + x^e L^e - z^A D^{AF} - z^f D^f - \\ - z^t D^t - z^e D^e + \alpha(z^A L^{AF} + z^f L^f) + \alpha'_{A0}(z^t L^t + z^e L^e) + \\ + \sum_{i=1}^{n} T_i(z_i^T \cos\alpha_i^T + x_i^T \sin\alpha_i^T) + \sum_{i=1}^{m} N_i^b(x_i^b \operatorname{cod}\delta_i^b - z_i^b \sin\delta_i^b). \tag{3.8c}$$

În expresia (3.8.*b*) s-au neglijat termenii αD^{AF}, αD^f, $\alpha'_{A0}D^t$ și $\alpha'_{A0}D^e$ iar în (3.8 *c*) termenii $\alpha x^A D^{AF}$, $\alpha x^f D^f$ și $\alpha'_{A0}x^t D^t$, $\alpha'_{A0}x^e D^e$. Pentru configurațiile obișnuite, erorile introduse prin acese aproximații sînt neglijabile. De exemplu, pentru o configurație de alungire $\Lambda = 3, 5$, pentru care $C_{L\alpha}^{AF} = 3{,}5$, eroarea introdusă prin neglijarea termenului αD^{AF} este de ordinul lui $\alpha^2\pi$. Dacă considerăm $\alpha = 15°$, această eroare este de aproximativ -2. Mai remarcăm faptul că erorile induse de ipoteza „incidențelor moderate" și cele produse prin neglijarea termenilor de mai sus sînt de semne contrare și practic se anulează reciproc în (3.8b), respectiv (3.8*c*).

3.4. ADIMENSIONALIZAREA FORȚELOR AERODINAMICE

Pentru explicitarea forțelor și momentelor aerodinamice din (3.8) vom folosi coeficienții adimensionali definiți prin

$$\begin{aligned} L^{AF} + L^f &= Q(C_L^{AF} + C_L^f), & D^{AF} + D^f &= Q(C_D^{AF} + C_D^f), \\ L^t + L^e &= \zeta Q(C_L^t + C_L^e), & D^t + D^e &= \zeta Q(C_D^t + C_D^e), \\ M_{y*}^{AF} &= Q\bar{c}C_{m*}^{AF}, & T_i &= QC_i^T, \quad N_i^b = QC_{Ni}^b, \end{aligned} \tag{3.9}$$

unde

$$Q = \frac{1}{2}\rho V^2 S \tag{3.10}$$

și reprezintă produsul dintre presiunea dinamică a curentului neperturbat la viteza V și altitudinea H și suprafața de referință a aripii. Deoarece variațiile de altitudine și viteză sînt mici pe durata manevrei, admitem Q = constant.

Pentru coeficienții de rezistență la înaintare vom folosi aproximațiile (vezi [5])

$$C_D^{AF} + C_D^f = C_{D*}^{AF} + K_{AF}(C_L^{AF} + C_L^f)^2, \quad C_D^t + C_D^e = C_{D*}^{AO} + K_{AO}(C_L^t + C_L^e)^2, \tag{3.11}$$

unde parametrii K_{AF} respectiv K_{AO} au expresiile

$$K_{AF} = \frac{1}{\pi\Lambda_A}, \quad K_{AO} = \frac{S}{S_{AO}} \cdot \frac{1}{\pi\Lambda_{AO}}, \tag{3.12}$$

iar C_{D*}^{AF} și C_{D*}^{AO} sînt coeficienții de rezistență la portanță nulă ai combinației aripă fuzelaj, respectiv ampenajului orizontal.

Presupunem că la momentul inițial t^0 parametrii de stare ai avionului sînt $\alpha = \alpha^0$, $q = q_0$, $\delta_f = \delta_f^0$, $\delta_e = \delta_e^0$, $\delta_b = \delta_b^0$. Fie

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0, \ \Delta q = q - q_0, \ \Delta\delta_e = \delta_e - \delta_e^0, \ \Delta\delta_f = \delta_f - \delta_f^0,$$

$$\Delta\delta_b = \delta_b - \delta_b^0. \tag{3.13}$$

Deoarece admitem că în timpul manevrei altitudinea H și viteza V rămîn constante, rezultă că derivatele aerodinamice nu depind de numărul Mach și vom face aproximațiile

$$C_L^{AF} + C_L^f = C_{L_0}^{AF} + C_{L_0}^f + \Delta\alpha C_{L\alpha}^{AF} + \Delta q C_{Lq}^{AF} + \Delta\dot{\alpha} C_{L\dot{\alpha}}^{AF} + C_{L\delta}^f \Delta\delta_f,$$

$$C_L^t + C_L^e = C_{L_0}^t + C_{L_0}^e + \Delta\alpha C_{L\alpha}^t + \Delta q C_{Lq}^t + \Delta\dot{\alpha} C_{L\dot{\alpha}}^t + C_{L\delta}^e \Delta\delta_e, \tag{3.14}$$

unde mărimile cu indice zero se referă la momentul inițial t^0. În plus, avem relațiile (vezi [5])

$$C_{L\dot{\alpha}}^{AF} = \bar{c}(\bar{X}_{ac} - \bar{X}_{cG})\, C_{L\alpha}^{AF}/V, \ C_{Lq}^{AF} = d_R^{AF} C_{L\alpha}^{AF}/V,$$

$$C_{L\alpha}^t = (1 - \varepsilon_\alpha)\, C_{L\alpha}^{AO} S_{AO}/S, \ C_{Lq}^t = \frac{d_R^{AO}}{V} C_{L\alpha}^{AO} \frac{S_{AO}}{S},$$

$$C_{L\dot{\alpha}}^t = \varepsilon_\alpha \frac{d_{AO}}{V} C_{L\alpha}^{AO} \frac{S_{AO}}{S}, \ C_{L\delta}^f = \left(\frac{d\alpha}{d\delta}\right)_f C_{L\alpha}^A \frac{S_f}{S}, \tag{3.15}$$

$$C_{L\delta}^e = \left(\frac{d\alpha}{d\delta}\right)_e C_L^{AO} \frac{S_e}{S},$$

unde $C_{L\alpha}^{AF}$ este panta curbei de portanță a aripii în interacțiune cu fuzelajul, $C_{L\alpha}^{AO}$ panta curbei de portanță a ampenajului orizontal raportată la suprafața sa de referință S_{AO}, S_f porțiunea din suprafața aripii afectată de flaps, iar S_e sporțiunea din uprafața ampenajului orzontal afectată de profundor. De asemenea,

$$d_R^{AF} = \bar{c}(d_{xR} + 0{,}25 - \bar{X}_{cG}), \ d_R^{AO} = d_{AO} + d_{xR}\bar{c}_{AO}, \tag{3.16}$$

considerînd pentru d_{xR} valoarea dată de teorema lui Pistolesi (vezi [5])

$$d_{xR} = 0{,}5 \tag{3.17}$$

Avînd în vedere variațiile mici de altitudine și viteză, rezultă că plecarea în manevră nu poate fi făcută din orice situație de zbor, ci numai din acelea apropiate de zborul orizontal rectiliniu și uniform. Este evi-

dent, spre exemplu, că plecarea în manevră dintr-un picaj la verticală implică variații importante de altitudine și viteză, iar teoria expusă în prezenta lucrare nu este adecvată pentru descrierea unei astfel de manevre. De aceea, în continuare ne vom determina condițiile inițiale care caracterizează zborul orizontal neaccelerat.

3.5. PARAMETRII DE ECHILIBRU ÎN ZBORUL ORIZONTAL

Presupunem că la momentul inițial t^0 avionul se găsește în zbor orizontal, rectiliniu și uniform. Flapsul și frînele aerodinamice sînt în poziție neutră. De asemenea, viteza și accelerația de tangaj sînt nule, $q_0 = \dot{q}_0 = 0$.

Pentru determinarea incidenței de echilibru și al bracajului de profundor corespunzător, vom utiliza expresiile (3.8) ale componentei Z și momentului M_y. În plus, vom considera numai părțile liniare ale componentelor respective. Această aproximație poate fi acceptată deoarece incidența α^0 de echilibru este mică în raport cu cea din timpul manevrei. Notînd cu C_L coeficientul de portanță al avionului și cu C_m pe cel al momentului de tangaj, ecuațiile de echilibru față de centrul de greutate se aproximează prin

$$C_{L\alpha}(\alpha - \alpha_*) + C^e_{L\delta}\cdot\delta_e = \frac{G}{Q} - \sum_{i=1}^{n} C_i^T \sin\alpha_i^T,$$

$$C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_*) + C^e_{m\delta}\cdot\delta_e = -C_{m*} - \frac{1}{\bar{c}}\sum_{i=1}^{n} C_i^T(z_i^T\cos\alpha_i^T + x_i^T\sin\alpha_i^T), \tag{3.18}$$

unde α_* este unghiul de portanță nulă al avionului cu profundorul în poziția neutră.

Rezolvînd sistemul liniar (3.18) se determină parametrii de echilibru α_0 și δ_e^0. Prin urmare, la plecarea în manevră din zborul orizontal neaccelerat condițiile inițiale ale mișcării sînt:

$$\begin{aligned} &\alpha = \alpha_0,\ q = 0,\ \delta_e = \delta_e^0,\ \delta_f = 0\ \ \delta_i^b = 0\ \ (i = 1, 2, \ldots, m),\\ &C^{AF}_{L_0} = C^{AF}_{L\alpha}(\alpha - \alpha^*),\ C^t_{L_0} = C^{AO}_{L*}(\alpha - \alpha_*),\\ &C^f_{L_0} = 0,\ C^e_{L_0} = C^e_{L\delta}\delta\cdot\delta_e^0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.6. EXPLICITAREA COMPONENTELOR X, Z ȘI M_y

Pentru explicitarea componentelor X, Z și M_y vom utiliza relațiile (3.18) și (3.14). În dezvoltările respective vor fi reținuți termenii de ordinul întîi și doi, cei de ordin superior diind neglijați.

Dacă introducem notațiile

$$C^{Af}_{L_0} = C^{AF}_{L_0} + C^f_{L_0},\ C^{AO}_{L_0} = C^t_{L_0} + C^e_{L_0},$$

$$\varepsilon_0 = \alpha_0(1 - \varepsilon_\alpha) + q_0 d_{A0}/V \tag{3.20}$$

și ținem seama de 3.11) și 3.14), atunci din (3.8a) rezultă pentru componenta X expresia

$$\frac{X}{Q} = \sum_{i=1}^{n} C_i^T \cos\alpha_i^T + \alpha_0 C_{L_0}^{Af} + \zeta\varepsilon_0 C_{L_0}^{AO} - C_{D*}^{AF} - \zeta C_{L*}^{AO} - k_{AP}(C_{L_0}^{Af})^2 -$$

$$-\zeta K_{AO}(C_{L_0}^{AO})^2 + C_{L\delta}^{f}(\alpha_0 - 2K_{AF}C_{L_0}^{Af})\,\Delta\delta_f + \zeta C_{L\delta}^{e}(\varepsilon_0 - 2K_{AO}C_{L_0}^{AO})\,\Delta\delta_e -$$

$$- K_{AF}(C_{L\delta}^{f})(\Delta\delta_f)^2 - \zeta K_{AF}(C_{L\delta}^{e})^2(\Delta\delta_e)^2 - \sum_{i=1}^{m} C_{Ni}^{b}\sin\delta_i^b + \Delta\dot{\alpha}\,[C_{L\dot{\alpha}}^{AF}(\alpha_0 -$$

$$- 2K_{AF}(C_{L_0}^{Af}) + \zeta C_{L\dot{\alpha}}^{t}(\varepsilon_0 - 2K_{AO}C_{L_0}^{AO}) + \zeta\varepsilon_\alpha C_{L_0}^{AO}\frac{d_{AO}}{V} + \zeta C_{L\delta}^{e}\left(\varepsilon_\alpha\frac{d_{AO}}{V} -\right.$$

$$\left. - 2K_{AO}C_{L\dot{\alpha}}^{t}\right)\Delta\delta_e - 2K_{AF}C_{L\dot{\alpha}}^{AF}C_{L\delta}^{f}\Delta\delta_f] + \Delta\alpha[C_{L_0}^{Af} + \zeta(1-\varepsilon_\alpha)\,C_{L_0}^{AO} +$$

$$+ C_{L\alpha}^{AF}(\alpha_0 - 2K_{AF}C_{L_0}^{Af}) + \zeta C_{L\alpha}^{t}(\varepsilon^0 - 2K_{AO}C_{L_0}^{AO}) + C_{LD}^{f}(1 - 2K_{AF}C_{L\alpha}^{AF})\Delta\delta_f +$$

$$+ \zeta C_{L\delta}^{e}(1 - \varepsilon_\alpha - 2K_{AO}C_{L\alpha}^{t})\,\Delta\delta]_e + \Delta q\left[C_{Lq}^{AF}(\alpha^0 - 2K_{AF}C_{L_0}^{Af}) +\right.$$

$$+ \zeta C_{Lq}^{t}(\varepsilon^0 - 2K_{AO}C_{L_0}^{AO}) + \frac{d_{AO}}{V}C_{L_0}^{AO} - 2K_{AF}C_{Lq}^{AF}C_{L\delta}^{f}\Delta\delta_f +$$

$$\left. + \zeta C_{L\delta}^{e}\left(\frac{d_{AO}}{V} - 2K_{AO}C_{Lq}^{t}\right)\Delta\delta_e\right] + (\Delta\alpha)^2[C_{L\alpha}^{AF}(1 - K_{AF}C_{L\alpha}^{AF}) +$$

$$+ \zeta C_{L\alpha}^{t}(1 - \varepsilon_\alpha - K_{AO}C_{L\alpha}^{t})] + (\Delta q)^2\left[\zeta\frac{d_{AO}}{V}C_{Lq}^{t} - K_{AF}(C_{Lq}^{AF})^2 -\right.$$

$$\left. - \zeta K_{AO}(C_{Lq}^{t})^2\right] + \Delta\alpha\Delta q\left[C_{Lq}^{AF}(1 - 2K_{AF}C_{L\alpha}^{AF}) + \zeta C_{Lq}^{t}(1 - \varepsilon_\alpha - 2K_{AO}C_{L\alpha}^{t}) +\right.$$

$$\left. + \zeta\frac{d_{AO}}{V}C_{L\alpha}^{t}\right] + \Delta\alpha\Delta\dot{\alpha}\left[C_{L\dot{\alpha}}^{AF}(1 - 2K_{AF}C_{L\alpha}^{AF}) + \zeta C_{L\dot{\alpha}}^{t}(1 - \varepsilon_\alpha - 2K_{AO}C_{L\alpha}^{t}) +\right.$$

$$\left. + \zeta\varepsilon_\alpha\frac{d_{AO}}{V}C_{L\alpha}^{t}\right] + \Delta q\Delta\dot{\alpha}\left[\zeta\frac{d_{AO}}{V}(C_{L\dot{\alpha}}^{t} + \varepsilon_\alpha C_{L\alpha}^{t}) - 2K_{AF}C_{Lq}^{AF}C_{L\dot{\alpha}}^{AF} -\right.$$

$$\left. - 2\zeta K_{AO}C_{Lq}^{t}C_{L\dot{\alpha}}^{t}\right] + (\Delta\dot{\alpha})^2[\zeta C_{L\dot{\alpha}}^{t}(\varepsilon_\alpha d_{AO}/V - K_{AP}C_{L\dot{\alpha}}^{t}) - K_{AF}(C_{L\dot{\alpha}}^{AF})^2]. \tag{3.21a}$$

Pentru explicitarea componentei Z vom folosi expresiile (3.14) și relația (3.8b) în care s-a neglijat (conf. §3.3) componenta pe axa Oz a rezistenței la înaintare. Eroarea introdusă prin această aproximație este efectiv neglijabilă. De exemplu, pentru o configurație de alungire $\Lambda = 5$,

pentru care $C_L = 0{,}5$ și $\alpha = 8°$ eroarea este sub 0,5 %. Prin urmare, pentru componenta Z este valabilă aproximația

$$-\frac{Z}{Q} = \sum_{i=1}^{n} C_i^T \sin\alpha_i^T + C_{L_0}^{Af} + \zeta C_{L_0}^{AO} + C_{L\delta}^{f}\delta\Delta\delta_f + \zeta C_{L\delta}^{e}\Delta\delta_e +$$

$$+ \Delta\dot{\alpha}(C_{L\dot{\alpha}}^{AF} + \zeta C_{L\dot{\alpha}}^{t}) + \Delta\alpha(C_{L\alpha}^{AF} + \zeta C_{L\alpha}^{t}) + \Delta q(C_{Lq}^{AF} + \zeta C_{Lq}^{t}). \quad (3.21)$$

În vederea aproximării momentului de tangaj folosim, în continuare ipotezele deja acceptate. Astfel, din (3.8*c*), (3.11) și (3.14) rezultă expresia

$$\frac{M_y}{\bar{c}Q} = \frac{1}{\bar{c}}\sum_{i=1}^{n} C_i^T(z_i^T\cos\alpha_i^T + x_i^T\sin\alpha_i^T) + (C_{m*}^{AF})_0 + C_{L_0}^{Af}(x^A + \alpha_0 z^A) +$$

$$+ \zeta\frac{C_{L_0}^{AO}}{\bar{c}}(x^t + \varepsilon_0 z^t) - \frac{z^A}{\bar{c}}[C_{D*}^{AF} + K_{AF}(C_{L_0}^{Af})^2] - \zeta\frac{z^t}{\bar{c}}[C_{D*}^{AO} + K_{AO}(C_{L_0}^{AO})^2] +$$

$$+ \frac{1}{\bar{c}}\sum_{i=1}^{m} C_{Ni}^b(x_i^b\cos\delta_i^b - z_i^b\sin\delta_i^b) + \frac{C_{L\delta}^{f}}{\bar{c}}(x^f + \alpha^0 z^f - 2K_{AF}z^A C_{L_0}^{Af})\Delta\delta_f +$$

$$+ \zeta\frac{C_{L\delta}^{e}}{\bar{c}}(x^e + \varepsilon_0 z^e - 2K_{AO}z^t C_{L_0}^{AO})\Delta\delta_e - K_{AF}\frac{z^f}{\bar{c}}(C_{L\delta}^{f})^2(\Delta\delta_f)^2 -$$

$$- \zeta K_{AO}\frac{z^e}{\bar{c}}(C_{L\delta}^{e})^2(\Delta\delta_e)^2 + \Delta\dot{\alpha}\left[\frac{C_{L\dot{\alpha}}^{AF}}{\bar{c}}(x^A + \alpha_0 z^A - 2K_{AF}z^A C_{L_0}^{Af}) +\right.$$

$$+ \zeta\frac{C_{L\dot{\alpha}}^{t}}{\bar{c}}\left(x^t + \varepsilon_0 z^t - 2K_{AO}z_t C_{L_0}^{AO} + q_0\varepsilon_\alpha z^t\frac{d_{AO}}{V}\right) + \zeta\varepsilon_\alpha\frac{z^t}{\bar{c}}\frac{d_{AO}}{V}C_{L_0}^{AO} +$$

$$\left. + \zeta C_{L\delta}^{e}\frac{z^e}{\bar{c}}\left(\alpha_\alpha\frac{d_{AO}}{V} - 2K_{AO}C_{L\dot{\alpha}}^{t}\right)\Delta\delta - 2K_{AF}\frac{z^f}{\bar{c}}C_{L\dot{\alpha}}^{AF}C_{L\delta}^{f}\Delta\delta_f\right] +$$

$$+ \Delta\dot{\alpha}\left[C_{m\alpha}^{F} + \frac{C_{L\alpha}^{AF}}{\bar{c}}(x^B + \alpha_0 z^A - 2K_{AF}z^A C_{L_0}^{Af}) + \zeta\frac{C_{L\alpha}^{t}}{\bar{c}}(x^t + \varepsilon_0 z^t -\right.$$

$$\left. - 2K_{AO}z^t C_{L_0}^{AO}) + \frac{1}{\bar{c}}(z^A C_{L_0}^{Af} + \zeta z^t C_{L_0}^{AO}) + \frac{C_{L\delta}^{f}}{\bar{c}}(z^f - 2K_{AF}z^A C_{L\alpha}^{AF})\Delta\delta_f +\right.$$

$$\left. + \zeta\frac{C_{L\delta}^{e}}{\bar{c}}(z^e - 2K_{AO}z^t C_{L\alpha}^{t})\Delta\delta_e\right] + \Delta q\left[\frac{C_{Lq}^{AF}}{\bar{c}}(x^A + \alpha^0 z^A - 2K_{AF}z^A C_{L_0}^{Af}) +\right.$$

$$\left. + \zeta\frac{C_{Lq}}{\bar{c}}(x^t + \varepsilon_0 z^t - 2K_{AF}z^t C_{L_0}^{AO}) + \zeta\frac{z^t}{\bar{c}}C_{L_0}^{AO}\frac{d_{AO}}{V} + \zeta\frac{z^t}{\bar{c}}C_{L\delta}^{e}\left(\frac{d_{AO}}{V} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - 2K_{AF}C_{Lq}^{t}\right)\Delta\delta_e - 2K_{AF}\frac{z^A}{\bar{c}}C_{Lq}^{AF}C_{L\delta}^{f}\Delta\delta_f\right] + (\Delta\alpha)^2\left[\frac{z^A}{\bar{c}}C_{L\alpha}^{AF}(1 - K_{AF}C_{L\alpha}^{AF}) +\right.$$

$$+\zeta\frac{z^t}{\bar{c}}C^t_{L\alpha}(1-\varepsilon_\alpha-K_{AO}C^t_{L\alpha})\Big]+(\Delta q)^2\Big[\zeta\frac{z^t}{\bar{c}}C^t_{Lq}\Big(\frac{d_{AO}}{V}-K_{AO}C^t_{Lq}\Big)-$$

$$-K_{AF}\frac{z^A}{\bar{c}}(C^{AF}_{Lq})^2\Big]+(\Delta\dot{\alpha})^2\Big[\zeta\frac{z^t}{\bar{c}}C^t_{L\dot{\alpha}}\Big(\varepsilon_\alpha\frac{d_{AO}}{V}-K_{AO}C^t_{L\dot{\alpha}}\Big)-$$

$$-K_{AF}\frac{z^A}{\bar{c}}(C^{AF}_{L\dot{\alpha}})^2\Big]+\Delta\alpha\Delta q\Big[\frac{z^A}{\bar{c}}C^{AF}_{Lq}(1-2K_{AF}C^{AF}_{Lq})+\zeta\frac{z^t}{\bar{c}}C^t_{Lq}(1-\varepsilon_\alpha-$$

$$-2K_{AO}C^t_{L\alpha})+\zeta\frac{z^t}{\bar{c}}\frac{d_{AO}}{V}C^t_{L\alpha}\Big]+\Delta\alpha\Delta\dot{\alpha}\Big[\frac{z^A}{\bar{c}}C^{AF}_{L\dot{\alpha}}(1-2K_{AF}C^{AF}_{L\alpha})+$$

$$+\zeta\frac{z^t}{\bar{c}}C^t_{L\dot{\alpha}}(1-\varepsilon_\alpha-2K_{AO}C^t_{L\alpha})+\zeta\varepsilon_\alpha\frac{z^t}{\bar{c}}\frac{d_{AO}}{V}C^t_{L\alpha}\Big]+$$

$$+\Delta q\Delta\dot{\alpha}\Big[\zeta\frac{z^t}{\bar{c}}\frac{d_{AO}}{V}(C^t_{L\dot{\alpha}}+\varepsilon_\alpha C^t_{Lq})-2K_{AF}\frac{z^A}{\bar{c}}C^{AF}_{Lq}C^{AF}_{\alpha\dot{L}}-2K_{AO}\frac{z^t}{\bar{c}}C^t_{Lq}C^t_{L\dot{\alpha}}\Big]. \tag{3.21c}$$

3.7. APROXIMAREA FORŢELOR INERŢIALE

Pentru aproximarea forţelor inerţiale vom utiliza din nou ipotezele $\sin\alpha=\alpha$ şi $\cos\alpha=1$. Aşa cum s-a văzut mai sus, erorile sînt acceptabile pe o gamă suficient de mare a unghiurilor de incidenţă. Dacă ţinem seamă de schimbările de variabilă (3.13), componentele (3.4) ale forţelor şi momentelor inerţiale devin

$$X-mg\sin\theta=m(\alpha_0q_0V-\alpha_0V\Delta\dot{\alpha}+\Delta\dot{V}+q_0V\Delta\alpha+$$

$$+\alpha_0V\Delta q+V\Delta\alpha\Delta q-V\Delta\alpha\Delta\dot{\alpha}), \tag{3.22a}$$

$$Z+mg\cos\theta=m(-q_0V+V\Delta\dot{\alpha}+\alpha_0\Delta\dot{V}+\Delta\alpha\Delta\dot{V}), \tag{3.22b}$$

$$M_y=I_y\Delta\dot{q}, \tag{3.22c}$$

unde

$$\theta(t)=\theta_0+q_0(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}\Delta q(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{3.23}$$

Expresiile de mai sus ale sarcinilor aerodinamice şi inerţiale se simplifică dacă plecarea în manevră se face din zborul orizontal rectiliniu şi uniform, deoarece $q_0=0$. De asemenea, remarcăm faptul că în aproximarea forţelor şi momentelor pe organele avionului a fost neglijată numai mărimea ΔV, nu şi acceleraţia $\Delta\dot{V}$.

Deoarece teoria expusă în prezenta lucrare este valabilă pentru situaţiile cînd plecarea în manevră se face din vecinătatea zborului ori-

zontal, pentru care $\theta^0 = \alpha_0$, rezultă că putem aproxima $\theta = \alpha$ pe tot timpul manevrei. Prin urmare

$$mg\sin\theta = \alpha_0 mg + mg\Delta\alpha,$$

$$mg\cos\theta = mg - \frac{mg}{2}(\Delta\alpha)^2, \tag{3.24}$$

unde am folosit pentru funcţiile $\sin\theta$ şi $\cos\theta$ dezvoltările

$$\sin\theta = \theta,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)^2. \tag{3.25}$$

Pentru $\theta = 20°$ erorile pe care le facem prin aproximaţiile (3.24) sînt deordinul a 3 %, compatibile cu cele deja acceptate în estimările anterioare.

În situaţiile mai generale, cînd plecarea în manevră nu se face din zborul orizontal, adică cînd unghiul de pantă γ nu este zero, aproximaţiile (3.24) nu mai sînt valabile. Deoarece $\theta_0 = \gamma + \alpha_0$, în astfel de situaţii sînt adecvate pentru funcţiile $\sin\theta$ şi $\cos\theta$ dezvoltările

$$\sin\theta = \sin\theta_0 + \Delta\alpha\cos\theta_0 - \frac{\sin\theta_0}{2}(\Delta\alpha)^2,$$

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - \Delta\alpha\sin\theta_0 - \frac{\cos\theta_0}{2}(\Delta\alpha)^2. \tag{3.26}$$

4. DETERMINAREA RĂSPUNSULUI AVIONULUI

4.1. O FORMĂ INTERMEDIARĂ A SISTEMULUI DE ECUAŢII

Dacă ţinem seama de expresiile (3.21) ale forţelor şi momentelor aerodinamice, precum şi de expresiile (3.22) ale sarcinilor inerţiale, sistemul de ecuaţii diferenţiale (3.4), care descrie mişcarea avionului, se poate scrie sub forma

$$A_{11}\Delta\dot{\alpha} + A_{12}\Delta\dot{q} + A_{13}\Delta\dot{V} = B_{11}\Delta\alpha + B_{12}\Delta q + B_{13}\Delta V + B_{14} + \\ + B_{15}\Delta\delta_f + B_{16}\Delta\delta_e + B_{17} + B_{18}, \tag{4.1}$$

$$A_{21}\Delta\dot{\alpha} + A_{22}\Delta\dot{q} + A_{23}\Delta\dot{V} = B_{21}\Delta\alpha + B_{22}\Delta q + B_{23}\Delta V + B_{24} + \\ + B_{25}\Delta\delta_f + B_{26}\Delta\delta_e + B_{27} + B_{28}, \tag{4.1b}$$

$$A_{31}\Delta\dot{\alpha} + A_{32}\Delta\dot{q} + A_{33}\Delta\dot{V} = B_{31}\Delta\alpha + B_{32}\Delta q + B_{33}\Delta V + B_{34} + \\ + B_{35}\Delta\delta_f + B_{36}\Delta\delta + B_{37} + B_{38}, \tag{4.1c}$$

unde

$$A_{11} = \alpha_0 \frac{mV}{Q} + C_{L\dot{\alpha}}^{AF}(\alpha_0 - 2K_{AF}C_{L_0}^{AF} + \zeta C_{L\dot{\alpha}}^{t}(\varepsilon_0 - 2K_{AO}C_{L_0}^{AO}) + \zeta\varepsilon_\alpha \frac{d_{AO}}{V} C_{L_0}^{AO},$$

$$A_{12} = 0,$$

$$A_{13} = -\frac{m}{Q},$$

$$B_{11} = \frac{mg}{Q} + q_0 \frac{mV}{Q} - C_{L_0}^{Af} - \zeta(1 - \varepsilon_\alpha) C_{L_0}^{AO} - C_{L\alpha}^{AF}(\alpha_0 - 2K_{AF}C_{L_0}^{Af}) -$$

$$- \zeta C_{L\alpha}^{t}(\varepsilon_0 - 2K_{AO}C_{L_0}^{AO}),$$

$$B_{12} = \alpha_0 \frac{mV}{Q} - \frac{d_{AO}}{V} C_{L_0}^{AO} - C_{Lq}^{AF}(\alpha_0 - 2K_{AF}C_{L_0}^{AF}) - \zeta C_{Lq}^{t}(\varepsilon_0 - 2K_{AO}C_{L_0}^{AO}),$$

$$B_{13} = 0, \tag{4.2a}$$

$$B_{14} = \alpha_0 q_0 \frac{mV}{Q} + C_{D*}^{AF} + \zeta C_{D*}^{AO} + K_{AF}(C_{L_0}^{Af})^2 + \zeta K_{AO}(C_{L_0}^{AO})^2 -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} C_i^T \cos\alpha_i^T - \alpha_0 C_{L_0}^{Af} - \zeta E_0 C_{L_0}^{AO},$$

$$B_{15} = C_{LD}^{f}(2K_{AF}C_{L_0}^{Af} - \alpha_0),$$

$$B_{16} = \zeta C_{L\delta}^{e}(2K_{AO}C_{L_0}^{AO} - \varepsilon_0),$$

$$B_{17} = \sum_{i=1}^{m} C_{Ni}^{b} \sin\delta_i^b + K_{AF}(C_{L\delta}^{f})^2(\Delta\delta_f)^2 + \zeta K_{AO}(C_{L\delta}^{e})^2(\Delta\delta_e)^2,$$

$$B_{18} = 2K_{AF}C_{L\dot{\alpha}}^{AF} C_{L\delta}^{f}\Delta\dot{\alpha}\Delta\delta_f + \zeta C_{LD}^{e}\left(2K_{AO}C_{L\dot{\alpha}}^{t} - \varepsilon_\alpha \frac{d_{AO}}{V}\right)\Delta\dot{\alpha}\Delta\delta_e +$$

$$+ C_{L\delta}^{f}(2K_{AF}C_{L\alpha}^{AF} - 1)\,\Delta\alpha\Delta\delta_f + \zeta C_{L\delta}^{e}(2K_{AO}C_{L\alpha}^{t} + \varepsilon_\alpha - 1)\,\Delta\alpha\Delta\delta_e +$$

$$+ 2K_{AF}C_{Lq}^{AF}C_{Lq}^{f}\Delta q\Delta\delta_f + \zeta C_{L\delta}^{e}\left(2K_{AO}\,C_{Lq}^{t} - \frac{d_{AO}}{V}\right)\Delta q\Delta\delta_e +$$

$$+ (\Delta\alpha)^2[C_{L\alpha}^{AF}(K_{AF}C_{L\alpha}^{AF} - 1) + \zeta C_{L\alpha}^{t}(K_{AO}C_{L\alpha}^{t} + \varepsilon_\alpha - 1)] + (\Delta q)^2\left[K_{AF}C_{Lq}^{AF})^2 +\right.$$

$$\left. + \zeta C_{Lq}^{t}\left(K_{AO}\,C_{Lq}^{t} - \frac{d_{AO}}{V}\right)\right] + \Delta\alpha\Delta q\left[\frac{mV}{Q} + C_{Lq}^{AF}(2K_{AF}C_{Lq}^{AF} - 1) +\right.$$

$$\left. + \zeta C_{Lq}^{t}(2K_{AO}C_{L\alpha}^{t} + \varepsilon_\alpha - 1) - \zeta\frac{d_{AO}}{V} C_{L\alpha}^{t}\right] + \Delta\alpha\Delta\dot{\alpha}\left[C_{L\dot{\alpha}}^{AE}(2K_{AF}C_{L\alpha}^{BF} - 1) +\right.$$

$$+ \zeta C^t_{L\dot{\alpha}}(2K_{AO}C^t_{L\alpha} + \varepsilon_\alpha - 1) - \zeta\varepsilon_\alpha \frac{d_{AO}}{V} C^t_{L\alpha} - \frac{mV}{Q}\Big] +$$

$$+ \Delta q \Delta\dot{\alpha}\left[2K_{AF}C^{AF}_{Lq}C^{AF}_{L\dot{\alpha}} + 2\zeta K_{AO}C^t_{Lq}C^t_{L\dot{\alpha}} - \zeta\frac{d_{AO}}{V}(C^t_{L\dot{\alpha}} + \varepsilon_\alpha C^t_{Lq})\right] +$$

$$+ (\Delta\dot{\alpha})^2\left[K_{AF}(C^{AF}_{L\dot{\alpha}})^2 + \zeta C^t_{L\dot{\alpha}}\left(K_{AO}C^t_{L\dot{\alpha}} - \varepsilon_\alpha\frac{d_{AO}}{V}\right)\right]: \qquad (4.2.a)$$

respectiv,

$$A_{21} = -\left(C^{AF}_{L\dot{\alpha}} + \zeta C^t_{L\dot{\alpha}} + \frac{mV}{Q}\right),$$

$$A_{22} = 0,$$

$$A_{23} = -\alpha^0\frac{m}{Q},$$

$$B_{21} = C^{AF}_{L\alpha} + \zeta C^t_{L\alpha},$$

$$B_{22} = C^{AF}_{Lq} + \zeta C^t_{Lq} - \frac{mV}{Q},$$

$$B_{23} = 0, \qquad (4.2b)$$

$$B_{24} = \sum_{i=1}^{n} C^T_i \sin\alpha^T_i + C^{Af}_{L_0} + \zeta C^{AO}_{L_0} - \frac{m}{Q}(g + g_0 V),$$

$$B_{25} = C^f_{L\delta},$$

$$B_{26} = \zeta C^e_{L\delta},$$

$$B_{27} = \sum_{i=1}^{m} C^b_{Ni}\cos\delta^b_i,$$

$$B_{28} = \frac{mg}{2Q}(\Delta\alpha)^2 + \frac{m}{Q}\Delta\alpha\Delta V$$

și

$$A_{31} = \frac{C^{AF}_{L\dot{\alpha}}}{\bar{c}}(2K_{AF}z^A C^{AF}_{L_0} - x^A - \alpha_0 z^A) + \zeta\frac{C^t_{L\dot{\alpha}}}{\bar{c}}\left(2K_{AO}z^t C^{AO}_{L_0} - x^t - \right.$$

$$\left. - \varepsilon_0 z^t - q_0\varepsilon_\alpha z^t\frac{d_{AO}}{V}\right) - \zeta\varepsilon_\alpha\frac{z^t}{\bar{c}}\frac{d_{AO}}{V}C^{AO}_{L_0},$$

$$A_{32} = \frac{I_y}{\bar{c}},$$

$$A_{33} = 0,$$

$$B_{31} = C^F_{m\alpha} + \frac{C^{AF}_{L\alpha}}{\bar{c}}(x^A + \alpha_0 z^A - 2K_{AF} z^A C^{Af}_L) +$$

$$+ \zeta \frac{C^t_{L\alpha}}{\bar{c}}(x + \varepsilon_0 z^t - 2K_{AO} z^t C^{AO}_{L_0}) + \frac{1}{\bar{c}}(z^B C^{Af}_{L_0} + \zeta z^t C^{AO}_{L_0}),$$

$$B_{32} = \frac{C^{AF}_{Lq}}{\bar{c}}(x^A + \alpha_0 z^A - 2K_{AF} z^A C^{Af}_{L_0}) + \zeta \frac{C^t_{Lq}}{\bar{c}}(x^t + \varepsilon_0 z^t -$$

$$- 2K_{AO} z^t C^{AO}_{L_0}) + \zeta \frac{z^t}{\bar{c}} C^{AO}_{L_0} \frac{d_{AO}}{V},$$

$$B_{33} = 0,$$

$$B_{34} = (C^{AF}_{m*})_0 + \frac{C^{Af}_{L_0}}{\bar{c}}(x^A + \alpha_0 z^A) + \zeta \frac{C^{AO}_{L_0}}{\bar{c}}(x^t + \varepsilon_0 z^t) +$$

$$+ \frac{1}{\bar{c}} \sum_{i=1}^{n} C^T_i (z^T_i \cos\alpha^T_i + x^T_i \sin\alpha^T_i) - \frac{z^A}{\bar{c}}[C^{AF}_{D*} + K_{AF}(C^{Af}_{L_0})^2] -$$

$$- \zeta \frac{z^t}{\bar{c}}[C^{AO}_{D*} + K_{AO}(C^{AO}_{L_0})^2],$$

$$B_{35} = \frac{C^f_{L\delta}}{\bar{c}}(x^f + \alpha_0 z^f - 2K_{AF} z^A C^{Bf}_{L_0}), \qquad (4.2c)$$

$$B_{36} = \zeta \frac{C^e_{L\delta}}{\bar{c}}(x^e + \varepsilon_0 z^e - 2K_{AF} z^t C^{AO}_{L_0}),$$

$$B_{37} = - K_{AF} \frac{z}{\bar{c}}(C^f_{L\delta})^2 (\Delta\delta_f)^2 - \zeta K_{AO} \frac{z^e}{\delta}(C^e_{L\delta})^2 (\Delta\delta_e)^2,$$

$$B_{38} = \zeta C^e_{L\delta} \frac{z^e}{\bar{c}}\left(\varepsilon_\alpha \frac{d_{AO}}{V} - 2K_{AO} C^t_{L\dot{\alpha}}\right) \Delta\dot{\alpha}\Delta\delta_e -$$

$$- 2K_{AF} \frac{z^f}{\bar{c}} C^{AF}_{L\dot{\alpha}} C^f_{L\delta} \Delta\dot{\alpha}\Delta\delta_f + \frac{C^f_{L\delta}}{\bar{c}}(z^f - 2K_{AF} z^A)\Delta\alpha\Delta\delta_f +$$

$$+ \zeta \frac{C^e_{L\delta}}{\bar{c}}(z^e - 2K_{AO} z^t)\,\Delta\alpha\Delta\delta_e + \zeta \frac{z^t}{\bar{c}} C^e_{LD}\left(\frac{d_{AO}}{V} - 2K_{AO} C^t_{Lq}\right)\Delta q\Delta\delta -$$

$$- 2K_{AF} \frac{z^A}{\bar{c}} C^{AF}_{Lq} \Delta q\Delta\delta_f + (\Delta\alpha)^2 \left[\frac{z^A}{\bar{c}} C^{AF}_{L\alpha}(1 - K_{AF} C^{AF}_{L\alpha}) +\right.$$

$$\left. + \zeta \frac{z^t}{\bar{c}} C^t_{L\alpha}\, 1 - \varepsilon_\alpha - K_{AO} C^t_{L\alpha})\right] + (\Delta q)^2 \left[\zeta \frac{z^t}{\bar{c}} C^t_{Lq}\left(\frac{d_{AO}}{V} - K_{AO} C^t_{Lq}\right) -\right.$$

$$- K_{AF}\frac{z^A}{\bar{c}}(C_{Lq}^{AF})^2\Big] + (\Delta\dot{\alpha})^2\Big[\zeta\frac{z^t}{\bar{c}}C_{L\dot{\alpha}}^t\Big(\varepsilon_\alpha\frac{d_{AF}}{V} - K_{AO}C_{L\dot{\alpha}}^t\Big) -$$

$$- K_{AF}\frac{z^A}{\bar{c}}(C_{L\dot{\alpha}}^{AF})^2\Big] + \Delta\alpha\Delta q\Big[\frac{z^A}{\bar{c}}C_{Lq}^{AF}(1 - 2K_{AF}C_{L\dot{\alpha}}^{AF}) +$$

$$+ \zeta\frac{z^t}{\bar{c}}C_{Lq}^t(1 - \varepsilon_\alpha - 2K_{AO}C_{L\alpha}^t) + \zeta\frac{z^t}{\bar{c}}\frac{d_{AO}}{V}C_{L\alpha}^t\Big] + \Delta\alpha\Delta\dot{\alpha}\Big[C_{L\dot{\alpha}}^{AF}(2K_{AF}C_{L\alpha}^{AF} - 1) +$$

$$+ \zeta C_{L\dot{\alpha}}^t(2K_{AO}C_{L\alpha}^t + \varepsilon_\alpha - 1) - \zeta\varepsilon_\alpha\frac{d_{AO}}{V}C_{L\alpha}^t\Big] + \Delta q\Delta\dot{\alpha}\Big[2K_{AF}C_{Lq}^{AF}C_{\alpha\dot{L}}^{AF} +$$

$$+ 2\zeta K_{AO}C_{Lq}^tC_{L\dot{\alpha}}^t - \zeta\frac{d_{AO}}{V}(C_{L\dot{\alpha}}^t + \varepsilon_\alpha C_{Lq}^t)\Big] + (\Delta\dot{\alpha})^2\Big[K_{AF}(C_{L\dot{\alpha}}^{AF})^2 +$$

$$+ \zeta C_{L\dot{\alpha}}^t\Big(K_{AO}C_{L\dot{\alpha}}^t - \varepsilon_\alpha\frac{d_{AO}}{V}\Big)\Big].$$

4.2. REPREZENTAREA MATRICEALĂ A SISTEMULUI DE ECUAȚII

Cu notațiile utilizate în relațiile (4.2), definim matricele pătrate, cu elemente constante, $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ prin

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ B_{31} & B_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

precum și vectorul $\vec{\mathcal{C}}$, $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{E}}$, $\vec{\mathcal{F}}$, $\vec{\mathcal{G}}$, respectiv $\mathbf{y}$ prin

$$\vec{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} B_{14} \\ B_{24} \\ B_{34} \end{pmatrix}, \ \vec{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} B_{15} \\ B_{25} \\ B_{35} \end{pmatrix}, \ \vec{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} B_{16} \\ B_{26} \\ B_{36} \end{pmatrix}, \ \vec{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} B_{17} \\ B_{27} \\ B_{37} \end{pmatrix},$$

$$\vec{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} B_{18} \\ B_{28} \\ B_{38} \end{pmatrix}, \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta q \\ \Delta V \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Elementele vectorilor $\vec{\mathcal{C}}$ $\vec{\mathcal{D}}$ și $\vec{\mathcal{E}}$ sînt constante cunoscute, ale vectorului $\vec{\mathcal{F}}$ funcții de timpul t cunoscute, iar elementele vectorului $\vec{\mathcal{G}}$ sînt funcții necunoscute. De asemenea, vectorul $\mathbf{y}$ conține funcțiile necunoscute ale problemei.

Folosind notațiile (4.3) și (4.4), ecuațiile de mișcare (4.1) pot fi scrise sub formă matriceală

$$\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathcal{B}\mathbf{y} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{\mathcal{D}}\Delta\delta_f + \vec{\mathcal{E}}\Delta\delta_e + \vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}. \tag{4.5}$$

Este de remarcat faptul că elementele vectorului $\vec{\mathcal{G}}$ sînt sume în care intervin termeni de forma $\beta y_i y_i$ sau $\gamma y_i \dot{y}_j$ β și γ fiind constante cunoscute.

Determinarea răspunsului avionului la comenzile flapsului, profundorului sau frînei aerodinamice revine la rezolvarea *problemei Cauchy* cu condiții inițiale nule pentru sistemul (4.5). Prin urmare, trebuie determinată soluția y a acestui sistem, care, la momentul z^0, satisface condiția

$$\mathbf{y}(t_0) = 0, \tag{4.6}$$

în timp ce funcțiile $\Delta\delta_f(t)$, $\Delta\delta_e(t)$ și $\delta_i^b(t)$ sînt cunoscute. Pentru aceasta vom reprezenta sistemul (4.5) sub forma normală.

4.3. FORMA NORMALĂ A SISTEMULUI DE ECUAȚII

Condiția necesară ca sistemul (4.5) să poată fi reprezentat sub formă normală este ca matricea $\mathcal{A}$ să fie nesingulară, deci inversabilă. Observăm că această condiție este îndeplinită deoarece

$$det(\mathcal{A}) = A_{32}(A_{13}A_{21} - A_{11}A_{23}), \tag{4.7a}$$

iar dacă ținem seamă de relațiile (4.2), în care sînt definite elementele matricei $\mathcal{A}$, acest determinant poate fi aproximat prin

$$\Delta = det\,(\mathcal{A}) \approx \frac{mI_y}{\bar{c}Q^2}\left(\frac{mV}{Q} + C_{L\dot{\alpha}}^{AF} + \zeta C_{L\dot{\alpha}}^{t}\right). \tag{4.7b}$$

Termenii neglijați in (4.7*b*) sînt de ordinul lui α^0, fiind nesemnificativi. $\Delta \neq 0$ în orice situație de zbor și pentru orice condiții inițiale ale manevrei.

Fie $\mathcal{A}^{-1}$ inversa matricei $\mathcal{A}$. Elementele acestei matrice sînt

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{A_{23}A_{32}}{\Delta} & \dfrac{A_{13}A_{32}}{\Delta} & 0 \\ \dfrac{A_{31}A_{23}}{\Delta} & -\dfrac{A_{31}A_{13}}{\Delta} & \dfrac{1}{A_{32}} \\ \dfrac{A_{21}A_{32}}{\Delta} & -\dfrac{A_{11}A_{32}}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Dacă introducem notațiile

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}, \qquad \mathbf{C} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathcal{C}}, \qquad \mathbf{D} = \mathcal{A}'\vec{\mathcal{D}}\Delta\delta_f \\ \mathbf{E} &= \mathcal{A}^{-1}\mathcal{E}\,\Delta\delta_e, \quad \mathbf{F} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathcal{F}}, \qquad \mathbf{G} = \mathcal{A}^{-1}\vec{\mathcal{G}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

precum și

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F} + \mathbf{G}, \tag{4.10}$$

sistemul (4.5) capătă forma normală

$$\dot{y} = A\mathbf{y} + \mathbf{B}. \tag{4.11a}$$

Pe componente (4.1a) se scrie

$$\dot{y}_i = a_{ij} y_j + b_j(t) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{4.11b}$$

unde s-a folosit convenția de sumare după indicii care se repetă.

4.4. REPREZENTAREA RĂSPUNSULUI AVIONULUI

Dacă în (4.10) s-ar neglija vectorul **G**, atunci vectorul **B** ar fi o funcție cunoscută de timpul t și reprezentarea soluției problemei Cauchy cu condițiile inițiale (4.6) se obține imediat. Însă $\mathbf{G} \neq 0$ și conține tocmai partea neliniară a sistemului de ecuații în care apar produsele funcțiilor necunoscute și ale derivatelor acestora. Prin urmare, **G** este apriori necunoscut.

Pentru reprezentarea soluției sistemului (4.11), care satisface condițiile inițiale (4.6), vom presupune la început că vectorul **B** este cunoscut. Aceasta poate însemna, spre exemplu, expresia (4.10) în care considerăm $\mathbf{G} = 0$. Pe de altă parte, raționamentele care urmează sînt valabile indiferent dacă **B** este cunoscut sau nu.

Fie $\Phi(t) = (\varphi_{ij})(i,j = 1, 2, 3)$ matricea fndamentală a sistemului omogen (4.11) care pentru $t = t_0$ se reduce la matricea unitate. Construcția acestei matrice este dată în ANEXĂ. Soluția sistemului neomogen (4.11) cu condiții inițiale nule se scrie, oricare ar fi vectorul **B** sub forma (vezi [9])

$$\mathbf{y}(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\, \mathbf{B}(\xi)\, d\xi, \tag{4.12a}$$

unde Φ^{-1} este inversa matricei Φ. Pe componente (4.12a) se scrie

$$y_i(t) = \varphi_{ik}(t) \left(\int_{t_0}^{t} \varphi_{kj}^{-1}(\xi)\, b_j(\xi)\, d\xi \right) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{4.12b}$$

folosindu-se din nou convenția de sumare după indicii care se repetă. De asemenea, $b_j(\xi)$ sînt cimponentele vectorului **B**.

Deoarece funcțiile $b_j(\xi)$ depind, prin intermediul vectorului **G**, de y_1, y_2 și y_3, precum și de derivatele acestor funcții, reprezentarea (4.12) a soluției poate fi privită ca un sistem de ecuații integrale pentru determinarea necunoscutelor $y_i (i = 1, 2, 3)$. Dar, în schimb, considerăm $\mathbf{G} = 0$, adică neglijăm termenii neliniari, atunci (4.12) se furnizează direct răspunsul avionului la comenzile flapsului, profundorului, respectiv frînei aerodinamice. Desigur, acest răspuns corespunde adacă considerăm și $\mathbf{F} = 0$) aproximației liniare a sistemului ecuațiilor de mișcare (vezi [1], [2], [6]).

În concluzie, dacă reprezentăm vectorul **B** sub forma

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} + \mathbf{G}, \tag{4.13}$$

unde **L** este partea sa cunoscută

$$\mathbf{L} = \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F}, \tag{3.14}$$

iar $\mathbf{G}$ cea necunoscută, definită în (4.9), atunci soluția (4.12) se poate reprezenta sub forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_L(t) + \mathbf{z}(t), \tag{4.15}$$

unde

$$\mathbf{y}_L(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\, L(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{4.16}$$

și

$$\mathbf{z}(t) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\, \mathbf{G}(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{4.17}$$

funcțiile necunoscute apărînd numai în vectorul $\mathbf{z}$,

4.5. UN PROCEDEU DE APROXIMARE A SOLUȚIEI

Sistemul neliniar de ecuații integrale (4.15) se pretează la o rezolvare printr-un șir de aproximații succesive a soluției.

Fie $\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{y}_L(t)$ prima aproximație, vectorul $\mathbf{y}_L(t)$ fiind cunoscut și definit în (4.16). Prin urmare, $\mathbf{y}^{(1)}$ corespunde cazului cînd considerăm $\mathbf{z} = 0$, adică $\mathbf{G} = 0$, în reprezentarea (4.15).

Cu ajutorul lui $\mathbf{y}^{(1)}$ astfel determinat, relațiile (4.2) ne permit calculul primei aproximații a componentelor B_{18}, B_{28} și B_{38} ale vectoului $\vec{\zeta}$ din (4.4), iar relația (4.9) ne permite calculul primei aproximații a vectorului $\mathbf{G}$. În continuare, cu $\mathbf{G}$ astfel determinat, din (4.17) obținem a doua aproximație a vectorului $\mathbf{z}(t)$ și, în final, din (4.15) a doua aproximație a soluției sistemului de ecuații integrale. Dacă notăm cu $\mathbf{G}^{(1)}$ prima aproximație a vectorului $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^{(1)} = \mathbf{G}[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(1)}, t]$, atunci a doua aproximație a soluției este

$$\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{y}_L + \mathbf{z}^{(2)}, \tag{4.18}$$

unde

$$\mathbf{z}^{(2)} = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\, \mathbf{G}^{(1)}(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{4.19}$$

La pasul următor se reia întegul algoritm descris anterior, considerînd în locul lui $\mathbf{y}^{(1)}$ noua aproximație $\mathbf{y}^{(2)}$. În felul acesta se calculează noua corecție $\mathbf{G}^{(2)}$ a vectorului $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^{(2)} = \mathbf{G}[\mathbf{y}^{(2)}, \mathbf{y}^{(2)}, t]$, iar din (4.19), noua creație a soluției.

Procesul de aproximații succesive continuă în acest mod, astfel că la pasul n avem reprezentarea

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{y}_L + \mathbf{z}^{(n)}, \tag{4.20}$$

unde

$$\mathbf{z}^{(n)} = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)\,\mathbf{G}^{(n-1)}(\xi)\,d\xi. \tag{4.21}$$

Calculul se consideră încheiat atunci cînd, într-o anumită normă, distanța dintre două aproximații succesive este mai mică decît un număr dat apriori.

4.6. CONVERGENȚA PROCESULUI DE APROXIMAȚII SUCCESIVE

Pentru ca problema să poată fi considerată complet rezolvată este necesar să se demonstreze că procesul de aproximații succesive a soluției descris în paragraful anterior converge și că limita șirului respectiv satisface ecuația integrală neliniară (4.15) sau (4.17). Dar, pentru a putea descrie convergența, este necesar ca în mulțimea de funcții în care căutăm soluția să definim o normă.

Remarcăm faptul că funcțiile cunoscute ale problemei, adică derivatele aerodinamice și bracajele suprafețelor de comandă sînt mărginite. În particular, putem admite că aceste funcții au discontinuități de prima speță într-un număr finit de puncte, cu alte cuvinte sînt integrabile Riemann pe orice interval compact. De asemenea, matricea fundamentală Φ și inversa sa Φ^{-1} sînt indefinit derivabile (vezi Anexa, în particular aceste funcții sînt și mărginite pe astfel de intervale.

Vom studia mișcarea avionului pentru $t \in [t_0, T]$, $T < \infty$. Soluția $\mathbf{z}$ (conform 4.17) a problemei o căutăm în mulțimea X a funcțiilor derivabile, cu derivata mărginită pe intervalul $[t_0, T]$ și care se anulează pentru $t = t_0$. În X definim norma vectorului $\mathbf{z}$, care are componentele z_1, z_2 și z_3, prin

$$\|\mathbf{z}\| = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ t \in [t_0,\, T]}} (|z_i|, |\dot{z}_i|), \tag{4.21a}$$

maxim cate există deoarece funcțiile care intervin sînt mărginite. Cu această normă mulțimea X devine un *spațiu Banach* (vezi [10]).

Pentru orice $\mathbf{z} \in X$ mai definim și operatorul F prin expresia

$$F\mathbf{z} = \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-}(\xi)\mathbf{G}(\xi)d\xi, \tag{4.22}$$

funcția vectorială $\mathbf{G}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})$ fiind definită în (4.9). Avînd în vedere cele expuse anterior, este evident că definiția (4.22) a operatorului F are sens și că $F\mathbf{z} \in X$, cu alte cuvinte că $F : X \to X$.

Din experiențele de calcul numeric, efectuate pentru diferite configurații, s-a putut trage concluzia că operatorul F converge foarte rapid. Practic, în 2 — 3 iterații a fost obținut răspunsul avionului cu o precizie sub 1% în norma (4.21). De aceea, scopul nostru în continuare este să stabilim condiții minime în care operatorul F este o contracție (vezi [11]).

Fie $z \in X$ cu proprietatea că $\|z\| < 1$. Din definiția (4.22) a operatorului F rezultă că există $M \geqslant 0$ astfel încît

$$\|Fz\| \leqslant M\|z\|^2 \tag{4.23}$$

și M nu depinde de z. O modalitate de alegere a lui M, este, spre exemplu $M = \|Fz\|$ pentru $\|z\| = 1$.

Fie $0 < \rho < 1$. Dacă $\|z\| < \rho/M$ și $\rho < M \leqslant 1$, atunci

$$\|Fz\| < \rho\|z\| \tag{4.24}$$

adică operatorul F este o contracție pe submulțimea $X' \subset X$, unde X' este mulțimea tuturor funcțiilor derivabile, cu derivata mărginită și pentru care $\|z\| < a$, $a = \rho/M$. Trebuie subliniat faptul că mulțimea X' nu este vidă deoarece $z(t_0) = \dot{z}(t_0) = 0$ și în virtutea continuității pentru orice $\varepsilon > 0$, există $T \geqslant 0$, astfel încît dacă $t \in [t_0, T]$ să avem $\|z\| < \varepsilon$. În particular, această afirmație este valabilă pentru $\varepsilon = a$,

Prin urmare, ecuația funcțională $z = Fz$ are un punct fix cel puțin într-o vecinătate suficient de mică a momentului inițial. Cu alte cuvinte procesul nostru de aproximații succesive converge către soluția unică z a problemei.

4.7. CONSIDERAȚII PRIVIND INTEGRAREA NUMERICĂ

În cele ce urmează ne propunem să facem cîteva considerații privind integrarea numerică a sistemului de ecuații integrale (4.15). Avînd în vedere că funcțiile din clasa în care căutăm soluția sînt suficient de netede, în procesul de integrare numerică vom folosi metoda trapezelor deoarece conduce la simplificări importante în algoritmul de calcul.

Așadar, avînd la bază această metodă de integrare, vom aborda cu prioritate problema determinării pasului de timp optim Δt. Prin pas de timp *optim* vom înțelege acel pas maxim Δt care asigură o precizie acceptabilă a calculului numeric. Faptul că Δt trebuie să fie cît mai mare rezultă din necesitatea de a urmări evoluția avionului un timp cît mai îndelungat și din faptul că memoria calculatorului electronic este limitată. Pe de altă parte, Δt nu poate depăși acea valoare pentru care eroarea relativă maximă a soluției, în norma (4.21), depășește anumite limite (de exemplu 1%). Prin urmare, Δt optim este un compromis rezonabil între mai multe cerințe contradictorii.

Pentru a ne face o anumită idee asupra acestor probleme considerăm sistemul liniar și neomogen

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 - y_1 + 1, \\ \dot{y}_2 &= y_2 - 2y_1 + 1, \\ \dot{q}_3 &= y_2 + y_3 + 1, \end{aligned} \tag{4.25}$$

cu condiții inițiale nule. Matricea A și vectorul $\mathbf{B}$ care corespund acestui sistem, în conformitate cu relațiile (4.11), sînt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

Soluția sistemului (4.25) cu condiții inițiale nule este

$$y_1 = \sin t,$$

$$y_2 = \sin t + \cos t - 1, \tag{4.27}$$

$$y_3 = t - \cos t.$$

Pe de altă parte, soluția (4.27) poate fi reprezentată și sub forma (4.15) și calculată prin metoda de integrare numerică amintită. Calculele s-au făcut pe intervalul de timp $t \in [0,2]$ secunde. A fost variat pasul Δt, iar rezultatele sînt prezentate în tabelul 1 la momentul $t = 2$ s.

Tabelul 1

Comparație între soluția exactă și cea aproximativă la momentul $t = 2$s. pentru sistemul (4.25)

Mărimea		y_1	y_2	y_3	$\dot{y}_1$	$\dot{y}_2$	$\dot{y}_3$	Abatere maximă
Valoarea exactă		0,90930	−0,50685	7,80520	−0,41614	−1,32544	8,29835	0
Valoarea aproximată	Δt=0,01	9,90930	−0,50685	7,80524	−0,41613	−1,32542	8,29840	0,002%
	Δt=0,05	0,90911	−0,50674	7,80624	−0,41585	−1,32496	8,29949	0,07%
	Δt=0,1	0,90854	−0,50643	7,80934	−0,41496	−1,31135	8,30291	0,3%
	Δt=0,2	9,90626	−0,50516	7,82176	−0,41142	−1,31768	8,31660	1,13%
	Δt=0,5	0,89027	−0,49624	7,90813	−0,38652	−1,27679	8,41188	7%

Cel mai mic pas de timp care s-a considerat a fost $\Delta t = 0{,}01$ s, iar cel mai mare $\Delta t = 0{,}5$ s. Pentru fiecare mărime din coloanele 2 — 7 s-a calculat abaterea, în norma (4.2), față de valorile exacte din linia 2. Erorile relative maxime, în procente, au fost numite abateri maxime și sînt trecute în coloana a 8-a a tabelului.

Analizînd valorile din tabelul 1 se poate constata că precizia metodei de integrare numerică prin aproximația trapezelor este remarcabilă. În plus, pentru obținerea acestor valori au fost necesare numai două iterații în programul de calcul.

Din considerente de ordin practic, putem admite că o precizie de ordinul 1% este suficientă pentru calculul răspunsului avionului. Aceasta înseamnă că pentru manevrele uzuale este recomandabil să considerăm ca valoare de referință pentru pasul de timp valoarea $\Delta t = 0{,}1$s. Totuși, pentru diferite cazuri din practică este necesar să se studieze convergența soluției pentru valori ale lui Δt apropiate de valoarea de referință, urmînd ca decizia finală asupra alegerii pasului Δt să fie luată în urma acestei analize.

ANEXĂ

Determinarea matricei fundamentale a sistemului omogen care la momentul iniţial coincide cu matricea unitate

Considerăm sistemul omogen de ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{A.1}$$

sau sub formă matriceală

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x}. \tag{A.1}$$

Un sistem fundamental de soluţii se poate obţine căutînd soluţii de forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} e^{\lambda(t-t_0)} \tag{A.2}$$

A_1, A_2 şi A_3 fiind constante, iar t_0 un moment iniţial. Dacă înlocuim (A.2) în (A.1) se obţine un sistem liniar şi omogen în raport cu necunoscutele A_1, A_2 şi A_3. Condiţia ca acest sistem să aibă soluţie nebanală conduce la)

$$\Delta = \det(A - \lambda E) = 0, \tag{A.3}$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Ecuaţia caracteristică A.3) fiind de gradul trei în λ are sigur o rădăcină reală, pe care o notăm λ_3. De asemenea, presupunem că celelalte două sînt complexe, care trebuie să fie şi conjugate. Deci rădăcinile ecuaţiei (A.3) sînt

$$\lambda_1 = a + bi; \quad \lambda_2 = a - bi; \quad \lambda_3 = \lambda_3, \tag{A.5}$$

a, b şi λ_3 fiind numere reale.

Presupunem că în locul lui λ din (A.2) substituim o valoare $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ dată în (A.5). Determinantul Δ este nul pentru orice λ_i, prin urmare sistemul (A.3) are soluţii nebanale A_{1i}, A_{2i}, A_{3i}. În virtutea unei teoreme cunoscute din teoria sistemelor de ecuaţii liniare, rangul matricei $A - \lambda E$ este 2. Prin urmare, necunoscutele A_{1i}, A_{2i} şi A_{3i} se determină cu aproximaţia unui factor arbitrar de proporţionalitate. Astfel, putem lua drept A_{1i}, A_{2i}, A_{3i} complementii algebrici ai oricărei linii a determinantului $\Delta(\lambda_i)$ pentru care nu toţi aceşti minori sînt nuli. Pentru fixarea ideilor vom alege, de exemplu, complementii algebrici ai primei linii pentru

o valoare oarecare λ. Obținem expresiile

$$\begin{aligned} A_{11} &= \lambda^2 - \lambda(a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \\ A_{12} &= a_{21}\lambda \times a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \\ A_{13} &= a_{31}\lambda + a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

Rădăcinilor λ_1, λ_2 și λ_3 le corespund trei vectori proprii $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ și trei soluții particulare de forma (A.2) care constituie un sistem fundamental de soluții în domeniul $t_0 \leqslant t < \infty$ și $|x_t| < \infty$.

Vom conveni notația $\tau = t - t_0$. Cu această notație, soluția generală a sistemului omogen (A.1) este

$$\mathbf{X}' = C_1'\mathbf{A}_1' e_{\lambda_1\tau} + C_2'\mathbf{A}_2' e_{\lambda_2\tau} + C_3'\mathbf{A}_3' e_{\lambda_3\tau}, \tag{A.7}$$

C_1', C_2' și C_3' diind constante arbitrare. Vectorii proprii sînt dați de

$$\mathbf{A}_1' = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_1}, \quad \mathbf{A}_2' = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_2}, \quad \mathbf{A}_3' = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{pmatrix}_{\lambda=\lambda_3}. \tag{A.8}$$

Considerînd în (A.6) expresiile (A.5) pentru λ_1, λ_2 ți λ_3 rezultă

$$\mathbf{A}_1' = \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \\ \alpha_3 + i\beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2' = \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\beta_1 \\ \alpha_2 - i\beta_2 \\ \alpha_3 - i\beta_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{A.9}$$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a^2 - b + a_{22}a_{33} - a(a_{22} + a_{33}) - a_{23}a_{32}, \\ \beta_1 &= b(2a - a_{22} - a_{33}), \\ \alpha_2 &= aa_{21} + a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \\ \beta_2 &= ba_{21}, \\ \alpha_3 &= aa_{31} + a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}, \\ \beta_3 &= ba_{31}, \\ \gamma_1 &= \lambda_3^2 - \lambda_3(a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \\ \gamma_2 &= \lambda_3 a_{21} + a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \\ \gamma_3 &= \lambda_3 a_{31} + a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}. \end{aligned}$$

Astfel un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen (A.1) este

$$\mathbf{X}_1' \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\beta_1 \\ \alpha_2 + i\beta_2 \\ \alpha_3 + i\beta_2 \end{pmatrix} e^{(a+bi)\tau}, \quad \mathbf{X}_2' = \begin{pmatrix} \alpha_1 - i\beta_1 \\ \alpha_2 - i\beta_2 \\ \alpha_3 - i\beta_3 \end{pmatrix} e^{(a+bi)\tau}, \quad \mathbf{X}_3' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} e^{\lambda_3\tau}, \tag{A.11}$$

sau

$$\mathbf{X}_1' = \begin{bmatrix} \alpha_1\cos b\tau - \beta_1\sin b\tau + i(\alpha_1\sin b\tau + \beta_1\cos b\tau) \\ \alpha_2\cos b\tau - \beta_2\sin b\tau + i(\alpha_2\sin b\tau + \beta_2\cos b\tau) \\ \alpha_3\cos b\tau - \beta_3\sin b\tau + i(\alpha_3\sin b\tau + \beta_3\cos b\tau) \end{bmatrix} e^{a\tau},$$

$$\mathbf{X}_2' = \begin{bmatrix} \alpha_1\cos b\tau - \beta_1\sin b\tau - i(\alpha_1\sin b\tau + \beta_1\cos b\tau) \\ \alpha_2\cos b\tau - \beta_2\sin b\tau - i(\alpha_2\sin b\tau + \beta_2\cos b\tau) \\ \alpha_3\cos b\tau - \beta_3\sin b\tau - i(\alpha_3\sin b\tau + \beta_3\cos b\tau) \end{bmatrix} e^{a\tau}, \qquad (A.12)$$

$$\mathbf{X}_3' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} e^{\lambda_3\tau}.$$

Avînd în vedere liniaritatea sistemului de ecuații (A.1), un alt sistem fundamental de soluții este

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1' + \mathbf{X}_2'), \quad \mathbf{X}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbf{X}_1' - \mathbf{X}_2'), \quad \mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_3'. \qquad (A.13)$$

Dacă ținem seama de (A.12), din (A.13) rezultă

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1\cos b\tau - \beta_1\sin n\tau \\ \alpha_2\cos b\tau - \beta_2\sin b\tau \\ \alpha_3\cos b\tau - \beta_3\sin b\tau \end{pmatrix} e^{a\tau}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1\sin b\tau + \beta_1\cos b\tau \\ \alpha_2\sin b\tau + \beta_2\cos b\tau \\ \alpha_2\sin b\tau + \beta_3\cos b\tau \end{pmatrix} e^{a\tau},$$

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} e^{\lambda_3\tau}. \qquad (A.14)$$

Soluția generală a sistemului omogen (A.1), scrisă cu ajutorul sistemului fundamental (A.14), este

$$\mathbf{X} = C_1\mathbf{X}_1 + C_2\mathbf{X}_2 + C_3\mathbf{X}_3, \qquad (A.15)$$

C_1, C_2 și C_3 fiind constante arbitrare care, pentru un caz concret, se determină din condițiile inițiale.

În legătură cu soluția sistemului neomogen corespunzător lui(A.1), remarcăm faptul că aceasta se exprimă cu ajutorul matricei $\Phi = (\varphi_{ij})$, unde Φ este matricea fundamentală a sistemului omogen care pentru $\tau = 0$ (adică $t = t_0$) se reduce la matricea unitate. Prin urmare,

$$\varphi_{ij}(t_0) = \delta_{ij}, \qquad (A.16)$$

δ_{ij} fiind simbolul lui *Kroeneker*.

Fie x_i($i = 1, 2, 3$) soluția generală a sistemului omogen (A.1). Avînd în vedere (A.14) și (A.15) aceasta este

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} \bar{c}_j f_{ij}(\tau), \qquad (A.17)$$

unde

$$f_{ij}(\tau) = \begin{bmatrix} (\alpha_1 \cos b\tau - \beta_1 \sin b\tau)e^{a\tau} & (\alpha_1 \sin b\tau + \beta_1 \cos b\tau)e^{a\tau} & \gamma_1 e^{\lambda_2 \tau} \\ (\alpha_2 \cos n\tau - \beta_2 \sin b\tau)e^{a\tau} & (\alpha_2 \sin b\tau + \beta_2 \cos b\tau)e^{a\tau} & \gamma_2 e^{\lambda_3 \tau} \\ (\alpha_3 \cos b\tau - \beta_3 \sin b\tau)e^{a\tau} & (\alpha_3 \sin b\tau + \beta_3 \cos b\tau)e^{a\tau} & \gamma_3 e^{\lambda_3 \tau} \end{bmatrix}, \quad (A.18)$$

este o matrice fundamentală, iar $\bar{c}_j$ constante arbitrare.

Matricea fundamentală Φ a sistemului omogen care pentru $\tau = 0$, se reduce la matricea unitate, se poate obține din (A.17) deoarece fiecare vector coloană al acestei matrice este soluție. Prin urmare,

$$\varphi_{i1} = \sum_{j=1}^{3} C_{1j} f_{ij}(\tau), \quad \varphi_{i2} = \sum_{j=1}^{3} C_{2j} f_{ij}(\tau), \quad \varphi_{i3} = \sum_{j=1}^{3} C_{3j} f_{ij}(\tau). \quad (A.19)$$

Constantele C_{1j}, C_{2j} și C_{3j} $(j = 1, 2, 3)$ se determină din condiția (A.16) care revine la rezolvarea sistemului de ecuații lagberice

$$\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{3} C_{kj} f_{ij}(0). \quad (A.20)$$

Dacă ținea seama de (A.18), sistemul (A.20) devine

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}C_{11} + \beta_1 C_{12} + \gamma_1 C_{13} = 1, \\ &\alpha_2 C_{11} + \beta_2 C_{12} + \gamma_2 C_{13} = 0, \\ &\alpha_3 C_{11} + \beta_3 C_{12} + \gamma_3 C_{13} = 0, \\ &\alpha_1 C_{21} + \beta_1 C_{22} + \gamma_1 V_{23} = 0, \\ &\alpha_2 C_{21} + \beta_2 C_{22} + \gamma_2 C_{23} = 1, \\ &\alpha_3 C_{21} + \beta_3 C_{22} + \gamma_3 C_{23} = 0, \\ &\alpha_1 C_{31} + \beta_1 C_{32} + \gamma_1 C_{33} = 0 \\ &\alpha_2 C_{31} + \beta_2 C_{32} + \gamma_2 C_{33} = 0 \\ &\alpha_3 C_{31} + \beta_3 C_{32} + \gamma_3 C_{33} = 1. \end{aligned} \quad (A.21)$$

Fie determinantul

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad (A.22)$$

care este diferit de zro deoarece matricea (A.18) este fundamentală. Rezolvînd sistemul (A.21), constantele C_{ij} sînt date de expresiile

$$\begin{aligned} C_{11} &= (\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3)/D, \\ C_{12} &= (\gamma_2\alpha_3 - \alpha_2\gamma_3)/D, \\ C_{13} &= (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)/D, \\ C_{21} &= (\gamma_1\beta_3 - \beta_1\gamma_3)/D, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{22} &= (\alpha_1\gamma_3 - \gamma_1\alpha_3)/D,\\
C_{23} &= (\beta_1\alpha_3 - \alpha_1\beta_3)/D,\\
C_{31} &= (\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2)/D,\\
C_{32} &= (\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)/D,\\
C_{33} &= (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)/D
\end{aligned}
\tag{A.23}
$$

Avînd în vedere relaţiile A.19), rezultă că matricea fundamentală Φ este definită. Elementele sale sînt

$$\varphi_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{3} C_{jk} f_{ik}(t), \tag{A.24}$$

constantele C_{jk} fiind date în (A.23), iar matricea $F = (f_{ij})$ este dată în (A.18).

Primit la redacţie la 22 februarie 1986

INTEGRALE PRIME ALE ECUAȚIILOR MIȘCĂRII VEHICULULUI SPAȚIAL ÎN PREZENȚA UNUI CENTRU ATRACTIV

de I. STROE
Institutul Politehnic, București

În lucrare sînt analizate, cu ajutorul integralelor prime, aspecte ale mișcării vehiculului spațial, considerat corp rigid, în prezența unui centru atractiv. Pentru cazul particular al mișcării plane se stabilesc ecuații care dau coordonatele centrului de masă pentru o mișcare în jurul centrului de masă dată.

1. INTRODUCERE

Se consideră cazul mișcării vehiculului spațial sub acțiunea forțelor și a momentelor gravitaționale date de potențialul gravitațional datorat prezenței unui punct sau unei sfere omogenă (centrul atractiv) și un corp (vehiculul spațial) cu distribuție de masă cunoscută și masa mică în raport cu cea a centrului atractiv. Pentru mișcarea generală se pun în evidență integralele energiei și ale momentului cinetic. În cazul mișcării plane, în care vehiculul are o viteză ungiulară în jurul unei axe perpendiculare pe planul orbitei, se stabilesc ecuații care dau variațiile coordonatelor centrului de masă. Se consideră cunoscută mișcarea de bază, din aproximația punctului material, precum și mișcarea în jurul centrului de masă.

2. INTEGRALE PRIME ALE ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

2.1. CAZUL GENERAL

Mișcarea generală a vehiculului spațial este o mișcare cu șase grade de libertate, specifice rigidului liber.

Mișcarea de bază a centrului de masă, cea în care vehiculul este asimilat cu un punct material, este precizată prin coordonatele polare r_{V_0}, ν^0, orbita fiind plană. În mișcarea generală centrul de masă are cota Z față de planul mișcării de bază (fig. 1), iar mișcarea de rotație în jurul centrului de masă este precizată prin unghiurile, ψ, φ, θ, [5].

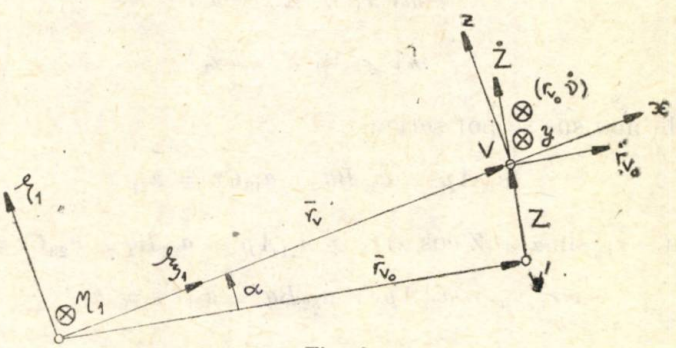


Fig. 1

O integrală primă a mișcării este integrala energiei,

$$E + V = \alpha_1, \tag{2.1}$$

în care

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}_{V_0}^2 + r_{V_0}^2 \dot{\nu}_0^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}Ap^2 + \frac{1}{2}Bq^2 + \frac{1}{2}Cr^2,$$

$$V = -\mu\frac{m}{r_V} - \frac{\mu}{2r_V^3}[A + B + C - 3(a_{11}^2 A + a_{12}^2 B + a_{13}^2 C)]. \tag{2.2}$$

În relațiile de mai sus, A, B, C, sînt momente de inerție centrale-principale, p, q, r, proiecțiile vitezei unghiulare absolute pe axele principale, iar a_{ij} sînt cosinușii directori ai axelor centrale-principale, precizați în [5]. Vitezele unghiulare p, q, r, sînt date de relațiile :

$$\begin{aligned} p &= a_{11}\dot{\psi} - \dot{\theta}\sin\varphi + a_{31}\dot{\nu}, \\ q &= a_{12}\dot{\psi} + \dot{\varphi} + a_{32}\dot{\nu}, \\ r &= a_{13}\dot{\psi} + \dot{\theta}\cos\varphi + a_{33}\dot{\nu}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Deoarece mișcarea se face în prezența centrului atractiv O, momentul forțelor gravitaționale față de acest punct este nul, deci momentul cinetic față de O este constant, ceea ce se scrie :

$$K_{\xi_1} = \alpha_2, \quad K_{\eta_1} = \alpha_3, \quad K_{\zeta_1} = \alpha_4. \tag{2.4}$$

Introducînd componentele momentului cinetic față de triedrul de bază V_{xyz}, obținem :

$$\begin{aligned} K_x &= \alpha_2, \\ -mV_z r_V + K_y &= \alpha_3, \\ mV_y r_V + K_z &= \alpha_4. \end{aligned} \tag{2.4'}$$

Relațiile de mai sus se pot scrie :

$$\begin{aligned} a_{11}Ap + a_{12}Bq + a_{13}Cr &= \alpha_2, \\ -m(-\dot{r}_{V_0}\sin\alpha + \dot{Z}\cos\alpha)r_V + a_{21}Ap + a_{22}Bq + a_{23}Cr &= \alpha_3, \\ mr_{V_0}^2\dot{\nu}_0 + a_{31}Ap + a_{32}Bq + a_{33}Cr &= \alpha_4, \end{aligned} \tag{2.5}$$

cu

$$r_V^2 = r_{V_0}^2 + Z^2, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{Z}{r_{V_0}}. \tag{2.6}$$

În (2.5) s-au introdus componentele vitezei pe axele triedrului $Vxyz$:

$$V_x = \mathring{r}_{V_0} \cos\alpha + \mathring{Z} \sin\alpha,$$

$$V_y = r_{V_0} \mathring{\nu}_0, \tag{2.7}$$

$$V_z = -\mathring{r}_{V_0} \sin\alpha + \mathring{Z} \cos\alpha.$$

Integrala energiei (2.1), împreună cu integralele momentului cinetic (2.5), permit studiul unor influențe reciproce ale mișcării pe traiectorie și mișcării în jurul centrului de masă.

Dacă presupunem că mișcarea centrului de masă nu este influențată de mișcarea în jurul centrului de masă, introducînd în (2.5),

$$\alpha = 0, \quad \mathring{Z} = 0, \tag{2.8}$$

$$\nu_0 = \nu; \quad r_{V_0} = r_V,$$

obținem integralele momentului cinetic sub forma:

$$a_{11}Ap + a_{12}Bq + a_{13}Cr = \alpha_2,$$

$$a_{21}Ap + a_{22}Bq + a_{23}Cr = \alpha_3, \tag{2.5'}$$

$$mr_V^2 \mathring{\nu} + a_{31}Ap + a_{32}Bq + a_{33}Cr = \alpha_4.$$

În principiu, ecuațiile de mai sus se pot rezolva în raport cu vitezele unghiulare p, q, r și mai departe, folosind relațiile (2.3) se pot determina derivatele $\mathring{\psi}$, $\mathring{\varphi}$, $\mathring{\theta}$ exprimate în funcție de ψ, φ, θ și elementele orbitei ν, r_V. Metoda are avantajul obținerii unui sistem neliniar de ecuații diferențiale de ordinul întîi. În multe lucrări se obțin ecuații de ordinul doi pentru mișcarea în jurul centrului de masă, prin introducerea unor momente gravitaționale corespunzătoare energiei potențiale date de (2.2). Pentru cazul în care vehiculul execută mici oscilații în jurul unei axe perpendiculare pe planul orbitei și traiectoria centrului de masă este o elipsă, se utilizează ecuația ([1])

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\theta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\theta}{d\nu} + 3\frac{B-A}{C}\theta = 2e\sin\nu. \tag{2.9}$$

Indiferent de metoda folosită, rămîne o integrală, integrala energiei (2.1), care arată că, în general, traiectoria reală a centrului de masă nu este traiectoria de bază.

Putem proceda și invers, presupunînd cunoscută mișcarea în jurul centrului de masă, dată de (2.9) și ecuații similare pentru mici oscilații în jurul celorlalte două axe, să folosim integralele prime (2.1), (2.5) pentru a studia influența rotației asupra traietoriei. Se observă că prima integrală

(2.5), care exprimă conservarea momentului cinetic față de axa ce unește centrul atractiv cu centrul de masă al vehiculului este independentă de elementele traiectoriei. În aceste condiții, folosind (2.6), sistemul format de integrala energiei (2.1) și ultimele două integrale (2.5), poate fi privit ca un sistem de trei ecuații diferențiale neliniare, cu necunoscutele ν_0, r_{V_0}, Z, elementele orbitei.

2.2. CAZUL MIȘCĂRII PLANE

În cazul mișcării plane vom considera că vehiculul are o mișcare de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul orbitei de bază, ceea ce face ca traiectoria reală să rămînă plană. Integralele prime (2.1), (2.5), devin, în cazul mișcării plane,

$$\frac{m}{2}(\dot{r}_V^2 + r_V^2\dot{\nu}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\theta}+\dot{\nu})^2 - \mu\frac{m}{r_V} -$$

$$-\frac{\mu}{2r_V^3}(A+B+C-3A\cos^2\theta-3B\sin^2\theta) = \alpha_1,$$

$$mr_V^2\dot{\nu} + C(\dot{\theta}+\dot{\nu}) = \alpha_4. \tag{2.10}$$

Considerînd mișcarea de rotație cunoscută, putem rezolva sistemul de mai sus în raport cu $\dot{r}_V\dot{\nu}$:

$$\dot{r}_V = \left[\frac{2\alpha_1}{m} + \frac{2\mu}{r_V} + \frac{\mu}{mr_V^3}(A+B+C-3A\cos^2\theta-3B\sin^2\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{C}{m}(\dot{\theta}+\dot{\nu})^2 - r_V^2\dot{\nu}^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.10'}$$

$$\dot{\nu} = \frac{\alpha_4 - C\dot{\theta}}{mr_V^2+C}.$$

În prima ecuație de mais sus, $\dot{\nu}$ se poate introduce din a doua ecuație.

Folosind argumentul ν^0 al centrului de masă din mișcarea de bază, putem trece la variabile t la ν^0, prin

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{d\nu^0}\dot{\nu}^0 = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(1+e\cos\nu^0)^2\frac{dX}{d\nu^0}, \tag{2.11}$$

și ecuațiile de mai sus devin :

$$\frac{dr_V}{d\nu^0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(1+e\cos\nu^0)^2}\left[\frac{2\alpha_1}{m} + \frac{2\mu}{r_V}(A+B+C-3A\cos^2\theta-3B\sin^2\theta - \right.$$

$$-\frac{C}{m}\frac{\mu}{p^3}(1+e\cos\nu^0)^4\left(\frac{d\theta}{d\nu^0}+\frac{d\nu}{d\nu^0}\right)^2 -$$

$$\left. - r_V^2\frac{\mu}{p^3}(1+e\cos\nu^0)^4\left(\frac{d\nu}{d\nu^0}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{2.10''}$$

$$\frac{d\nu}{d\nu^0} \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(1 + e\cos\nu^0)^2} \cdot \frac{\alpha_4 - C\sqrt{\frac{\mu}{p^3}}(1 + e\cos\nu^0)^2 \frac{d\theta}{d\nu^0}}{mr_V^2 + C}.$$

În ecuațiile de mai sus este cunoscută funcția $\theta = \theta(\nu^0, r_{V_0})$. Pentru mici oscilații, aceasta este dată de (2.9), în care se înlocuiesc ν, r_V cu ν^0, respectiv r_{V_0}, coordonatele centrului de masă în mișcarea de bază.

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. BELEȚKII, *O librații sputnika*, Iskusstvennie sputniki Zemli, vip. 3 (1959).
2. D. BROUWER, G. M. CLEMENCE, *Methos of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London, 1961.
3. M. M. NIȚĂ, *Teoria zborului spațial*, Editura Academiei R. S. România, București, 1973.
4. I. STROE, *Asupra mișcării plane în prezența unui centru atractiv*, St. cerc. mec. apl., **44**, 5 (1985).
5. I. STROE, *Perturbațiile mișcării centrului de masă al vehiculului spațial date de mișcarea în jurul centrului de masă*, St. cerc. mec. apl., **44**, 6 (1985).
6. I. STROE, *Influența distribuției de masă și a armonicei gravitaționale J_2 asupra mișcării vehiculației spațial pe orbite ecuatoriale circulare*, St. cerc. mec. apl., **45**, 1 (1986).

ASUPRA COMPORTĂRII STRATULUI DE MATERIAL GRANULAR SUPUS CERNERII PE SITA CIURURILOR CU MIȘCARE DE RULIU

de GH. ENE, M. RENERT
Institutul Politehnic, București

Lucrarea își propune stabilirea unui model matematic, care să descrie comportarea stratului de material granular pe sita ciururilor cu mișcare de ruliu, plecînd de la o ecuație vectorială generală utilizată frecvent pentru modelarea unor macroprocese mecanice (clasare și separare, amestecare, transport, mărunțire).
În urma unor determinări experimentale, realizate pe un model de ciur cu mișcare de ruliu de o concepție originală, s-au obținut, în anumite condiții, valori ale coeficienților de difuzie și de segregare care caracterizează procesul de cernere pe sita ciurului cu ruliu și s-a evidențiat o anume dependență între comportarea unei granule individuale și comportarea colectivului de granule supus cernerii.

1. GENERALITĂȚI

În literatura de specialitate sînt studiate pe larg ciururile vibratoare cu site plane dreptunghiulare (dinamica ciurului, comportarea granulei individuale pe sită și, chiar, comportarea stratului). Ciururile cu mișcare de ruliu a sitei, apărute relativ recent, sînt mai puțin studiate. La aceste ciururi sita (plană și circulară) are o mișcare vibratoare spațială care imită ciuruirea manuală (mișcare de ruliu). Datorită avantajelor pe care le prezintă: separare foarte bună a diferitelor fracțiuni granulometrice, îndeosebi la cernerea unor materiale „dificile" (materiale umede, fin dispersate, încărcate electrostatic, fibroase etc.). simplitate constructivă, o mare flexibilitate în ceea ce privește modificarea parametrilor regimului vibrator, permițînd adaptarea lesnicioasă a ciurului pentru cernerea celor mai diferite materiale etc., ciururile cu mișcare de ruliu au căpătat repede o largă utilizare în cele mai diverse industrii; industria chimică (materiale plastice, coloranți etc.), industria farmaceutică, industria materialelor de construcții (ciment, ceramică, materiale refractare etc.), industria minieră (prepararea minereurilor), industria alimentară (prepararea conservelor, sucurilor de fructe), industria textilă, industria celulozei și hîrtiei, zootehnie (prepararea nutrețurilor etc.), epurarea apelor reziduale (deshidratarea unor nămoluri) etc.

Traiectoria unei granule pe sita cu mișcare de ruliu este o curbă buclată a cărei înfășurătoare este o spirală logaritmică și este specifică acestui tip de ciur. Mișcarea granulei individuale pe sită este diferențiată în funcție de valoarea locală a accelerației verticale. În zona centrală a sitei, care se extinde pînă la o rază la care accelerația verticală este încă sub valoarea accelerației gravitației, granula se mișcă alunecînd pe sită, fără desprindere, spre periferia sitei; de la o rază la care accelerația verticală depășește valoarea accelerației gravitației, granula se deplasează pe sită prin salturi. În funcție de parametrii regimului vibrator, granula se poate mișca, în cazul unui ciur dat, fie numai prin alunecare, fie prin

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 5, 1986, P. 490–498

alunecare și salt. Raza la care are loc desprinderea granulei (saltul) este dată de relația

$$R = r_s + \frac{g}{\omega^2 \gamma}, \tag{1}$$

unde r_s este excentricitatea centrului sitei; g — accelerația gravitației, ω — viteza unghiulară a arborelui ciurului (frecvența oscilațiilor); γ — unghiul dintre axa arborelui și axa ciurului (înclinarea sitei față de planul orizontal).

Există mai multe tipuri constructive de ciururi cu mișcare de ruliu. Unul dintre ele [1], care a fost studiat în profunzime [2], este prezentat în figura 1.

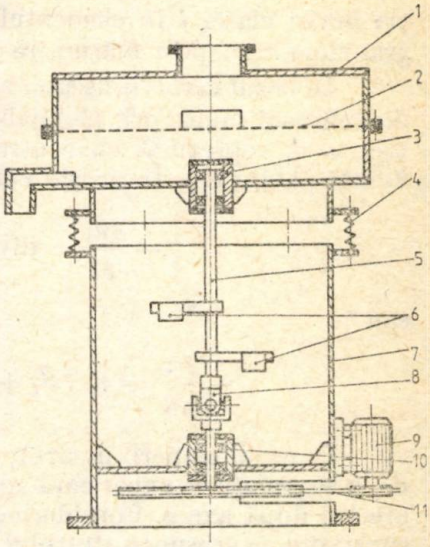


Fig. 1. — Ciur cu mișcare de ruliu: *1* — carcasa sitei; *2* — sita; *3* — lagăr superior; *4* — arcuri; *5* — arbore; *6* — mase excentrice; *7* — suport; *8* — cuplaj cardanic; *9* — motor electric; *10* — lagăr inferior; *11* — transmisie cu curele trapezoidale.

2. STABILIREA MODELULUI MATEMATIC, CARE DESCRIE COMPORTAREA STRATULUI DE MATERIAL PE SITA CIURULUI CU MIȘCARE DE RULIU

S-a constatat practic că există o mare deosebire între comportarea granulei individuale și comportarea stratului de material. Comportarea diferită a granulelor în strat față de comportarea granulei individuale se datorește *efectului de strat* (adică „angrenării" granulei individuale în masa celorlalte granule), care este determinat de deosebirile de formă, dimensiuni și, eventual, de densitate dintre granule. Comportarea stratului este deosebit de complicată îndeosebi la mașinile la care deplasarea materialului se realizează cu salturi pe sită.

În literatura de specialitate este frecvent citată ecuația vectorială:

$$-\frac{\partial(m_v \cdot \mu_i)}{\partial t} = \operatorname{div}(m_v \mu_i \bar{S}_i) - \operatorname{div}[D_i \operatorname{grad}(m_v \mu_i)] - G_i \tag{2}$$

pentru modelarea unor procese mecanice, cum ar fi procesele de clasare și separare [3] — [6], amestecare [7], [8], transport [9], mărunțire [10].

Ecuația (2) corespunde tuturor cerințelor pe care trebuie să le satisfacă ecuația unui macroproces mecanic și anume reflectă microprocesele esențiale: variații ale masei de substanță, datorită transportului convectiv (primul termen din membrul drept); variații ale masei de substanță datorită transportului difuziv (al doilea termen din membrul drept); variații ale compoziției granulometrice datorite mărunțirii sau aglomerării (al treilea termen din membrul drept), dependența lor de loc și de timp și interacțiunea lor.

În ecuația (2) intervin următoarele mărimi : m_v — masa totală a particulelor existente într-un element de volum ; μ_i — cota parte de masă a clasei i de particule în elementul de volum ; $\bar{S}_i$ — viteza de transport a particulelor clasei i în elementul de volum (coeficientul de segregare) ; D_i — coeficientul de difuzie a clasei i în elementul de volum ; G_i — variația masei clasei i în elementul de volum datorită modificării spectrului granulometric, prin mărunțire sau aglomerare.

În cazul cernerii uscate, aglomerarea și mărunțirea particulelor sînt, de cele mai multe ori, neglijabile și se poate considera $G_i = 0$. Produsul $m_v\mu_i = u_i$ reprezintă concentrația particulelor clasei i în elementul de volum [11], [12]. În aceste condiții, ecuația (2) devine

$$-\frac{\partial u_i}{\partial t} = \operatorname{div}(u_i\bar{S}_i) - \operatorname{div}[D_i \operatorname{grad} u_i] \tag{3}$$

sau

$$-\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i\nabla\bar{S}_i + \bar{S}_i\nabla u_i - D_i\Delta u_i - \nabla u_i\nabla D_i. \tag{4}$$

În cazul cernerii în strat, granulele mărunte se strecoară prin acesta de la suprafața sa superioară spre sită, deci se poate considera că mișcarea are loc după axa z. Considerînd că $\bar{S}_i$ și D_i nu depind de z (sînt mărimi constante pe grosimea stratului de material și au valorile S_z și D_z), relația (4) devine, pentru o clasă oarecare de particule :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - S_z\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{5}$$

Se ajunge astfel la cunoscuta ecuație Fokker-Planck-Kolmogorov, utilizată pentru modelarea diferitelor procese mecanice ce decurg după o axă [11] — [17].

Poziția unei granule de o anumită dimensiune pe adîncimea stratului de material de pe sită se poate defini prin coordonata z măsurată de la suprafața stratului (fig. 2.). Mișcarea granulei în timp, prin strat, este o mișcare de oscilație nesimetrică pe direcția z și este definită de variațiile acestei coordonate. În ipoteza că această mișcare a granulei este un proces stohastic de tip Markov (proces aleator fără postacțiune, adică un proces stohastic pentru care repartiția viitoare a probabilității depinde numai de starea actuală și nu de cea trecută), ea poate fi descrisă prin ecuația Fokker-Planck-Kolmogorov. În acest caz, pentru o mișcare asimetrică a granulelor, datorită acțiunii unor cîmpuri de potențial și a unor curenți de potențial, mărimea $u(z, t)$ dobîndește semnificația densității de pro-

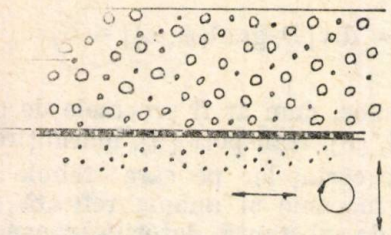


Fig. 2. — Definirea poziției unei granule în profunzimea stratului.

babilitate a poziției granulei, iar valoarea ei trebuie căutată ca soluție a ecuației diferențiale (5).

Făcînd ipoteza că, la momentul inițial ($t = 0$), granulele fracțiunii fine care urmează să treacă prin strat se găsesc plasate într-un strat subțire la suprafața stratului ($z = 0$) și că atunci cînd ajung la sită ($z = h$) mișcarea lor se încheie [$u(h, t) = 0$] ele trecînd imediat și în totalitate prin aceasta (rezistența opusă de sită trecerii fracțiunii fine fiind neglijabilă), se pot scrie următoarele condiții la limită pentru rezolvarea ecuației (5) [13], [15] (fig. 2)

$$z = 0; \quad t = 0; \quad u(0, 0) = \delta(h - t) \text{ *)}$$

$$z = h; \quad t > 0; \quad u(h, t) = 0. \tag{6}$$

Ținînd seama de condițiile la limită (6), soluția ecuației diferențiale (5) este [13]) :

$$u = \frac{1}{4\sqrt{\pi D_z t}} \left[e^{-\frac{(z-h-S_z t)^2}{4D_z t}} - e^{-\frac{(z+h-S_z t)^2 + 4S_z h t}{4D_z t}} \right]. \tag{7}$$

Probabilitatea ca o granulă din fracțiunea fină să se găsească la timpul t în intervalul $0 \leqslant \xi \leqslant z$ este

$$P(z, t) = \int_0^z u(\xi, t)\, d\xi. \tag{8}$$

Probabilitatea ca granula din fracțiunea fină să ajungă la sită și să treacă prin aceasta (probabilitatea evacuării fracțiunii fine) este mărimea complementară în sensul teoriei probabilității

$$P_i(z, t) = 1 - P(z, t). \tag{9}$$

Densitatea acestei probabilități este

$$q(z, t) = \frac{\partial P_i(z, t)}{\partial t} \tag{10}$$

și reprezintă de fapt debitul de fracțiune fină care trece prin unitatea de arie a sitei.

Ținînd seama de relațiile (5), (8) și (9), relația (10) devine :

$$q(z, t) = - D_z \frac{\partial u}{\partial z} + S_z u. \tag{11}$$

Relația (11) se poate obține și prin integrarea ecuației (3) în cazul unui proces staționar de separare care are loc după axa z.

*) Prin $\delta(h - z)$ s-a notat funcția δ (Dirac). Ea este nulă peste tot cu excepția — aici — a unui strat foarte subțire la suprafața stratului de material ($z = 0$) unde are valorea 1.

Eficienţa cernerii, pentru fracţiunea fină considerată, ε (probabilitatea evacuării fracţiunii fine) este

$$\varepsilon = \int_0^t q(z, t)\, dt = \int_0^t \left[- D_z \frac{\partial u}{\partial z} + S_z u \right]_{z=h} dt. \tag{12}$$

Ţinînd seama de expresia (7), relaţia (12) devine, după transformări [13],

$$\varepsilon = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^H e^{-\left(x - \frac{\bar{h}}{x}\right)^2} dx, \tag{13}$$

unde

$$H = \frac{h}{2\sqrt{D_z t}} \tag{14}$$

(t fiind timpul de cernere)
şi

$$\bar{h} = \frac{S_z}{D_z} \cdot \frac{h}{4}. \tag{15}$$

Relaţia (13) se reprezintă grafic în funcţie de parametrii adimensionali H şi $\bar{h}$ (fig. 3) [13].

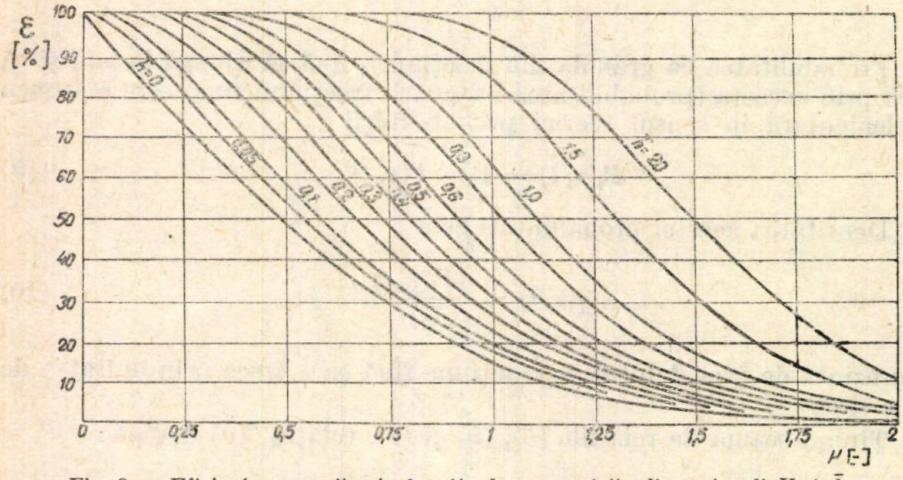


Fig. 3. — Eficienţa cernerii ε în funcţie de parametrii adimensionali H şi $\bar{h}$.

Din cele ce preced se observă că procesul de cernere reprezintă o suprapunere a unui proces de difuzie (amestecare), caracterizat prin coeficientul D_z şi un proces de segregare, caracterizat prin coeficientul S_z. Procesul de difuzie este reprezentat de mişcarea de coborîre cu oscilaţii nesimetrice a granulelor fine pe direcţie perpendiculară pe suprafaţa sitei, din domeniul concentraţiilor mai mari către cel al concentraţiilor

mai mici, și determină deci un gradient de concentrație. În acest mod „sărăcirea" în fracțiune fină ce are loc în apropierea sitei este compensată prin difuzia granulelor din straturile superioare, de concentrație mai mare. Coeficientul de difuzie D_z depinde în foarte mare măsură de dimensiunea și forma granulelor și de gradul de afinare al stratului (și deci depinde de toți factorii care produc o bună afinare a acestuia) [13], [15]. Procesul de segregare apare sub influența unui cîmp de potențial (cîmpul gravitațional) sau a unui curent de potențial (un curent de aer, de exemplu). În aceste condiții granulele fine nu mai realizează oscilații simetrice ci se deplasează în direcția vectorului cîmpului. Coeficientul de segregare S_z depinde și el, în afara factorilor precizați mai sus, de existența unor curenți de potențial.

Pentru ca o fracțiune fină oarecare să treacă prin sită cu o eficiență a cernerii cît mai mare, trebuie asigurate valori cît mai mari pentru coeficienții D_z și S_z. Acestea se obțin în primul rînd printr-o bună afinare a stratului de material, ceea ce se realizează prin alegerea corespunzătoare a parametrilor funcționali ai ciurului (amplitudinea și frecvența vibrațiilor), cît și prin utilizarea unor dispozitive auxiliare : curenți de aer orientați, diverse mecanisme de scuturare a sitei etc.

Relațiile (11) și (13) au valoare pactică pentru proiectarea mașinilor de cernut numai dacă, pentru cazul concret dat, sînt cunoscuți coeficienții D_z și S_z.

Pentru determinarea acestor coeficienți se pleacă de la premisa că, în stratul de material granular de pe sită, s-a instaurat un echilibru staționar și că sistemul este închis (în spațiul supus bilanțării nu intră noi particule în afara celor existente acolo). În aceste condiții rezultă că [16]

$$D_z \frac{\partial u}{\partial z} + S_z u = \text{const} = 0, \tag{16}$$

din care prin integrare se obține

$$\frac{S_z}{D_z} = -\frac{1}{z} \ln \frac{u}{u_0}, \tag{17}$$

unde u_0 este concentrația fracțiunii fine la suprafața stratului de material de pe sită, iar u concentrația aceleiași fracțiuni la cota z, în profunzimea stratului.

Cunoscînd mărimile u_0, u și z, care se pot determina prin măsurări, se calculează, utilizînd relațiile (14), (15), (17) și figura 3, valorile coeficienților D_z și S_z.

3. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE

Pentru determinarea coeficienților D_z și S_z s-a utilizat un ciur cu ruliu conform schemei constructive din figura 1. Ciurul a fost dotat cu o sită din țesătură de sîrmă de oțel cu grosimea firului de 0,3 mm și dimensiunea ochiului de 1,5 mm. Este vorba deci, despre o sită subțire, care opune o rezistență neglijabilă trecerii fracțiunii fine. Aria suprafeței sitei a fost de 0,25 m^2. Pentru a stabili modul de variație al coeficienților D_z și S_z în diferite le zone ale sitei, spațiul de sub aceasta a fost compartimentat

prin pereți circulari concentrici în patru zone inelare, cu razele medii de 80; 145; 210; 260 mm. Acestea, la rîndul lor au fost împărțite, prin pereți radiali, în cîte opt compartimente fiecare.

Regimul vibrator al ciurului s-a caracterizat prin $\gamma = 0{,}055$ rad (ceea ce permite ca mișcarea materialului să se facă atît prin alunecare pe sită, în zona centrală a acesteia, cît și prin salturi spre perifeririea ei) și $\omega = 15$; 30 și 45 s^{-1}.

S-a utilizat pentru experimente un material granular „sintetic", constituit din nisip cuarțos cu granule de formă aproximativ sferoidală. Stratul de material de pe sită a avut granulația de 1,6 ... 2,0 mm, iar fracțiunea fină a avut, pe rînd, granulația 0,08 ... 0,16 mm; 0,16 ... 0,50 0,50 ... 1,00 mm.

Fracțiunea fină s-a depus într-un strat subțire, uniform, la suprafața stratului de material de pe sită (concentrația ei la suprafața stratului fiind deci cunoscută). Timpul de cernere a fost $t = 5$; 10; 15 s. La fiecare cernere fracțiunea fină trece prin stratul de material și cade în compartimentele de sub sită. S-a determinat, cu o balanță de laborator, masa fracțiunii fine din fiecare compartiment, iar cu valoarea obținută concentrația fracțiunii fine la limita inferioară a stratului. Cunoscînd concentrația fracțiunii fine la limita superioară și la cea inferioară a stratului, se pot determina, utilizînd relațiile prezentate anterior, coeficienții D_z și S_z. O parte a rezultatelor obținute, reprezentate grafic, sînt prezentate în figurile 4, 5 și 6.

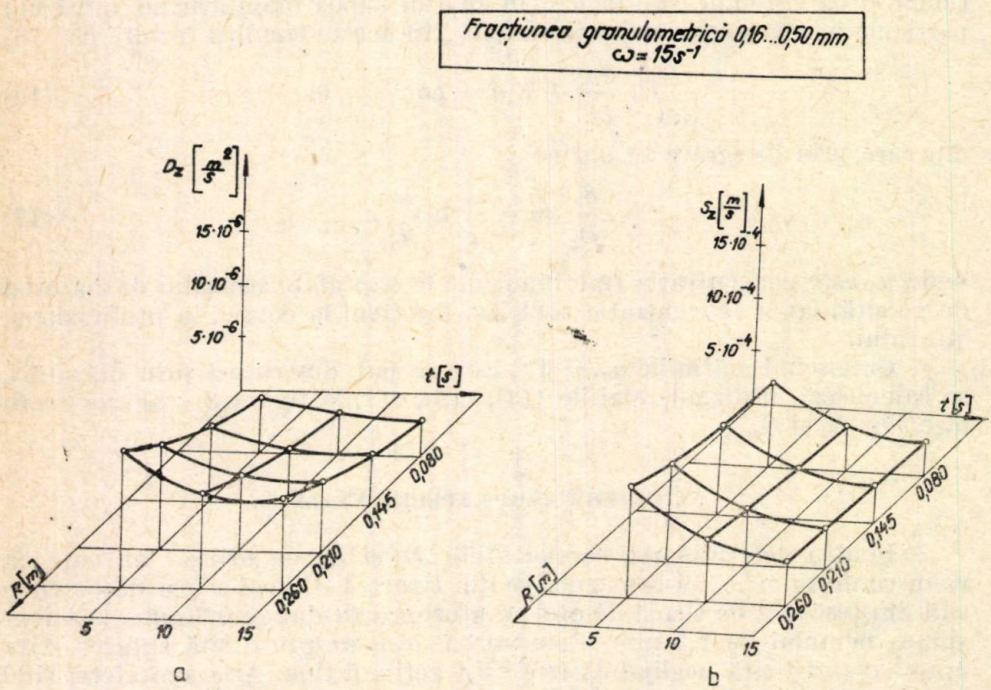


Fig. 4. — Variația coeficienților de difuzie și de segregare în funcție de timpul de cernere și de raza sitei pentru frecvența vibrațiilor $\omega = 15\ s^{-1}$: *a* — coeficientul D_z; *b* — coeficientul S_z.

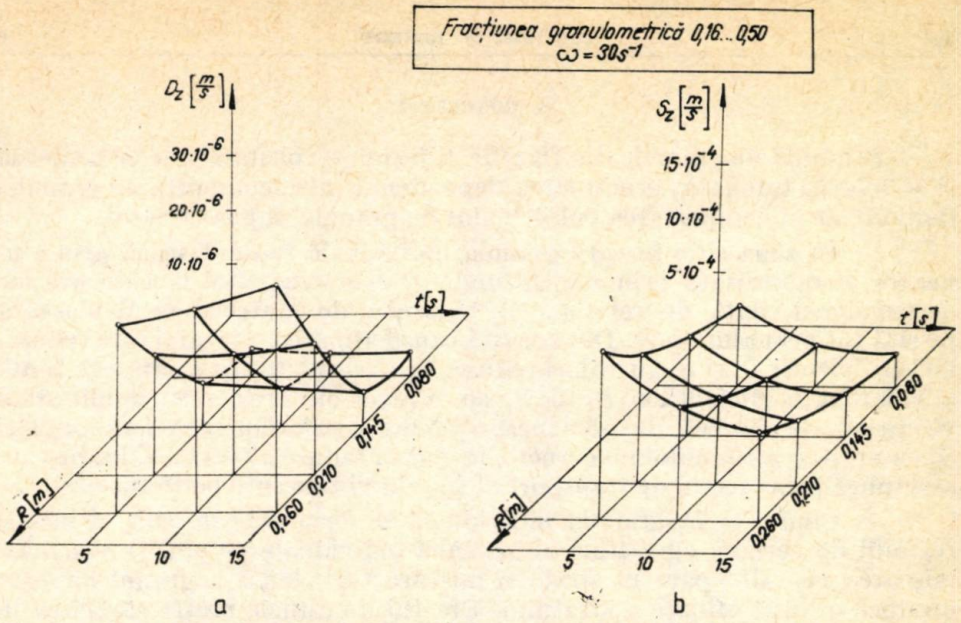


Fig. 5. — Variația coeficienților de difuzie și de segregare în funcție de timpul de cernere și de raza sitei pentru frecvența vibrațiilor $\omega = 30\ s^{-1}$: *a* — coeficientul D_z; *b* — coeficientul S_z.

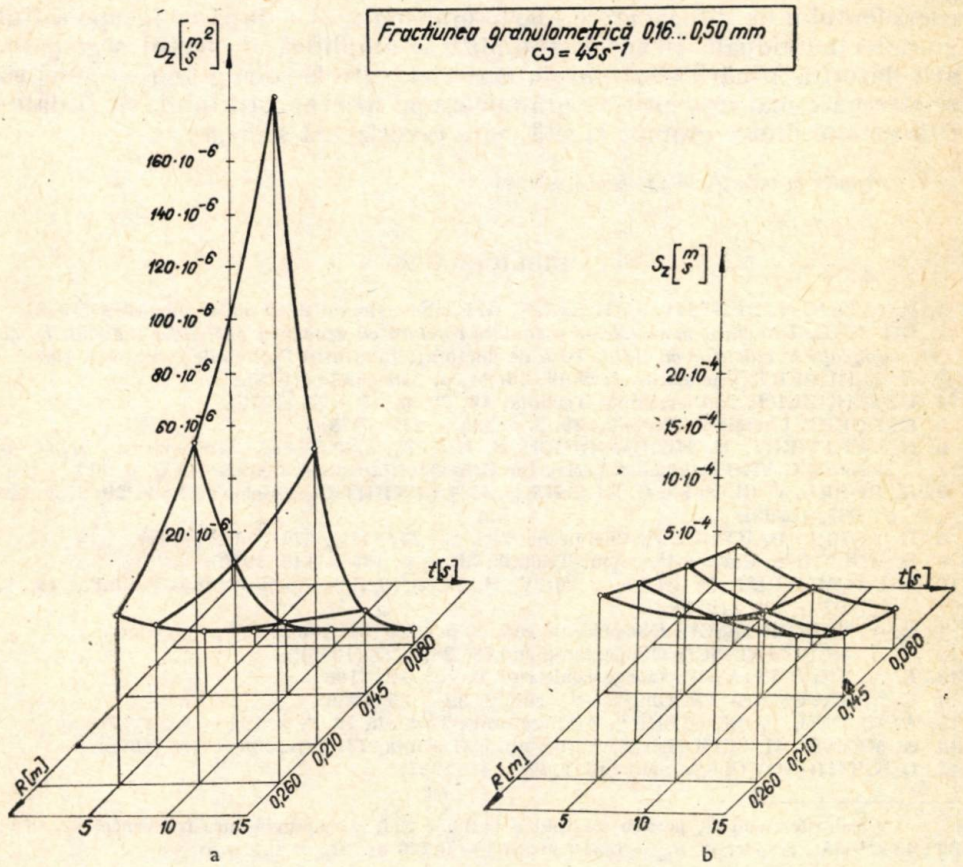


Fig. 6. — Variația coeficienților de difuzie și de segregare în funcție de timpul de cernere și de raza sitei pentru frecvența vibrațiilor $\omega = 45\ s^{-1}$: *a* — coeficientul D_z; *b* — coeficientul S_z.

4. CONCLUZII

Studiind diagramele din figurile 4, 5 și 6 se constată cele ce urmează și se relevă, totodată, următoarea dependență între comportarea granulei individuale și comportarea colectivului de granule supus cernerii.

— În zona sitei în care granula individuală se deplasează prin alunecare, caracterizată prin $r < R$ (unde R este raza sitei la care are loc desprinderea, dată de relația (1)), *) stratul de material se deplasează pe sită tot prin alunecare. Din această cauză afinarea stratului este redusă, iar coeficienții D_z și S_z au valori reduse. Se observă totuși o creștere lentă a valorilor coeficienților D_z și S_z cu r (deci cu creșterea amplitudinii vibrației). Se observă, de asemenea, o scădere a valorilor coeficienților D_z și S_z cu creșterea timpului de cernere la valori reduse ale razei r, lucru care se explică prin efectul de transport al fracțiunii fine spre periferia sitei.

— Cînd $r = R$, granula individuală se desprinde de sită și începe regimul de cernere cu salturi al granulei individuale pe sită ($r > R$). La mișcarea cu salt apare în strat o mișcare turbulentă a granulelor care produce o bună afinare a stratului. Efectul de difuzie crește sărăcirea în granule fine care are loc la suprafața sitei fiind compensată prin difuzia granulelor fine din zonele superioare ale stratului. Ca urmare, valorile coeficientului de difuzie cresc foarte mult cu raza r după ce începe saltul granulei individuale. În aceleași condiții se amplifică și efectul segregare, atît datorită afinării stratului de material, care face ca granulele mici să se strecoare mai ușor printre granulele mai mari ale stratului, cît și datorită șocului dintre granule și sită, care favorizează segregarea.

Primită la redacție la 24 octombrie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. R. IATAN, M. RENERT, I. GUERON, GH. ENE, Brevet de invenție nr. 67497/1978.
2. GH. ENE, *Dinamica materialelor granulare corelată cu dinamica particulei individuale, cu aplicație la ciururile cu ruliu*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1984.
3. H. SCHUBERT, Chemische Technik, **30**, 11, p. 550 — 554 (1978).
4. H. SCHUBERT, Aufbereitungs-Technik, **18**, 22, p. 47 — 55 (1977).
5. H. ROBEL, Chemische Technik, **30**, 5, p. 245 — 247 (1978).
6. H. SCHUBERT, E. HEIDENREICH F. LIEPE, T. NEEßE, *Mechanische Verfahrenstechnik*, **I**, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, 1977, p. 117 — 126.
7. H. ROBEL, V. CLAUSS, C. KUCHLER, K. LUCKERT Chemische Technik, **20**, 9, p. 529 — 537, (1968).
8. H. ROBEL, BARTHEL E. Chemische Technik, **21**, 11, p. 576 — 682 (1969).
9. O. MOLERUS, Chemie-Ingenieur-Technik, **38**, 2, p. 137 — 145 (1966).
10. S. BAUMGARDT, B. BUSS, P. MAY, H. SCHUBERT, Aufbereitungs-Technik, **16**, 8, p. 397 — 400 (1975).
11. E. A. NEPOMNIAȘCII, Obogașcenie rud, 5, p. 27 — 32 (1960).
12. E. A. NEPOMNIAȘCII Obogașcenie rud, 6, 26 — 27 (1966).
13. E. A. NEPOMNIAȘCII, Obogașcenie rud, 6, 20 — 23 (1963).
14. E. A. NAPOMNIAȘCII Obogașcenie rud, 2, 32 — 35 (1956).
15. A. MEINEL, N. SCHUBERT, Aufbereitungs-Technik, **12**, 3, p. 128 — 123 (1971).
16. A. MEINEL H. SCHUBERT, AufbereitungsTechnik, **13**, 7, p. 408 — 416 (1872).
17. O. N. TIHONOV Obogașcenie rud, 1, 47 — 49 (1968).

*) Valorile razei R, pentru unghiul $\gamma = 0{,}055$ rad, corespunzătoare frecvenței $\omega = 15$; 30 ; 45 s^{-1} sînt, respectiv, $R_{15} = 0{,}810$ m ; $R_{30} = 0{,}220$ m ; $R_{45} = 0{,}110$ m.

CALCULUL EFORTURILOR AXIALE LA PRINDEREA ÎN PENE A GARNITURII DE FORAJ

de V. CÎRTOAJE, L. AVRAM
Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

Odată cu creșterea adîncimii de foraj se constată o mărire a frecvenței de rupere a prăjinilor de foraj în zona de suspendare a garniturii în pene. Legat de acest fapt, în lucrare este prezentată o metodă de calcul al valorii efortului axial care ia naștere în garnitura de foraj la prinderea acesteia în pene. Cunoașterea solicitării axiale maxime permite estimarea mai exactă a caracteristicilor tehnice și de rezistență pe care trebuie să le aibă garnitura și penele astfel încît să se evite deformarea plastică și curgerea pe suprafața exterioară a prăjinilor în zona de împănare.

1. INTRODUCERE

Fie G_1 forța axială de întindere a garniturii în zona de fixare în pene, F_s — forța totală de strîngere a garniturii, F_n — forța normală totală exercitată de pătratul mesei rotative asupra penelor, iar F_f forța de frecare totală dintre aceste două corpuri (fig. 1).

Avînd în vedere valoarea ridicată a forței de frecare dintre bacurile penelor și corpul prăjinilor de foraj, putem scrie relația de echilibru

$$G_1 = F_n \sin\alpha + F_f \cos\alpha, \qquad (1)$$

unde α reprezintă unghiul de înclinare al fețelor exterioare ale penelor. Ținînd seama de relația

$$F_f = F_n \operatorname{tg}\varphi \qquad (2)$$

(φ — unghiul de frecare), din (1) rezultă

$$F_n = \frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)} G_1. \qquad (3)$$

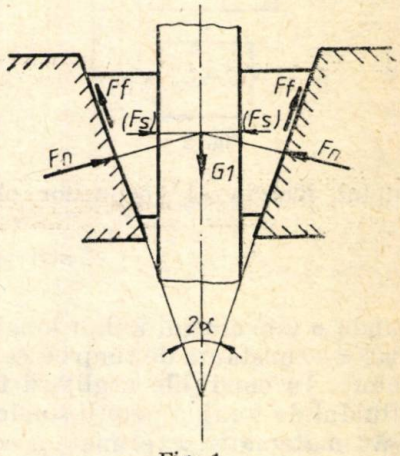


Fig. 1

Utilizînd (2), (3) și relația de echilibru

$$F_s = F_n \cos\alpha - F_f \sin\alpha, \qquad (4)$$

obținem formula de dependență dintre F_s și G_1:

$$F_s = \frac{G_1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \qquad (5)$$

Așadar, în zona de prindere a garniturii în pene, asupra acesteia acționează forța axială de întindere G_1 și forța totală de strîngere F_s, dependentă de G_1. Utilizînd relațiile de calcul la rezistență a tuburilor cu

pereți groși, putem găsi pentru fiecare tip de prăjină de foraj valoarea critică a forței G_1 la care are loc fenomenul de deformare plastică a materialului prăjinii. Pentru evitarea acestui fenomen este necesar un studiu al dinamicii garniturii de foraj, care să evidențieze dependența valorii maxime a forței G_1 de viteza inițială de coborîre a garniturii, de structura și parametrii mecanici ai acesteia.

2. MODELUL MATEMATIC

Sistemul garnitură de prăjini de foraj este format din două subsisteme (fig. 2) : subsistemul garnitură de prăjini obișnuite GPO și subsistemul garnitură de prăjini grele GPG.

Subsistemul GPO, alcătuit din material tubular omogen (cu lungimea L, aria transversală A, densitatea ρ și modulul de elasticitate E), este considerat multivariabil, cu două mărimi de intrare (viteza V_1 a capătului superior și viteza V_2 a capătului inferior) și două mărimi de ieșire (forța de întindere la capătul superior G_1 și forța de întindere la capătul inferior G_2).

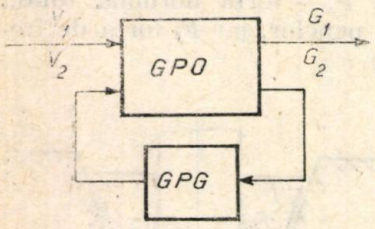


Fig. 2

În lucrarea [1] este dedus modelul matematic al subsistemului GPO, considerînd că materialul tubular satisface modelul Kelvin al corpurilor elasto-disipative :

$$\sigma(t) = E[\varepsilon(t) + \tau\dot{\varepsilon}(t)], \tag{6}$$

unde σ este efortul unitar longitudinal de întindere, ε-deformația relativă, iar τ—constanta de timp ce caracterizează întîrzierea deformației față de efort. În condițiile neglijării forțelor de frecare uscată ale garniturii cu fluidul de foraj și pereții sondei, subsistemul GPO este liniar, iar modelul său matematic, exprimat în complex prin funcții (matrice) de transfer, are următoarea formă :

$$\begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}(s) & Y_{12}(s) \\ Y_{21}(s) & Y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$Y_{11}(s) = -Y_{22}(s) = -a(\tau s + 1)\left[\frac{1}{s} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s + 2\nu}{(s + \alpha_k)^2 + \omega_k^2}\right], \tag{8}$$

$$Y_{12}(s) = -Y_{21}(s) = a(\tau s + 1)\left[\frac{1}{s} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(s + 2\nu)}{(s + \alpha_k)^2 + \omega_k^2}\right], \tag{9}$$

unde

$$a = \frac{AE}{L}, \quad \alpha_k = \nu + \frac{\tau}{2}c^2\lambda_k^2, \quad \omega_k = \sqrt{c^2\lambda_k^2 - \alpha_k^2}, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{L}. \tag{10}$$

Prin c am notat viteza de propagare a sunetului în garnitura de foraj $\left(c^2 = \frac{E}{\rho}\right)$, iar ν este un coeficient care evidențiază frecarea vîscoasă dintre garnitură și fluidul de foraj.

Prin neglijarea armonicilor de ordin superior și a frecării vîscoase dintre garnitură și fluidul de foraj, funcțiile de transfer ale subsistemului GPO devin astfel :

$$Y_{11}(s) = -Y_{22}(s) = -a(\tau s + 1)\left[\frac{1}{s} + \frac{2s}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}\right], \tag{11}$$

$$Y_{12}(s) = -Y_{21}(s) = a(\tau s + 1)\left[\frac{1}{s} - \frac{2s}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}\right], \tag{12}$$

unde

$$\alpha = \frac{1}{2}\tau\omega_0^2, \quad \omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4}\tau^2\omega_0^2\right), \quad \omega_0 = \frac{\pi c}{L}. \tag{13}$$

Garnitura de prăjini grele GPG constituie un subsistem cu parametri concentrați, caracterizat prin masa m_2 (egală cu suma maselor prăjinilor grele, sapei de foraj și, eventual, motorului submersibil). Modelul matematic al subsistemului GPG, obținut din condiția de echilibru dinamic, poate fi scris sub forma :

$$V_2(s) = Y_2(s)\cdot G_2(s), \quad Y_2(s) = -\frac{1}{m_2 s}. \tag{14}$$

Din relațiile

$$G_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2, \quad G_2 = Y_{12}V_1 + Y_{22}V_2, \quad V_2 = Y_2 G_2, \tag{15}$$

rezultă modelul matematic al întregului sistem, cu intrarea V_1 și ieșirea G_1 :

$$G_1(s) = Y_1(s)V_1(s), \quad Y_1 = \frac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21} - \dfrac{Y_{11}}{Y_2}}{Y_{22} - \dfrac{1}{Y_2}}. \tag{16}$$

3. CALCULUL EFORTULUI AXIAL ÎN IPOTEZA $\tau = 0$

Considerînd $\tau = 0$, funcțiile de transfer ale subsistemului GPO capătă forma simplificată

$$Y_{11} = -Y_{22} = -a\left(\frac{1}{s} + \frac{2s}{s^2 + \omega_0^2}\right), \tag{17}$$

$$Y_{12} = -Y_{21} = a\left(\frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2 + \omega_0^2}\right), \tag{18}$$

iar funcția de transfer a sistemului devine astfel :

$$Y_1(s) = -as\,\frac{3s^2 + \omega_0^2 + 8b^2}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + b^2) + 2b^2s^2}, \tag{19}$$

unde

$$b = \sqrt{\frac{a}{m_2}} = \sqrt{\frac{AE}{m_2 L}}. \tag{20}$$

La prinderea garniturii de foraj în pene, viteza capătului superior al garniturii este adusă într-un timp foarte mic la valoarea zero. Notînd cu v_0 viteza inițială de coborîre a garniturii și considerînd variația vitezei sub formă de treaptă, transformata Laplace $V_1(s)$ a vitezei $v_1(t)$ are expresia

$$V_1(s) = -\frac{v_0}{s}. \tag{21}$$

Prin urmare, transformata Laplace $G_1(s)$ este dată de relația

$$G_1(s) = av_0\,\frac{3s^2 + \omega_0^2 + 8b^2}{s^2 + (\omega_0^2 + 3b^2)\,s^2 + \omega_0^2 b^2}. \tag{22}$$

În vederea determinării transformatei Laplace inverse $G_1(t)$ a funcției $G_1(s)$, scriem numitorul lui $G_1(s)$ sub formă de produs și efectuăm descompunerea în fracții simple. Obținem

$$G_1(s) = av_0\left(\frac{A_1}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{B_1}{s^2 + \omega_2^2}\right), \tag{23}$$

unde

$$\omega_1^2,\ \omega_2^2 = \frac{1}{2}(\omega_0^2 + 3b^2 \pm \sqrt{\omega_0^4 + 2b^2\omega_0^2 + 9b^2}), \tag{24}$$

$$A_1 = \frac{\omega_0^2 - 3\omega_1^2 + 8b^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2},\quad B_1 = \frac{3\omega_2^2 - \omega_0^2 - 8b^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \tag{25}$$

Din (2) rezultă

$$G_1(t) = G_0 + av_0\left(\frac{A_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t + \frac{B_1}{\omega_2}\sin\omega_2 t\right), \tag{26}$$

unde G_0 reprezintă componenta statică a forței axiale în zona de împănare.

Deoarece $\omega_1 \ll \omega_2$, valoarea maximă a forței G_1 se obține prin însumarea amplitudinilor celor două sinusoide :

$$(G_1)_{max} = av_0\left(\frac{A_1}{\omega_1} + \frac{B_1}{\omega_2}\right) + G_0. \tag{27}$$

Deoarece

$$\frac{A_1}{\omega_1}+\frac{B_1}{\omega_2}=\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[(\omega_0^2+8b^2)\left(\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_2}\right)+3(\omega_2-\omega_1)\right]=$$

$$=\frac{1}{\omega_1+\omega_2}\left(\frac{\omega_0^2+8b^2}{\omega_1\omega_2}+3\right)$$

și

$$\omega_1\omega_2=\omega_0 b,$$

$$\omega_1^2+\omega_2^2=\omega_0^2+3b^2,$$

$$\omega_1+\omega_2=\sqrt{(\omega_1^2+\omega_2^2)+2\omega_1\omega_2}=\sqrt{\omega_0^2+2b\omega_0+3b^2},$$

rezultă

$$(G_1)_{max}=G_0+\frac{av_0}{b\omega_0}\cdot\frac{\omega_0^2+3b\omega_0+8b^2}{\sqrt{\omega_0^2+2b\omega_0+3b^2}}. \tag{28}$$

Introducînd notația $d=\frac{\omega_0}{b}=\pi\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ (m_1 — masa garniturii de prăjini obișnuite, m_2 — masa garniturii de prăjini grele), găsim pentru $(G_1)_{max}$ următoarea expresie finală:

$$(G_1)_{max}=kv_0A\sqrt{\rho E}+G_0, \tag{29}$$

în care

$$k=\frac{d^2+3d+8}{\pi\sqrt{d^2+2d+3}}. \tag{30}$$

Coeficientul k depinde numai de raportul m_2/m_1, forma de variație fiind reprezentată în figura 3. Deoarece raportul m_2/m_1 scade pe măsură ce crește lungimea garniturii de foraj, ponderea garniturii de prăjini grele în cadrul componentei dinamice a forței axiale G_1 este cu atît mai redusă cu cît garnitura este mai lungă.

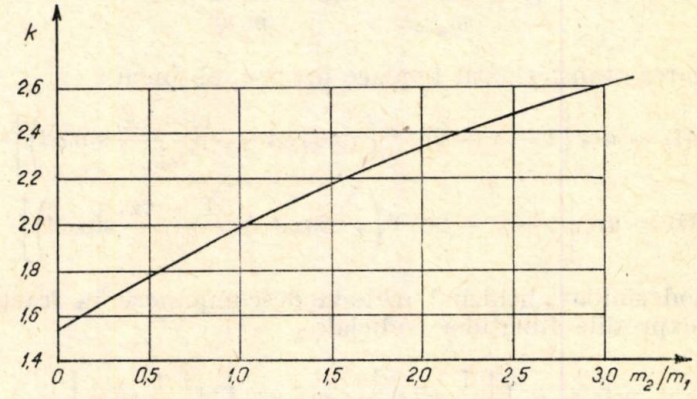


Fig. 3

Din relația (29) mai rezultă că valoarea maximă a componentei dinamice a forței G_1 este proporțională cu viteza inițială v_0 de coborîre a garniturii, cu aria transversală A a garniturii de prăjini obișnuite și cu rădăcina pătrată a produsului dintre densitatea ρ și modulul de elasticitate E ce caracterizează materialul garniturii de prăjini.

Pentru $k = 1$, 6, $v_0 = 1$ m/s, $A = 44$ cm^2, $\rho = 7850$ kg/m^3 și $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m^2, din (27) se obține pentru componenta dinamică a forței G_1 valoarea maximă 286 kN.

4. CALCULUL EFORTULUI AXIAL ÎN IPOTEZA $\tau \neq 0$

În cazul $\tau \neq 0$, ca urmare a formei mai complicate a funcțiilor de transfer ale subsistemului GPO, pentru determinarea valorii maxime a forței axiale G_1 este necesar să utilizăm o metodă numerică de calcul.

Algoritmul prezentat în continuare permite calculul valorilor funcției $G_1(t)$ la momentele discrete de timp $t_i = (i-1)T$ (T — pasul de calcul), deci și calculul lui $(G_1)_{max}$, fără a recurge la rezolvarea ecuației caracteristice a sistemului (de gradul patru, în condițiile neglijării armonicelor de ordin superior al subsistemului GPO).

Din ecuațiile (15) ale elementelor sistemului, rezultă :

$$G_2 = U + HG_2, \quad G_1 = V + GG_2, \tag{31}$$

unde

$$U = Y_{21}V_1, \quad V = Y_{11}V_1, \quad H = Y_2Y_{22}, \quad G = Y_2Y_{12}. \tag{32}$$

În conformitate cu (11), (12), (14) și (21), avem :

$$U = av_0(\tau s + 1)\left[\frac{1}{s^2} - \frac{2}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}\right], \tag{33}$$

$$V = av_0(\tau s + 1)\left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}\right], \tag{34}$$

$$H = \frac{1}{m_2 v_0} V, \quad G = \frac{1}{m_2 v_0} U. \tag{35}$$

Prin efectuarea transformării Laplace inverse, obținem :

$$u(t) = av_0\left[t + \tau - 2e^{-\alpha t}\left(\tau \cos \omega t + \frac{1 - \tau\alpha}{\omega} \sin \omega t\right)\right], \tag{36}$$

$$v(t) = av_0\left[t + \tau + 2e^{-\alpha t}\left(\tau \cos \omega t + \frac{1 - \tau\alpha}{\omega} \sin \omega t\right)\right]. \tag{37}$$

În mod similar, utilizînd metoda descompunerii în fracții simple se găsesc expresiile funcțiilor indiciale

$$p(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} H(s)\right], \quad q(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s} G(s)\right] \tag{38}$$

și ale funcțiilor auxiliare

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{T}\int_0^t p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}H(s)\right],\quad \bar{q}(t) = \frac{1}{T}\int_0^t q(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}L^{-1}\left[\frac{L}{s^2}G(s)\right]. \tag{39}$$

Relațiile (31) pot fi scrise în domeniul timpului astfel :

$$G_2(t) = u(t) + p(t)\,G_2(0) + \int_0^t p(t-\theta)\,\dot{G}_2(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{40}$$

$$G_1(t) = v(t) + q(t)\,G_2(0) + \int_0^t q(t-\theta)\,\dot{G}_2(\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{41}$$

În vederea rezolvării numerice a ecuației integrale (40) de tip Volterra de speța a doua și evaluării numerice a expresiei (41), mărimea $G_2(t)$ se aproximează pe fiecare interval $[t_i, t_{i+1}]$ prin polinoame de gradul unu. Pentru $t \in [t_{k-1}, t_k]$, rezultă :

$$G_2(t) = u(t) + p(t)\,G_2(0) + \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{k-2}[(G_2)_{i+1} - (G_2)_i]\int_{t_i}^{t_{i+1}} p(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta + \\ + \frac{1}{T}[(G_2)_k - (G_2)_{k-1}]\int_{t_{k-1}}^{t} p(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{42}$$

$$G_1(t) = v(t) + q(t)\,G_2(0) + \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{k-2}[(G_2)_{i+1} - (G_2)_i]\int_{t_i}^{t_{i+1}} q(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta + \\ + \frac{1}{T}[(G_2)_k - (G_2)_{k-1}]\int_{t_{k-1}}^{t} q(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta. \tag{43}$$

Înlocuind pe t cu t_1 în (40) și (41), respectiv cu $t_k (k \geqslant 2)$ în (42) și (43), obținem următorul algoritm de calcul prin recurență :

$$(G_2)_1 = \frac{u_1}{1 - p_1}, \tag{44}$$

$$(G_1)_1 = v_1 + q_1(G_2)_1, \tag{45}$$

$$(1 - \bar{p}_2)(G_2)_k = u_k + p_k(G_2)_1 + \sum_{i=1}^{k-1}(\bar{p}_{k-i+1} - \bar{p}_{k-i})[(G_2)_{i+1} - (G_2)_i]\big|_{(G_2)_k=0}, \tag{46}$$

$$(G_1)_k = v_k + q_k(G_2)_1 + \sum_{i=1}^{k-1} (\bar{q}_{k-i+1} - \bar{q}_{k-i})[(G_2)_{i+1} - (G_2)_i]. \qquad (47)$$

Valoarea pasului de calcul T trebuie aleasă astfel încît aceasta să fie de cel puțin 5 — 6 ori mai mică decît perioada componentei de pulsație maximă.

5. CONCLUZII

Un factor important în alegerea materialului prăjinilor de foraj și a lungimii penelor de susținere, astfel încît să se prevină fenomenul de deformare plastică și curgere pe suprafața exterioară a prăjinilor îl constituie cunoașterea forței axiele maxime de întindere a garniturii în zona de împănare.

În ipoteza simplificatoare $\tau = 0$, componenta dinamică a forței axiale maxime este direct proporțională cu viteza inițială de coborîre a garniturii, cu aria transversală a prăjinilor de foraj și cu rădăcina pătrată a produsului dintre densitatea și modulul de elasticitate ale materialului garniturii. Ponderea garniturii de prăjini grele în componenta dinamică a forței axiale scade pe măsură ce crește lungimea garniturii.

O precizie superioară de calcul al valorii maxime a efortului axial se obține prin utilizarea modelului Kelvin (6), care presupune existența unei întîrzieri a deformației față de efort. Deoarece modelul matematic al sistemului devine mai complicat, efortul axial maxim poate fi determinat numai cu ajutorul unui algoritm numeric de calcul. Odată cu creșterea constantei de timp τ, crește și valoarea maximă a efortului axial.

Primită la 26 ianuarie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. V. CÎRTOAJE, *Modelarea matematică a garniturii de foraj*, St. cerc. mec. apl., **40**, 4 (1981).
2. V. CÎRTOAJE, *Algoritmi pentru determinarea răspunsului normal al sistemelor continue cu structură închisă*, Lucrările Conferinței naționale de electronică, telecomunicații, automatică și calculatoare — secția Teoria sistemelor, I. P. București, noiembrie, 1982, p. 167 — 178.
3. N. POSEA, *Rezistența materialelor*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1979.

STUDIUL TENSIUNILOR ÎN ZONA SUPAPEI DE EVACUARE A UNUI COMPRESOR DE ÎNALTĂ PRESIUNE, EFECTUAT CU METODA ELEMENTELOR FINITE, PRIN SUBSTRUCTURARE

de M. BLUMENFELD, N. CONSTANTIN, M. SOBEC, M. GAVAN
Institutul Politehnic, București

În articol se prezintă rezultatele obținute într-o a doua fază a substructurării unui cilindru compresor de înaltă presiune. Aceste rezultate, calculate cu metoda elementelor finite, sînt comparate cu cele obținute prin măsurare cu tensometrie electrică rezistivă. Buna lor concordanță recomandă substructurarea ca o modalitate eficientă de studiu a stărilor locale de tensiuni.

1. INTRODUCERE

Calculul structurilor complexe este îngreunat foarte mult în zonele în care există concentrări de tensiuni, atît datorită particularităților constructive, cît și datorită modalităților de introducere a sarcinilor. În marea majoritate a acestor situații, metodele analitice nu pot fi aplicate. Pentru rezolvarea problemei se apelează la metode numerice, cea mai folosită în prezent fiind metoda elementelor finite. Pentru o determinare corectă a tensiunilor în zonele cu gradient mare, este necesară o rețea deasă de noduri, care să cuprindă un număr mare de elemente pe direcția gradientului. Discretizarea întregii structuri cu o asemenea rețea devine prohibitivă din cauza numărului foarte mare de ecuații, care duce la o sporire considerabilă a timpului de calculator și la reducerea fiabilității calculului, mai ales în absența unor programe de preprocesare.

O rezolvare avantajoasă din punct de vedere al utilizării calculatorului și cu o convergență mai mare a rezultatelor către valorile reale se poate obține, în astfel de cazuri, prin substructurare [3], [4]. Această metodă constă în folosirea unei discretizării cu un număr relativ mic de elemente pentru ansamblul structurii, cu o rețea mai deasă de elemente în zonele cu concentratori de tensiuni. În faza următoare, se izolează zona sau zonele de interes deosebit, care se remodelează independent, folosind discretizări mai fine și eventual un alt tip de elemente[3].Aceste zone se vor numi substructuri, Pe suprafețele de decupare ale acestora din structură, condițiile de continuitate a deplasărilor se impun cu ajutorul elementelor de contur.

În cele ce urmează se va descrie aplicarea acestei metode în cazul cilindrului unui compresor de înaltă presiune.

2. STUDIUL TENSIUNILOR ÎN SUBSTRUCTURĂ

2.1. ALEGEREA SUBSTRUCTURII ÎN CADRUL STRUCTURII COMPRESORULUI

Pentru stduiul tensiunilor în cilindrul unui compresor de înaltă presiune la care apăruseră avarii repetate în zona supapei de evacuare, a fost izolată a șaisprezecea parte, așa cum se arată în [2]. Această izolare,

care a fost făcută ţinîndu-se seama de multipla simetrie a cilindrului compresor, poate fi privită şi ca o substructurare.A doua fază a substructurării, de care ne vom ocupa în articolul de faţă, a constat în studiul unei porţiuni situate în imediata vecinătate a orificiului supapei de evacuare. Izolarea acestei porţiuni din prima substructură s-a făcut aşa cum se arată în figura 1. În această operaţie s-a urmărit ca suprafaţa de separaţie să

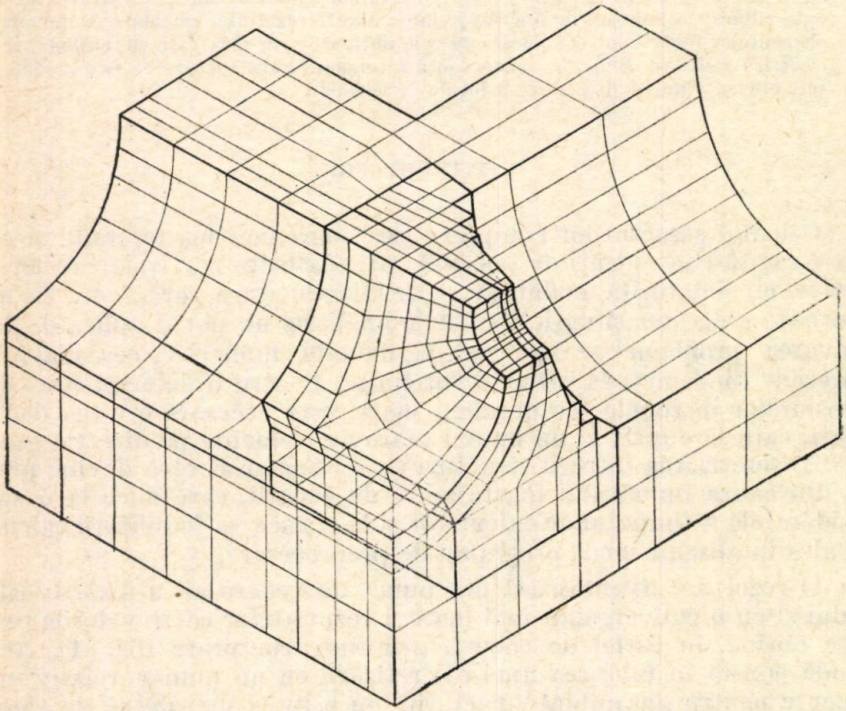


Fig. 1. — Izolarea celei de-a doua ub tructuri din prima.

treacă destul de departe de zona concentratorilor de tensiune reprezentaţi de orificiul de refulare şi scaunul supapei şi în acelaşi timp substructura să conţină un volum relativ mic al cilindrului compresor. În felul acesta, evitîndu-se zona cu gradienţi mari ai funcţiilor de deplasare, interpolarea deplasărilor nodurilor pe frontieră s-a făcut mai uşor, iar substructura a putut fi discretizată într-un număr nu prea mare de elemente. Substructurarea în a doua fază, descrisă mai sus, a fost aplicată doar substructurii obţinute din cilindrul compresor treapta a III-a [2].

2.2. MODELAREA GEOMETRICĂ A SUBSTRUCTURII

Substructura evidenţiată în figura 1 a fost discretizată printr-o reţea de 590 de noduri şi 393 de elemente izoparametrice cu opt noduri. De data aceasta au fost luate în considerare şi detaliile constructive din

zona scaunului supapei, detalii ce fuseseră neglijate la substructurarea anterioară [2]. Rețeaua de noduri a fost obținută menținîndu-se în general nodurile rămase în domeniul substructurii de la prima modelare și adăugîndu-se altele noi, lucru care a condus la împărțirea vechilor elemente în două, patru sau opt elemente mai mici. Împărțirea a fost făcută urmărindu-se ca noile elemente să aibă un raport optim (cît mai apropiat de 1) între lungimea laturilor pe de o parte, și a diagonalelor, pe de altă parte. Această verificare a gradului de distorsionare al elementelor a fost făcută cu ajutorul unui program de preprocesare a datelor, care verifică de asemenea numerotarea nodurilor și conexiunile corecte între elemente. Aplicarea acestui program, care a fost folosit și în prima fază a substructurării, a permis realizarea unor elemente mai puțin distorsionate pentru a doua substructură, precum și evitarea unor greșeli nedetectabile sau greu detectabile prin programul de calcul cu elemente finite avut la dispoziție. S-au utilizat module de elasticitate corespunzătoare pentru elementele aflate în zona substructurii, executate din fontă, respectiv oțel (aceleași ca în [2]).

2.3. ÎNCĂRCAREA SUBSTRUCTURII ȘI CONDIȚIILE DE CONTINUITATE PE CONTUR

Substructura supusă analizei a fost încărcată, similar cu precedenta, cu o presiune de 100 bari pe bucșa de fontă, pe porțiunea cilindrică ce înconjoară supapa, pe pereții orificiului de refulare, pe porțiunea conică din aval și pe treptele din zona scaunului supapei de evacuare.

Pentru nodurile aflate în planele de simetrie ale cilindrului compresor, menționate în [2], s-au impus condiții care să le mențină în aceste plane. Pe suprafața de separație din structura inițială au fost impuse condiții de continuitate în deplasări cu ajutorul unor elemente de contur. Elementele de contur care constau din resorturi cu constantă elastică foarte mare, au fost introduse în fiecare nod, pe toate direcțiile pe care deplasarea nodului era permisă. Fiecărui resort i-a fost impusă o deformație egală cu deplasarea nodului respectiv. Se introduc astfel forțe în noduri, egale cu produsul dintre constanta elastică a resortului și deformația impusă. Aceste forțe, împreună cu cele de presiune, realizează echilibrul substructurii.

Deplasările nodurilor au fost luate egale cu deplasările determinate pe prima substructură în cazul în care ele coincideau cu noduri ale acesteia, sau calculate prin interpolare grafică pentru nodurile nou create.

2.4. REZULTATE OBȚINUTE

Calculele au fost făcute cu ajutorul programului SAP IV, folosind un calculator Felix C-512. În figura 2 sînt redate tensiunile pe direcția circumferențială în planul longitudinal al compresorului care traversează supapele (planul P_4[2]). În figura 3 sînt redate tensiunile pe direcție circumferențială și radială pe conturul porțiunii tronconice din amontele supapei de evacuare.

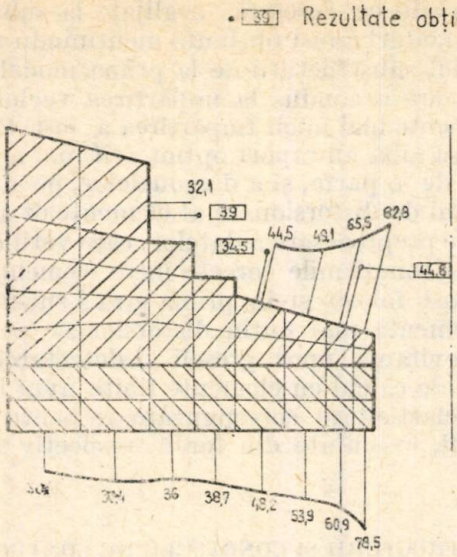


Fig. 2. — Tensiuni pe direcție circumferențială calculate în planul P_4[2], în N/mm².

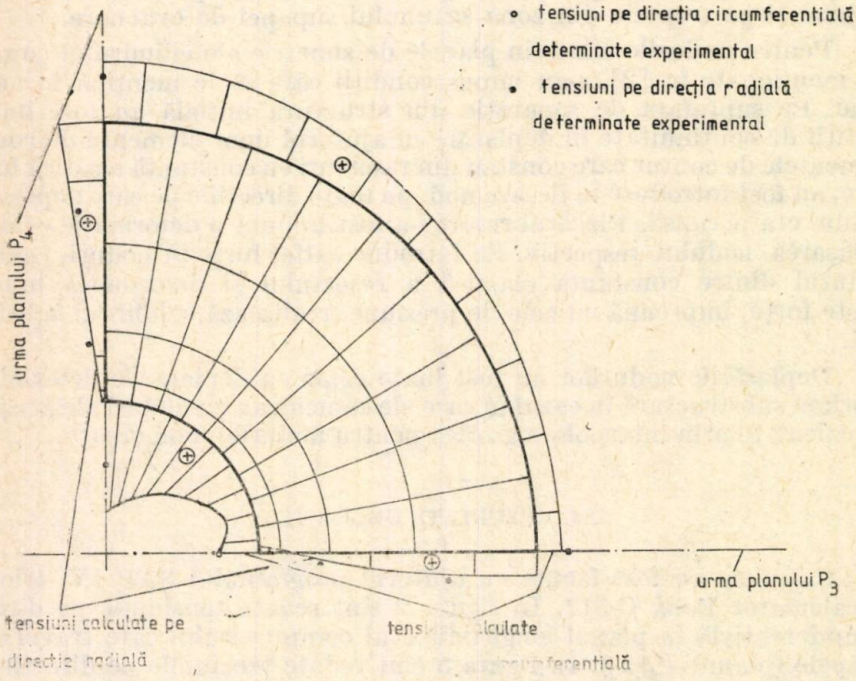


Fig. 3. — Comparație între tensiunile calculate și cele măsurate pe conturul porțiunii tronconice din amontele supapei de evacuare.

3. DISCUȚIA REZULTATELOR ȘI CONCLUZII

Analizînd figurile 2 și 3 și comparînd cu figurile similare din [2], se observă clar o mai bună concordanță între valorile calculate și cele măsurate ale tensiunilor în a doua fază a substructurării. Singurul loc unde există o diferență notabilă între aceste valori, pe direcție circumferențială, este punctul aflat pe porțiunea tronconică din amontele supapei, în preajma orificiului central.

Extrapolînd rezultatele calculate la o presiune de 260 bari, în ipoteza liniarității fizice, și comparînd cu rezultatele obținute prin măsurări tensometrice la această presiune [1] [2], diferența apare mai mică. Acest lucru este datorat creșterii mai accentuate a tensiunilor măsurate la depășirea presiunii de 100 bari, fenomen a cărui explicare a fost încercată în [2].

Spre deosebire de faza întîi a substructurării, cînd tensiunile calculate erau inferioare celor măsurate, în faza a doua situația a fost inversă în aproape toate punctele în care s-a putut face comparația. O exlicație a acestei stări de lucruri poate fi influența deplasărilor nodurilor de frontieră, introduse prin elemente de contur. deplasări care au fost determinate pentru unele noduri prin interpolare grafică. O altă explicație poate fi accentuarea gradientului tensiunilor la o discretizare mai fină a aceleiași porțiuni dintr-un mediu elastic continu, așa cum este cazul în substructurare.

O confirmare a acestor ipoteze ar putea fi obținută utilizînd metode diferite de interpolare a deplasărilor, precum și mai multe faze de substructurare.

Concluzia ce se desprinde din analiza rezultatelor obținute este că substructurarea constituie o metodă eficientă în studiul stărilor locale de tensiuni. Pînă la validarea unor modalități mai generale de aplicare a acestei metode, se impune o verificare, în toate cazurile cu putință, prin metode experimentale adecvate.

Primită la redacție la 6 februarie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. M. BLUMENFELD, E. MIHĂILESCU, N. CONSTANTIN, D. M. ȘTEFĂNESCU. *Măsurări tensometrice pe un compresor de înaltă presiune*, comunicare la al III-lea Simpozion național de tensometrie, vol. II, p. 67 — 72, Rimișoara, 1983.
2. M. BLUMENDELF, E. MIHĂILESCU, N. CONSTANTIN, D. M. ȘTEFĂNESCU, M. SOBEC, M. GAVAN *Studiul distribuției tensiunilor în cilindrul unui compresor de înaltă presiune*, St. cerc. mec. apl., **43**, 4 (1984).
3. N. CONSTANTIN, M. BLUMENFELD, M. MUNTEANU, I. CONSTANTINESCU *Determinarea stării de tensiune într-o moară de minereu de mari dimensiuni*, **40**, (1981).
4. I. CONSTANTINESCU, M. MUNTEANU, D. GOLUMBOVICI *Calcule de rezistență sructurilor de mașini și utilaje*, Edit. tehnică, București, 1984.

GYULA MÁRKUS, *Kreis- und Kreisringplatten unter periodischer Belastung* (Plăcile şi inelele circulare sub încărcări periodice), Akadémiai Kiadó—Budapest, 1985, 311 p.

Plăcile şi inelele circulare sub încărcări periodice au o largă răspîndire în diferite tipuri de construcţii : rezervoare, coşuri, turnuri pentru diferite susţineri, instalaţii pentru epurarea apei etc.

Determinarea stării de eforturi şi de deformaţie pentru diferite condiţii de rezemare şi de încărcare este obiectul lucrării prezentate.

După o scurtă introducere şi o succintă prezentare a teoriei plăcilor circulare cu grosime constantă, în capitolul al 4-lea sînt discutate diferite tipuri de încărcări care intervin în cazurile practice :

— încărcări rotation-simetrice ;
— încărcări antimetrice ;
— încărcări variabile exprimate prin funcţii trigonometrice ;
— încărcări periodice exprimate prin serii Fourier.

În capitolul al 5-lea sînt prezentate soluţiile particulare ale ecuaţiei diferenţiale a plăci circulare pentru diferitele încărcări precizate mai sus, iar în capitolul al 6-lea soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale a plăcii circulare.

În capitolul al 7-lea sînt discutate condiţiile de margine şi în capitolul al 8-lea, cel mai dezvoltat în carte (230 p. din 311), sînt date rezolvările complete a difritelor cazuri de rezemare şi încărcare a plăcilor şi inellor circulare. Lucrarea se încheie cu tabele, circa 100 p, care uşurează munca proiectanţilor.

Lucrarea editată în limba germană în cadrul Academiei maghiare, pe lîngă importanţa teoretică, are o valoare practică deosebită, reprezentînd un instrument valoros pentru cei care lucrează în acest domeniu.

Dan Mateescu

ULRICH GRIGULL, HEINRICH SANDNER, *Heat conduction* (Conducţia căldurii). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, NewYork, Tokyo, 1984, XX + 187 p., 49 fig.

Acest manual, datorit unor cunoscuţi specialişti, apărut iniţial în limba germană, este tradus în limba engleză de prof. Joseph Kestin şi distribuit în America de Nord de Hemisphere Publishing Corporation, Washington, New York, London.

În unsprezece capitole este realizată o prezentare clară şi concisă a problemelor clasice ale conducţiei căldurii, la nivelul necesar pregătirii inginerilor mecanici, chimişti şi electricieni.

După o introducere care conţine modelul matematic al conducţiei căldurii, urmează capitolul în care sînt prezentate proprietăţile de transport ale căldurii. Conducţia termică staţionară, unidimensională, fără sau cu surse de căldură, face obiectul următoarelor două capitole, după care se trece la studiul conducţiei staţionare în mai multe dimensiuni. Urmează conducţia nestaţionară unidimensională, apoi problema exploziilor termice şi aceea a surselor continui în timp, care fac obiectul altor trei capitole. Se trece după aceea la cazul surselor de căldură mobile şi la conducţia nestaţionară în mai multe dimensiuni. Ultimul capitol se referă la conducţia nestaţionară a căldurii cu transmisie de fază. În şapte apendice, sînt date diferite tabele utile pentru calcule.

Aşa cum am mai amintit, expunerea este deosebit de clară şi se situează la un bun nivel matematic corespunzător scopului urmărit. Pe lîngă metodele care permit găsirea soluţiilor exacte ale unor probleme, mai sînt prezentate, acolo unde este cazul, metode aproximative, metode grafice, metode numerice şi diferite analogii experimentale. Exemplele de calcul sugestive şi alese însoţesc fiecare capitol. Autorii au avut intenţia vizibilă de a scoate în evidenţă posibilităţile de aplicare a rezultatelor teoretice în diverse ramuri ale ştiinţei şi tehnicii, obiectiv realizat cu succes.

Manualul este util în primul rînd acelora care urmăresc aceste aplicații dar poate servi și ca o foarte bună introducere în domeniul transmisiei căldurii prin conducție și chiar specialiștilor care pot găsi unele sugestii interesante.

T. Oroveanu

E. WINDEMITH, *Strömungstechnik. Grundlagen, Maschinen, Anwendungen* (Mecanica fluidelor tehnică. Baze, mașini, aplicații). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, XII + 321 p., 379 fig.

Acest manual, cu caracter tehnic, își propune să realizeze o prezentare a bazelor mecanicii fluidelor, a mașinilor în care agentul de lucru este un fluid precum și a unor aplicații în care intervin aceste mașini.

Ca urmare, primul capitol conține o expunere sumară a principalelor rezultate ale mecanicii fluidelor (hidrostatica, dinamica fluidelor incompresibile, cu accent special asupra mișcărilor cu frecare și dinamica gazelor). În capitolul următor, cu o extindere mai mare, este prezentată teoria mișcărilor potențiale plane împreună cu aplicațiile ei în teoria profilelor și a elicii aeriene.

Capitolul al treilea, care reprezintă aproape două treimi din întreaga lucrare, este consacrat mașinilor hidraulice și utilizării lor. După expunerea principiilor generale de funcționare a mașinilor rotative, sînt tratate pe rînd suflantele și compresoarele, pompele centrifuge, turbinele hidraulice, cuplajele hidraulice și turbinele cu gaze. Un paragraf este consacrat obținerii energie în diverse tipuri de instalații, iar capitolul se încheie cu paragrafe consacrate turbinelor cu abur și rachetelor. În anexă sînt date unele tabele utile.

Datorită pronunțatului lui caracter tehnic, manualul nu face uz de dezvoltări matematice decît într-o măsură redusă și îndeosebi acolo unde acestea sînt absolut necesare. Prezentarea tipurilor de mașini hidraulice și a instalațiilor în care sînt utilizate acestea este însoțită de o serie de aplicații de calcul. Lucrarea este utilă atît studenților, care obțin o privire de ansamblu asupra întregului domeniu, cît și specialiștilor din industrie cărora le permite găsirea soluțiilor pentru numeroase probleme.

T. Oroveanu

W. STEINHILPER, R. RÖPER, *Maschinen- und Konstruktionselements. Band II, Verbindungselements, elastische Elemente, Achsen und Wellen, Dichtungstechnik* (Organe de mașini și de construcții. Vol. II, Organe de asamblare, elemente elastice, osii și arbori, tehnica etanșării), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokio, 1986, 607 p., 325 fig., 74 tabele.

Manualul se adresează studenților din învățămîntul superior în specialitatea construcții de mașini.

Primul volum din seria acestor manuale s-a ocupat de bazele fizice și ale materialelor utilizate în construcția de mașini precum și de aspectele tehnologice și economice care intervin în proiectarea organelor de mașini.

Prezentul volum tratează despre organe de asamblare, elemente elastice, osii și arbori precum și despre etanșări.

Autorii au organizat materialul prezentat în manual în mod metodic, ținînd seama de posibilitățile de asimilare a studentului, punînd un accent depsebit în privința cerințelor tehnicii constructive moderne. S-a ținut seama de faptul că organele de mașini trebuie să îndeplinească în primul rînd o cerință funcțională dar totodată trebuie să satisfacă o serie de cerințe ca siguranța în exploatare, anduranță, fiabilitate și economicitate.

Cele cinci capitole din cuprins tratează următoarele subiecte:

— 5. Organe de procedee de asamblare;
— 6. Șuruburi și asamblări prin șuruburi;
— 7. Elemente elastice, arcuri;
— 8. Osii și arbori;
— 9. Tehnica etanșării.

De remarcat este tratarea unor asamblări ca adezivi, a problematicii elementelor elastice formate din gaze și fluide precum și întregul capitol privind tehnica etanșării, care constituie aspecte recente atinse în domeniile respective.

Fiecare capitol este prevăzut cu o listă bibliografică bogată.

G. Winter

ŞTEFAN STAICU, *Aplicaţii ale calculului matriceal în mecanica solidelor*, Editura Academiei R. S. România, 1986, 264 p.

Lucrarea expune elementele de bază ale mecanicii newtoniene utilizînd calculul matriceal. Teoremele şi formulele de calcul ale mecanicii sistemelor, obţinute sub forma matriceală, sînt aplicate la studiul mişcării solidului rigid.

Cartea este organizată în 12 capitole în care sînt abordate aspectele generale ale staticii, cinematicii şi dinamicii.

Primul capitol este consacrat reducerii sistemelor de vectori, ca o problemă generală ce interesează în egală măsură statica, cinematica şi dinamica sistemelor; se dau relaţiile de reprezentare matriceală a unui vector alunecător, a momentului vectorului în raport cu un punct şi cu o axă. De asemenea, se introduce noţiunea de moment dual al unui vector alunecător în raport cu un punct.

În capitolul următor se stabilesc relaţiile de distribuţie pentru viteze şi acceleraţii în mişcarea solidului. Se defineşte matricea ortogonală de trecere de la un reper fix la un sistem de referinţă mobil, iar distribuţiile de viteze şi acceleraţii sînt exprimate cu ajutorul vectorilor duali.

Cinematica continuă cu studiul mişcării relative a rigidului faţă de unul sau mai multe repere mobile cu mişcări relative cunoscute, stabilindu-se matricele antisimetrice asociate vitezei unghiulare absolute şi acceleraţiei unghiulare absolute. Relaţiile generale de calcul, denumite de autor formulele matriceale $\Sigma\Pi$, îşi găsesc aplicarea în analiza poziţională şi cinematică a mecanismelor.

În capitolul al 4-lea se stabileşte condiţia unică dual de echilibru a unui rigid sau a unui sistem de rigide.

Capitolele 5 şi 6 ale lucrării tratează teoremele generale ale dinamicii, exprimînd sub forma matriceală cantitatea de mişcare, momentul cinetic şi energia cinetică. Sînt date formele matriceale ale teoremelor lui Koenig şi se generalizează teorema lui Huygens referitoare la variaţia tensoruli de inerţie şi a momentului static în raport cu schimbarea axelor de referinţă.

În continuare, lucrarea tratează problema dinamicii mişcării relative a sistemelor-prezentînd formele matriceale pentru teoremele generalizate ale lui Koenig şi pentru teoremele generale în raport cu un referenţial mobil. Dinamica mişcării relative a rigidului este studiată apoi cu ajutorul teoriei vectorilor duali.

Se studiază apoi dinamica sistemelor de solide, cu ajutorul principiului lui d'Alembert, metodei deplasărilor virtuale şi a ecuaţiilor lui Lagrange, exprimate cu ajutorul vectorilor duali.

Capitolul al 10-lea prezintă o introducere în rezolvarea matriceală a vibraţiilor sistemelor cu mai multe grade de libertate.

Ultimele două capitole ale lucrării dezvoltă, sub forma matriceală, studiul iocnirii sistemelor materiale, prezentînd teoremele cu privire la variaţia discontinuă a unor variabile de stare.

Întreaga lucrare este întocmită la un nivel ştiinţific înalt, într-o manieră originală, constituind o formă modernă de prezentare a mecanicii teoretice.

Lucrarea deschide noi posibilităţi de aplicare în diferite domenii ale tehnologiei — mecanica fină, teoria mecanismelor, construcţia de roboţi industriali, dinamica maşinilor unelte complexe etc. — oferind totodată posibilităţi pentru organizarea mai judicioasă a calculului numeric prin programarea pe calculator a rezultatelor scrise sub forma matriceală.

Cartea prezentată interesează o arie largă de cititori: cercetători ştiinţifici, ingineri, matematicieni, fizicieni, cadre didactice din învăţămîntul superior şi liceal şi studenţi din învăţămîntul tehnic şi universitar.

M. M. Niţă

+2557

ACADEMIA REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1987-03-25

6

TOMUL 45

noiembrie—decembrie

1986

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

CONSILIUL DE CONDUCERE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. ŞTEFAN BĂLAN
Acad. CAIUS IACOB
Acad. DAN MATEESCU
Acad. RADU VOINEA
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. GHEORGHE BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Dr. ing. NICOLAE PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. RADU C. BOGDAN
Dr. ing. ION GRIŞAN
Prof. TRAIAN DEMIAN
Prof. DUMITRU MANGERON
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Prof. DAN PAVELESCU
Prof. CRISTIAN PELECUDI
Prof. RADU PRIŞCU
Dr. ing. MIRCEA RADEŞ
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU
Dr. doc. VIOREL VISARION

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

COLEGIUL DE REDACŢIE

Acad. IOAN ANTON, *redactor şef*

Membri:

Acad. DAN MATEESCU
Dr. ing. ION GRIŞAN
Prof. TRAIAN DEMIAN
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL
Dr. ing. CONSTANTIN TEODORESCU

Prof. TEODOR OROVEANU, *secretar de redacţie*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa : ROMPRESFILATELIA — sectorul export-import presă, P. O. Box 12—201, telex 10376 prsfi r, Calea Griviţei nr. 64—66, 78104 Bucureşti, România ; în ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717 Bucureşti 22, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 45, nr. 6 noiembrie — decembrie 1986

SUMAR

STUDII

CAIUS IACOB, Asupra tensorului de inerţie al unui sistem material 517
IOANA LUCA, E. SOÓS, Proprietăţi constitutive în termoviscoelasticitatea liniară. II. Reversibilitate; simetrie; întîrziere 528
I. SETEANU, M. ERHAN, Contribuţii noi la studiul mişcării laminare a fluidului vîscos. II. Utilizarea transformării conforme pentru domenii bandă 538
N. MARCOV, Efecte de compresibilitate pentru o clasă de mişcări fluide . . 543
IOANA LUCA, Implicaţii termodinamice şi reversibilitate temporală în termoviscoelasticitatea liniară de tip integral 549
N. MOŞU, Aflarea expresiei vitezei şi acceleraţiei liniare absolute pentru cazul general pe cale deductivă 579
D. CONSTANTINESCU, Contribuţii la utilizarea carburilor metalice sinterizate în foraj. I 584

INDEX ALFABETIC 610

ASUPRA TENSORULUI DE INERȚIE AL UNUI SISTEM MATERIAL

de GAIUS IACOB

Se cunoaște importanța noțiunilor de moment de inerție față de un punct, o dreaptă sau un plan, care figurează în toate tratatele clasice de mecanică. În legătură cu aceste elemente de bază, în tratatele mai moderne de mecanică se insistă asupra noțiunii de tensor de inerție, cu ajutorul căreia ele se exprimă în mod simplu. A se vedea, de exemplu, [1], [2], [3], [4].

În prezenta lucrare se pun în evidență cîteva proprietăți ale tensorului de inerție, pe care nu le-am găsit semnalate în literatura de specialitate. Interesul lor rezultă și din tendința recentă de a se transcrie sub o formă matriceală ecuațiile mecanicii, [5], [6].

1. TENSORUL INVERS AL UNUI TENSOR DE ORDINUL AL DOILEA NESINGULAR

Fie un sistem de axe $Ox_1x_2x_3$ rectangulare și de sens direct. Fie de asemenea sistemul de axe $Ox_1'x_2'x_3'$ rectangulare și de sens direct. Formulele de schimbare de coordonate sînt

$$x_i' = \alpha_{is}x_s \qquad (i = 1,2,3), \tag{1}$$

cu $\alpha_{ij} = \cos(Ox_i', Ox_j')$, $j = 1,2,3$. Matricea $S = (\alpha_{ij})$, $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$, este ortogonală. Aceasta înseamnă că dacă $\tilde{S} = (\beta_{ij})$, $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$, cu $\beta_{ij} = \alpha_{ji}$, este matricea transpusă a lui S, avem

$$\tilde{S} = S^{-1}, \tag{2}$$

unde S^{-1} este matricea inversă a lui S. Avem de asemenea $\det(S) = 1$. A se vedea, de exemplu, [3], [7]. În relația (1) și în cele următoare se adoptă convenția de sumare obișnuită față de indicele care se repetă.

Ca urmare a lui (1) avem

$$x_t = \alpha_{it}x_i' \qquad (t = 1,\ 2,\ 3),$$

deoarece versorii $\vec{i}_k$ și $\vec{i}_k'$ ai axelor Ox_k și Ox_k' $(k = 1,2,3)$ îndeplinesc condițiile

$$\vec{i}_k \cdot \vec{i}_l = \delta_{kl}, \quad \vec{i}_k' \cdot \vec{i}_l' = \delta_{kl}, \tag{4}$$

δ_{kl} fiind simbolul lui Kronecker. Astfel

$$\alpha_{ks}\alpha_{ls} = \delta_{kl}, \quad \alpha_{sk}\,\alpha_{sl} = \delta_{kl} \tag{4'}$$

cu sumare față de indicele s. Relația (3) rezultă din (1) prin înmulțire cu α_{it} și sumare față de i. Ea face vizibilă relația matriceală (2).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 6, 1936, P. 517–527

Fie vectorul $\vec{X}$ cu componentele scalare X_i $(i = 1,2,3)$ în sistemul $Ox_1x_2x_3$ și cu componentele scalare X'_i $(i = 1,2,3)$ în sistemul $Ox'_1x'_2x'_3$. Ca urmare a lui (1) și (3), avem legile de transformare ale componentelor.

$$X'_i = \alpha_{is}X_s, \quad X_i = \alpha_{si}X'_s, \qquad (i = 1,2,3). \tag{5}$$

Sub formă matriceală aceste relații se scriu

$$X' = SX, \quad X = S^{-1}X' = \tilde{S}X' \tag{6}$$

unde matricele unicoloană,

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

reprezintă vectorul $\vec{X}$ în cele două sisteme de coordonate. Rezultă de aici că : *un vector $\vec{X}$ poate fi reprezentat într-un sistem de referință ca o matrice unicoloană care la o schimbare a sistemului de referință (1) se transformă după legea (6).*

Să considerăm acum un tensor de ordinul al doilea $\vec{\vec{T}}$. Se știe (a se vedea, de exemplu [3]) că dacă componentele sale în sistemul $Ox_1x_2x_3$ sînt $T_{ij}(i = 1,2,3,\ ;\ j = 1,2,3)$, iar în sistemul $Ox'_1x'_2x'_3$ sînt $T'_{ij}(i = 1,2,3\ ;\ j = 1,2,3)$, avem legile de transformare

$$T'_{ij} = \alpha_{is}\alpha_{jt}T_{st}, \quad T_{ij} = \alpha_{si}\alpha_{tj}T'_{st} \tag{8}$$

$$(i = 1,2,3), \ (j = 1,2,3).$$

Tensorul $\vec{\vec{T}}$ poate fi deci reprezentat în sistemul $Ox_1x_2x_3$ prin matricea

$$T = (T_{ij}), \qquad i = 1,2,3,\ ; \qquad j = 1,2,3, \tag{9}$$

iar în sistemul $Ox'_1x'_2x'_3$ prin matricea

$$T' = (T'_{ij}) \qquad i = 1,2,3\ ; \quad j = 1,2,3, \tag{10}$$

cu condiția ca să avem

$$T' = STS = STS^{-1}. \tag{11}$$

De aici se deduce imediat relația echivalentă

$$T = \tilde{S}T'S = S^{-1}T'S. \tag{11'}$$

Deci, un tensor de ordinul al doilea $\vec{\vec{T}}$ este reprezentat în sistemul ortogonal $Ox_1x_2x_3$, printr-o matrice T, a cărei lege de schimbare cu reperul este (11), schimbarea reperului fiind dată de matricea ortogonală S.

Din (2) și (11) se deduce egalitatea importantă

$$\det(T') = \det(T). \tag{12}$$

Fie matricea lui Kronecker (δ_{ij}), $i, j = 1,2,3$, unde $\delta_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$ și $\delta_{ij} = 1$ pentru $i = j$. Ea definește un tensor $\vec{\vec{E}}$, numit *tensorul unitate*. Într-adevăr, dacă notăm

$$T_{ij} = \delta_{ij}, \tag{13}$$

avem, conform lui (8),

$$T'_{ij} = \alpha_{ijk}\alpha_{jl}\alpha_{kl} = \alpha_{il}\alpha_{jl} = \delta_{ij}. \tag{13'}$$

Deci, componentele lui $\overset{\Rightarrow}{E}$ în sistemul $Ox'_1x'_2x'_3$ sunt $(\delta_{ij}), i,j=1,2,3$.

Dar la o matrice de ordinul al doilea nesingulară, adică pentru care $\det(T) \neq 0$, i se atașează și o matrice inversă $Z = T^{-1}$. Poate această matrice Z să definească și ea un tensor, cu păstrarea relației de inversiune matriceală în fiecare reper? Răspunsul este afirmativ.

Fie, într-adevăr, matricea $Z = T^{-1}$. Să considerăm matricea T' asociată tensorului $\overset{\Rightarrow}{T}$ în reperul $Ox'_1x'_2x'_3$ și fie $Z' = (T')^{-1}$, matrice care există în virtutea lui (12). Matricele Z și Z' sînt legate prin relația (11), deoarece avem

$$Z' = (T')^{-1} = (STS^{-1})^{-1} = [(ST)S^{-1}]^{-1} = (S^{-1})^{-1}(ST)^{-1} =$$
$$= ST^{-1}S^{-1} = SZS^{-1}. \tag{14}$$

Prin urmare, dacă $\det(T) \neq 0$, matricea $S = T^{-1}$ definește un tensor de ordinul al doilea, pe care-l vom nota prin $(\overset{\Rightarrow}{T})^{-1}$. Acesta va fi numit *tensorul invers al tensorului* $\overset{\Rightarrow}{T}$, definit de matricea T.

Avem, evident,

$$\overset{\Rightarrow}{T}(\overset{\Rightarrow}{T})^{-1} = \overset{\Rightarrow}{E}, \quad (\overset{\Rightarrow}{T})^{-1}\overset{\Rightarrow}{T} = \overset{\Rightarrow}{E}. \tag{15}$$

Aplicație. Să considerăm vectorul $\vec{Y}$ definit prin relația

$$\vec{Y} = \overset{\Rightarrow}{T}\vec{X}, \tag{16}$$

unde $\overset{\Rightarrow}{T}$ este un tensor de ordinul al doilea nesingular.

Componentele lui $\vec{Y}$ în sistemul $Ox_1x_2x_3$ sînt

$$Y_i = T_{ij}X_j \qquad (i = 1,2,3), \tag{17}$$

adică avem

$$Y = TX, \tag{17'}$$

unde Y este matricea unicoloană formată cu componentele Y_1, Y_2, Y_3. Se verifică ușor că (17') definește efectiv un vector $\vec{Y}$, adică avem în sistemul $Ox'_1x'_2x'_3$

$$Y' = T'X', \qquad Y' = SY. \tag{18}$$

Dar din (17') se deduce

$$X = T^{-1}Y. \tag{19}$$

Conform proprietății stabilite aplicate pentru tensorul $(\overset{\Rightarrow}{T})^{-1}$ rezultă deci că din (16) se deduce

$$\vec{X} = (\overset{\Rightarrow}{T})^{-1}\vec{Y} \tag{20}$$

dacă tensorul T este nesingular, adică admite un tensor invers.

2. TENSORUL DE INERȚIE AL UNUI SISTEM MATERIAL DAT

Dacă (Σ) este un sistem material format din punctele materiale Q_k, de mase m_k $(k = 1,2,3,\ldots,n)$, tensorul de inerție $\overset{\Rightarrow}{I}_P(\Sigma)$ al sistemului se definește ca un cîmp tensorial, astfel ca în punctul oarecare $P \in \mathbb{R}^3$ el este dat prin

$$\overset{\Rightarrow}{I}_P(\Sigma) = \overset{\Rightarrow}{E}\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{PQ_k^2} - \sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{PQ_k} \otimes \overrightarrow{PQ_k}. \tag{21}$$

Dacă sistemul (Σ) este un mediu material continuu care ocupă un domeniu $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, atunci $\overset{\Rightarrow}{I}_P(\Sigma)$ este definit prin

$$\overset{\Rightarrow}{I}_P(\Sigma) = \overset{\Rightarrow}{E}\int_{\Sigma} \overrightarrow{PQ_k^2}\,\mathrm{d}m_Q - \int_{\Sigma} \overrightarrow{PQ} \otimes \overrightarrow{PQ}\,\mathrm{d}m_Q \tag{22}$$

unde $Q \in \Sigma$, iar $\mathrm{d}m_Q$ este masa elementului de volum $\mathrm{d}\tau_Q$, dată de $\mathrm{d}m_Q = \rho(Q)\mathrm{d}\tau_Q$, $\rho(Q)$ fiind densitatea în punctul Q. Simbolul $\otimes$ este acela al produsului tensorial, iar $\overset{\Rightarrow}{E}$ este tensorul-unitate al lui Kronecker.

Fie $X_1^{(k)}$, $X_2^{(k)}$, $X_3^{(3)}$ componentele vectorului $\overrightarrow{PQ_k}$ în sistemul $Ox_1x_2x_3$. Componentele în acest sistem ale tensorului $\overset{\Rightarrow}{I}_P(\Sigma)$ sunt, respectiv,

$$I_{ij}^P(\Sigma) = \delta_{ij}\sum_{k=1}^{n} m_k(X_1^{(k)^2} + X_2^{(k)^2} + X_3^{(k)^2}) - \sum_{k=1}^{n} m_k X_i^{(k)} X_j^{(k)} \tag{23}$$

în cazul sistemului discret și

$$I_{ij}^P(\Sigma) = \delta_{ij}\int_{\Sigma} (X_1^{(Q)^2} + X_2^{(Q)^2} + X_3^{(Q)^2})\mathrm{d}m_Q - \int_{\Sigma} X_i^{(Q)} X_j^{(Q)}\mathrm{d}m_Q, \tag{24}$$

unde $X_1^{(Q)}$, $X_2^{(Q)}$, $X_3^{(Q)}$ sînt componente lui $\overrightarrow{PQ}$ în sistemul $Ox_1x_2x_3$.

Din (23) și (24) reese că : *tensorul de inerție este un tensor simetric.*

Fie G centrul maselor sistemului (Σ). El este definit prin condiția

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{GQ_k} = 0 \tag{25}$$

în cazul sistemului material discret și prin

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{GQ}\,\mathrm{d}m_Q = 0 \tag{26}$$

în cazul sistemului material continuu.

Să notăm prin (Σ_G) sistemul material format din punctul G dotat cu masa totală $\mathcal{M}$ a sistemului. Avem, respectiv,

$$\mathcal{M} = \sum_{k=1}^{n} m_k, \text{ sau } \mathcal{M} = \int_{\Sigma} \mathrm{d}m_Q \tag{27}$$

în cazul sistemului discret sau al sistemului continuu. În ambele cazuri tensorul de inerție $\overset{\Rightarrow}{I}_P(\Sigma_G)$ al acestor sisteme este definit, respectiv, prin

$$\overset{\Rightarrow}{I}_P(\Sigma_G) = \overset{\Rightarrow}{E} \cdot \mathcal{M}\overrightarrow{PG^2} - \mathcal{M}\overrightarrow{PG} \otimes \overrightarrow{PG}. \tag{28}$$

Studiul variației cîmpului tensorial cu polul P este facilitat de formula lui Steiner-Lur'e [2],

$$\overset{\Rightarrow}{I}_P(\Sigma) = \overset{\Rightarrow}{I}_G(\Sigma) + \overset{\Rightarrow}{I}_P(\Sigma_G), \tag{29}$$

care ne dă tensorul de inerție în orice punct P dacă se cunoaște expresia sa în punctul G.

Demonstrația acestei formule mult simplificată față de aceea dată în [2] este imediată dacă se observă că

$$\overrightarrow{PQ^2} = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ})^2 = \overrightarrow{PG^2} + \overrightarrow{GQ^2} + 2\overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{GQ},$$

$$\overrightarrow{PQ} \otimes \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ}) \otimes (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ}) =$$

$$= \overrightarrow{PG} \otimes \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GQ} \otimes \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PG} \otimes \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{GQ} \otimes \overrightarrow{GQ}$$

și se ține seama de (26), expresia lui $\overset{\Rightarrow}{I}_G(\Sigma)$ fiind dată de (22), în care se înlocuiește P prin G.

O demonstrație similară se poate da și în cazul sistemului material discret.

Termenul $\overset{\Rightarrow}{I}_G(\Sigma)$ nu depinde de polul P ci numai de sistemul material considerat, deoarece însuși G depinde numai de acest sistem. Acest fapt este și mai bine pus în evidență de teorema următoare.

Teoremă *Tensorul de inerție al sistemului* (Σ) *față de centrul său de masă* G *este dat, respectiv, de*

$$\overset{\Rightarrow}{I}_G(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \left\{ \overset{\Rightarrow}{E} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k m_l \overrightarrow{Q_k Q_l^2} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k m_l \overrightarrow{Q_k Q_l} \otimes \overrightarrow{Q_k Q_l} \right\} \tag{30}$$

sau de

$$\overset{\Rightarrow}{I}_G(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \left\{ \overset{\Rightarrow}{E} \iint_{\Sigma\,\Sigma} \overrightarrow{QR^2} \mathrm{d}m_Q \mathrm{d}m_R - \iint_{\Sigma\,\Sigma} \overrightarrow{QR} \otimes \overrightarrow{QR}\, \mathrm{d}m_Q \mathrm{d}m_R \right\} \tag{31}$$

după cum se consideră sistemul material discret sau continuu.

Demonstrație. Vom da demonstrația pentru cazul sistem lui material continuu. Dacă în (29) se ia $P = R \in \Sigma$, se obține

$$\overset{\Rightarrow}{I}_R(\Sigma) = \overset{\Rightarrow}{I}_G(\Sigma) + \overset{\Rightarrow}{I}_R(\Sigma_G),$$

unde

$$\overset{\Rightarrow}{I}_R(\Sigma_G) = \overset{\Rightarrow}{E}. \mathcal{M}\, \overrightarrow{RG^2} - \mathcal{M}\, \overrightarrow{RG} \otimes \overrightarrow{RG}.$$

Dar avem $\overrightarrow{RG^2} = \overrightarrow{GR^2}$, $\overrightarrow{RG} \otimes \overrightarrow{RG} = \overrightarrow{GR} \otimes \overrightarrow{GR}$.

Să înmulțim cu dm_R și să integrăm pe Σ.

Rezultă

$$\int_{\Sigma} \vec{\vec{I}}_R(\Sigma)\mathrm{d}m_R = \vec{\vec{I}}_G(\Sigma)\int_{\Sigma}\mathrm{d}m_R + \vec{E}\mathcal{M}\int_{\Sigma}\overrightarrow{RG}^2\,\mathrm{d}m_R - \mathcal{M}\int_{\Sigma}\overrightarrow{GR}\otimes\overrightarrow{GR}\,\mathrm{d}m_R = 2\mathcal{M}\vec{\vec{I}}_G(\Sigma).$$

Ținînd seamă de (22) în care se ia $P = R$ și se observă că $\overrightarrow{RQ}^2 = \overrightarrow{QR}^2$, $\overrightarrow{RQ}\otimes\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{QR}\otimes\overrightarrow{QR}$, înlocuind apoi pe $\vec{\vec{I}}_R(\Sigma)$ cu expresia sa, se obține formula (31).

3. APLICAȚII

A) Dacă în formulele (23) și (24) se operează o contracție, se obține, conform regulei de însumare adoptate,

$$I^P_{ii} = 2\,I_P(\Sigma), \tag{32}$$

unde $I_P(\Sigma)$ este *momentul de inerție* al sistemului (Σ) față de polul P. Expresia lui $I_P(\Sigma)$ este

$$I_P(\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{PQ}_i^2 \tag{33}$$

în cazul sistemului material discret, sau

$$I_P(\Sigma) = \int_{\Sigma}\overrightarrow{PQ}^2\,\mathrm{d}m_Q \tag{34}$$

în cazul sistemului material continuu.

Prin urmare, dacă în (29) se operează o contracție, se regăsește *formula lui Huygens-Leibniz*,

$$I_P(\Sigma) = I_G(\Sigma) + I_P(\Sigma_G), \tag{35}$$

unde

$$I_P(\Sigma_G) = \mathcal{M}\overrightarrow{PG}^2, \tag{36}$$

iar $I_G(\Sigma)$ se obține din (33), pentr $P = G$.

B) Dacă în form la (31) se operează o contracție se obține o no ă expresie remarcabilă pentru $I_G(\Sigma)$ în cazul mediului material continuu. Avem

$$I_G(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}}\int_{\Sigma}\mathrm{d}m_Q\int_{\Sigma}\overrightarrow{QR}^2\,\mathrm{d}m_R. \tag{37}$$

În cazul mediului material discret, operînd contracția în formula (30), după ce s-au scris componentele tensorului $\vec{\vec{I}}_G(\Sigma)$ care rezultă din (30), rezultă *formula lui Lagrange*

$$I_G(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} m_k m_l\overrightarrow{Q_kQ_l}^2, \tag{38}$$

care se mai poate scrie și sub forma echivalentă

$$I_G(\Sigma) = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{(k,l)} \sum m_k m_l \overrightarrow{Q_k Q_l^2}, \tag{39}$$

sumarea efectuîndu-se pentru toate combinările simple ale elementelor 1,2, ..., n luate cîte două.

Formula (39) a lui Lagrange, comportă numeroase aplicații geometrice importante.

C) Să considerăm o axă Δ ce trece prin punctul P. Momentul de inerție al sistemului (Σ) față de axa Δ este definit, respectiv, prin

$$I_\Delta(\Sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k \overrightarrow{R_k Q_k^2}, \tag{40}$$

unde R_k este proiecția ortogonală a punctului Q_k pe axa Δ sau prin

$$I_\Delta(\Sigma) = \int_\Sigma \overrightarrow{RQ^2}\, \mathrm{d}m_Q, \tag{41}$$

unde R este proiecția ortogonală a punct lui $Q \in (\Sigma)$ pe această axă.

Fie $\vec{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ versorul axei Δ. Avînd

$$\overrightarrow{RQ^2} = \overrightarrow{PQ^2} \cdot \vec{u}^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u})^2$$

se deduce imediat *formula lui Euler*,

$$I_\Delta(\Sigma) = I_{ij}^P(\Sigma)\, \alpha_i \alpha_j, \tag{42}$$

unde $I_{ij}^P(\Sigma)$ sînt componentele tensorului $\overrightarrow{I_P}(\Sigma)$ date de (23) sau de (24).

Formula (42) se mai scrie sub formă mai condensată,

$$I_\Delta(\Sigma) = \vec{u} \overrightarrow{I_P}(\Sigma) \vec{u}. \tag{43}$$

Ținînd seama de formula lui Steiner-Lurie (29), de aici se regăsește formula clasică,

$$I_\Delta(\Sigma) = \overrightarrow{I_{\Delta_G}}(\Sigma) + \mathcal{M} d^2, \tag{44}$$

unde d este distanța dintre axa Δ și axa Δ_G, paralelă cu ea și trecînd prin G. Avem, într-adevăr,

$$I_{\Delta_G}(\Sigma) = \vec{u}\, \overrightarrow{I_G}(\Sigma)\, \vec{u} \tag{45}$$

și

$$d^2 = \overrightarrow{PG^2} \cdot \vec{u}^2 - (\overrightarrow{PG} \cdot \vec{u})^2 = (\overrightarrow{PG} \times \vec{u})^2. \tag{46}$$

Teoremă. *Momentul de inerție $I_{\Delta_G}(\Sigma)$ al sistemului material (Σ) față de axa Δ_G, de versor $\vec{u}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, care trece prin G are, respectiv, una din expresiile*

$$I_{\Delta_G}(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_k m_l [\overrightarrow{Q_k Q_l^2} - (\overrightarrow{Q_k Q_l} \cdot \vec{u})^2] \tag{47}$$

sau

$$I_{\Delta_G}(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \int_\Sigma \mathrm{d}m_Q \int_\Sigma [\overrightarrow{QR}^2 - (\overrightarrow{QR} \cdot \vec{u})^2] \, \mathrm{d}m_R, \tag{48}$$

după cum el este un sistem material discret sau continuu

Demonstrație. Vom demonstra relația (48). Avem

$$\vec{u} \overset{\Rightarrow}{E} \vec{u} = \vec{u} (\overset{\Rightarrow}{E} \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u} = 1.$$

Dacă notăm componentele lui QR prin X_1^{QR}, X_2^{QR}, X_3^{QR}, avem

$$\vec{u}(\overrightarrow{QR} \otimes \overrightarrow{QR})\vec{u} = \alpha_i (X_i^{kR} X_j^{QR}) \, \alpha_j = (\alpha_i X_i^{QR})^2 =$$

$$= (\overrightarrow{QR} \cdot \vec{u})^2.$$

Ținînd seamă de aceste relații, de (31) și de (45), rezultă formula (48).

O demonstrație similară s-ar face pentru a obține formula (47).

Observație. Formulele (47) și (48) pot fi scrise și sub formele echivalente,

$$I_{\Delta_G}(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} m_k m_l (\overrightarrow{Q_k Q_l} \times \vec{u})^2, \tag{47'}$$

$$I_{\Delta_G}(\Sigma) = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{(k,l)} \sum m_k m_l (\overrightarrow{Q_k Q_l} \times \vec{u})^2, \tag{47''}$$

sau

$$I_{\Delta_G}(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \int_\Sigma \mathrm{d}m_Q \int_\Sigma (\overrightarrow{QR} \times \vec{u})^2 \, \mathrm{d}m_Q, \tag{48'}$$

în (47'') sumarea fiind făcută pentru toate combinările (k, l) ale indicilor $1,2,\ldots,n$.

D) Să considerăm un plan Π; fie $\vec{u}$ versorul normalei la plan și fie O un punct al planului. Se numește moment de inerție față de planul Π al sistemului material discret sau continuu (Σ) expresia

$$I_\Pi(\Sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (\overrightarrow{OQ_k} \cdot \vec{u})^2 \tag{49}$$

în cazul sistemului discret, sau

$$I_\Pi(\Sigma) = \int_\Sigma \overrightarrow{Q_0 Q}^2 \, \mathrm{d}m_Q = \int_\Sigma (\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{u})^2 \, \mathrm{d}m_Q \tag{50}$$

în cazul sistemului continuu, d_k fiind distanța de la punctul Q_k la planul Π, iar Q_0 proiecția ortogonală a punctului Q pe acest plan. Este evident că I_Π nu depinde de alegerea punctului O în planul Π.

Fie Π_G planul dus prin G paralel cu Π și fie d distanța dintre aceste două plane. Dacă I_{Π_G} este momentul de inerție al lui (Σ) față de Π_G, avem relația

$$I_{\Pi}(\Sigma) = I_{\Pi_G}(\Sigma) + \mathcal{M}d^2. \tag{51}$$

Demonstrația este imediată dacă se observă că

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GQ}, \quad (\overrightarrow{OG} \cdot \vec{u})^2 = d^2$$

și se ține seamă de (25) sau (26).

Expresia lui I_{Π_G} este dată, respectiv, de

$$I_{\Pi_G} = \sum_{k=1}^{n} m_k(\overrightarrow{GQ_k} \cdot \vec{u})^2 \tag{52}$$

sau de

$$I_{\Pi_G} = \int_{\Sigma} (\overrightarrow{GQ} \cdot \vec{u})^2 \, \mathrm{d}m_Q. \tag{53}$$

Putem obține însă pentru aceste momente de inerție expresii în care G să nu mai figureze explicit.

Teoremă. *Momentele de inerție ale unui sistem material* (Σ), *discret sau continuu, față de planul* Π_G *de versor* $\vec{u}$ *ce trece prin centrul maselor* G *este dat respectiv, de*

$$I_{\Pi_G}(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_j \cdot m_k(\overrightarrow{Q_j Q_k} \cdot \vec{u})^2 \tag{54}$$

sau de

$$I_{\Pi_G}(\Sigma) = \frac{1}{2\mathcal{M}} \int_{\Sigma} \mathrm{d}m_Q \int_{\Sigma} (\overrightarrow{QR} \cdot \vec{u})^2 \, \mathrm{d}m_R. \tag{55}$$

Demonstrație. Conform formulei (51) dacă se consideră planul Π_{Q_j} paralel cu Π, ce trece prin Q_j, avem

$$I_{\Pi_{Q_j}}(\Sigma) = I_{\Pi_G}(\Sigma) + \mathcal{M}(\overrightarrow{Q_j G} \cdot \vec{u})^2.$$

Înmulțind cu m_j și sumînd, se obține

$$2\mathcal{M}I_{\Pi_G}(\Sigma) = \sum_{j=1}^{n} mI_{\Pi_{Q_j}}(\Sigma).$$

Dar

$$I_{\Pi_{Q_j}}(\Sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k(\overrightarrow{Q_j Q_k} \cdot \vec{u})^2.$$

Rezultă astfel form la (54). Ea se mai scrie şi sub forma

$$I_{\Pi_G} = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{(j,k)} \sum m_j m_k (Q_j Q_k \cdot \vec{u})^2 \tag{54'}$$

cu convenţia de sumare deja amintită.

Un procedeu analog permite să se demonstreze şi relaţia (55).

4. TENSORUL DE INERŢIE INVERS AL UNUI SISTEM MATERIAL

Considerarea acestui tensor, în ipoteza că el există, este de o deosebită importanţă în aplicaţii. Dacă sistemul material (Σ) este animat de o rotaţie de ansamblu, de viteză unghiulară $\vec{\omega}$ în jurul punctului P, atunci momentul cinetic $\vec{K}_P(\Sigma)$ al sistemului în punctul P este dat de

$$\vec{K}_P(\Sigma) = \vec{\vec{I}}_P(\Sigma) \cdot \vec{\omega}. \tag{56}$$

Din această relaţie se va deduce

$$\vec{\omega} = \vec{\vec{I}}_P^{-1}(\Sigma)\, \vec{K}_P(\Sigma). \tag{57}$$

Existenţa tensorului invers $\vec{\vec{I}}_P^{-1}(\Sigma)$ rezultă din faptul că dacă notăm prin $A_P(\Sigma)$ matricea ataşată tensorului de inerţie $I_P(\Sigma)$ în sistemul $Ox_1x_2x_3$, *avem în general,*

$$\det A_P(\Sigma) \neq 0.$$

Într-adevăr, fie E energia cinetică a sistemului (Σ) în mişcarea de rotaţie rigidă în jurul axei Δ.

Avem ca viteză a punctului Q_k pe $\vec{V}_k = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PQ_k}$, unde $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$. Prin urmare, prin calcule simple şi ţinînd seamă de (42),

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I_\Delta(\Sigma) = \frac{1}{2} I_{ij}^P(\Sigma)\, \omega_i\, \omega_j, \tag{58}$$

unde $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ reprezintă componentele lui $\vec{\omega}$ în sistemul $Ox_1x_2x_3$.

Acelaşi rezultat este valabil şi în cazul sistemului material continuu, avînd

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \vec{V}_Q^2 \, \mathrm{d}m_Q, \quad \vec{V}_Q = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PQ}. \tag{59}$$

Formula (58) conduce la

$$E = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{\vec{I}}_P(\Sigma)\, \vec{\omega}. \tag{60}$$

Deoarece *energia cinetică este esenţial pozitivă dacă sistemul material* (Σ) ***nu se reduce la puncte situate pe axa*** Δ rezultă că $E > 0$ pentru orice ω_1, ω_2, ω_3, nu toţi nuli.

Deci, *forma pătratică*

$$I_{ij}^{P}(\Sigma)\,\omega_i\omega_j$$

este definit-pozitivă. Aceasta impune ca să avem inegalitățile lui Sylvester. Deci, în particular,

$$\det A_P(\Sigma) \neq 0.$$

Rezultă de aici că : *existența tensorului de inerție invers este asigurată în orice punct P dacă sistemul (Σ) nu se reduce la puncte situate pe o axă Δ ce trece prin P.*

În cazul particular al sistemului material (Σ_G) redus la punctul G, tensorul $I_P\ (\Sigma_G)$ nu admite un tensor invers, ceea ce este în acord cu rezultatul precedent. Avem de altfel $\det I_{ij}^{P}(\Sigma_G) = 0$, după cum se constată și prin calcul direct, ținînd seamă de (28).

De încheiere să menționăm că deoarece inversa unei matrice simetrice este și ea o matrice simetrică (a se vedea, de exemplu [7], p. 822), rezultă că : *tensorul invers al tensorului de inerție este și el un tensor simetric.*

Primită la redacție la 28 iulie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. V. VALCOVICI, ȘT. BĂLAN, R. VOINEA și colaboratori, *Mecanica teoretică*, Edit. Tehnică București, 1963.
2. L. LUR'E, *Mécanique analytique*, t. I, Masson, Paris, 1968.
3. C. IACOB, *Mecanică teoretică*, Edit. Didactică și Pedagogică București, ed. I. 1971 ; ed. II. 1980.
4. L. DRAGOȘ, *Principiile mecanicii analitice*, Editura Tehnică, București, 1976.
5. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUȘU, *Mecanica*, ed. II, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
6. ȘT. STAICU, *Introducere în mecanica teoretică*. Editura Științifică și Enciclopedică București, 1983.
7. C. IACOB, *Curs de Matematici superioare*, Editura Tehnică, București, 1957.

PROPRIETĂȚI CONSTITUTIVE ÎN TERMOVÎSCOELASTICITATEA LINIARĂ. II. REVERSIBILITATE; SIMETRIE; ÎNTÎRZIERE*)

de IOANA LUCA (ICECHIM) și E. SOÓS (INCREST)

În această a doua parte a lucrării, ca și în prima, termovîscoelasticitatea liniară de tip Boltzmann-Volterra, este privită ca o teorie de sine stătătoare. Arătăm că o anumită proprietate de reversibilitate temporală a ecuației constitutive reprezintă o condiție necesară și suficientă pentru simetria funcției de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$. De asemenea, dăm o condiție necesară și suficientă pentru ca funcția de relaxare $g(\infty) - g(\cdot)$ să fie complet monotonă.

§ 5. REVERSIBILITATEA TEMPORALĂ; CONSECINȚE

Se știe că în cazul materialelor vîscoelastice liniare (vezi Rogers și Pipkin [17]) diferitele tipuri de simetrie materială (de exemplu ortotropia) în general nu implică simetria funcției de relaxare $\mathcal{G}(\cdot)$. În lucrarea amintită Rogers și Pipkin au propus un test ce permite în principiu stabilirea pe cale experimentală a simetriei sau nesimetriei funcției de relaxare în cazul unor simetrii materiale particulare. Se pune însă problema dacă simetria lui $\mathcal{G}(\cdot)$ poate fi stabilită pe cale teoretică. Astfel ne putem întreba dacă disipativitatea izotermă a funcției de relaxare $\mathcal{G}(\cdot)$ poate implica simetria lui $\mathcal{G}(\cdot)$. Răspunsul la această întrebare este *negativ*: Shu și Onat [14] (vezi și Day [11], Cap. 6) au construit o funcție de relaxare (izoterm) disipativă, care nu este simetrică. În cazul materialelor vîscoelastice, deci al proceselor izoterme, problema a fost clarificată de Day ([8], [11], Cap. 6), care a dat un criteriu necesar și suficient ce asigură simetria funcției de relaxare $\mathcal{G}(\cdot)$. În cele ce urmează, extinzînd procedeul lui Day la cazul general, vom arăta că criteriul său funcționează și în situația în care materialul este termovîscoelastic, iar procesele admisibile pot fi și neizoterme. Vom începe cu

Definiția 5.1. Prin *inversarea temporală a unui drum* $\mathbf{\Delta}(\cdot)$ înțelegem un drum $\overline{\mathbf{\Delta}}(\cdot)$ definit prin relația

$$\overline{\mathbf{\Delta}}(t) = \mathbf{\Delta}(-t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{5.1}$$

Teorema 5.1. Funcția de relaxare $\mathcal{R}(s)$ este *simetrică* pentru orice $s \geqslant 0$ dacă și numai dacă lucrul mecanic-căldura ce corespunde oricărui drum închis $\mathbf{\Delta}(\cdot)$ care pleacă din starea naturală rămîne neschimbat la inversarea temporală a drumului; deci dacă

$$l(\mathbf{\Delta}(\cdot)) = l(\overline{\mathbf{\Delta}}(\cdot)). \tag{5.2}$$

Înainte de a trece la demonstrarea teoremei observăm că acest criteriu de tip Day este interesant din punctul de vedere al „termodinamicii ireversibile onsageriste" care pretinde că relațiile de reciprocitate (de si-

*) Prima parte a lucrării, care conține și referirile bibliografice, a apărut în St. Cerc. Mec. Apl. Vol. 45., nr. 5., 1986

metrie) de tip Onsager sînt implicate de — și reflectă la nivelul „macroscopic" — „reversibilitatea" temporală existentă la nivelul „microscopic" (vezi de exemplu de Groot și Mazur [19], Cap. IV, § 3). Precizăm însă că deși pretenția există, demonstrarea valabilității sale în cazul general (dar liniar) lipsește.

Demonstrație. Necesitatea condiției rezultă astfel : deoarece $\mathbf{\Delta}(\cdot)$ și $\overline{\mathbf{\Delta}}(\cdot)$ sînt drumuri închise care pleacă din starea naturală, pe baza relațiilor (2.3) și (2.5), după un calcul simplu rezultă :

$$l(\mathbf{\Delta}(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \dot{\mathbf{\Delta}}(t) \cdot \mathcal{R}(t-s)\, \dot{\mathbf{\Delta}}(s)\, ds dt \tag{5.3}$$

și

$$l(\overline{\mathbf{\Delta}}(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \dot{\overline{\mathbf{\Delta}}}(t) \cdot \mathcal{R}(t-s)\, \dot{\overline{\mathbf{\Delta}}}(s)\, ds\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \dot{\mathbf{\Delta}}(-t) \cdot \mathcal{R}(t-s) \dot{\mathbf{\Delta}}(-s) ds\, dt.$$

Făcînd schimbarea de variabile $s' = -s$, $t' = -t$ și apoi schimbînd ordinea de integrare, obținem succesiv

$$l(\overline{\mathbf{\Delta}}(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t}^{\infty} \dot{\mathbf{\Delta}}(t') \cdot \mathcal{R}(s'-t')\, \dot{\mathbf{\Delta}}(s')\, ds'\, dt' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s'} \dot{\mathbf{\Delta}}(t') \cdot \mathcal{R}(s'-t')\, \dot{\mathbf{\Delta}}(s')\, dt'\, ds' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{s'} \dot{\mathbf{\Delta}}(s') \cdot \mathcal{R}^T(s'-t')\, \dot{\mathbf{\Delta}}(t')\, dt'\, ds',$$

adică

$$l(\overline{\mathbf{\Delta}}(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \dot{\mathbf{\Delta}}(t) \cdot \mathcal{R}^T(t-s)\, \dot{\mathbf{\Delta}}(s)\, ds\, dt. \tag{5.4}$$

Comparînd (5.4) cu (5.3) conchidem că dacă $\mathcal{R}^T(s) = \mathcal{R}(s)$, $s \geqslant 0$, atunci $l(\mathbf{\Delta}(\cdot)) = l(\overline{\mathbf{\Delta}}(\cdot))$.

Suficiența condiției rezultă astfel : Presupunem că (5.2) are loc. Atunci funcția

$$\mathfrak{L}(\cdot) = \mathcal{R}(\cdot) - \mathcal{R}^T(\cdot) \tag{5.5}$$

ale cărei valori sînt tensori antisimetrici din Lin $\mathcal{A}$ satisfac relația

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \dot{\mathbf{\Lambda}}(t)\cdot\mathfrak{L}(t-s)\,\dot{\mathbf{\Lambda}}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 0 \tag{5.6}$$

pe orice drum închis $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$ care pornește din starea naturală, după cum rezultă din (5.2) — (5.4).

Vom arăta că $\mathfrak{L}(t) = 0$ pentru orice $t \in [0, \infty)$, de unde urmează simetria lui $\mathfrak{R}(t)$ $\forall t \geqslant 0$.

Fie $t_1, t_2 > 0$ fixați. Pentru un ε arbitrar din intervalul $(0, \min(t_1,t_2))$ și pentru orice doi tensori $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{\Omega}$ din $\mathcal{A}$ vom introduce un drum $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$ liniar pe porțiuni și care pleacă din starea naturală, definit astfel

$$\mathbf{\Lambda}(t) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pentru } t \leqslant 0, \\ \varepsilon^{-1}\,t\mathbf{\Lambda} & \text{pentru } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ \mathbf{\Lambda} & \text{pentru } \varepsilon \leqslant t \leqslant t_1, \\ \mathbf{\Lambda} + \varepsilon^{-1}(t-t_1)(\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Lambda}) & \text{pentru } t_1 \leqslant t \leqslant t_1+\varepsilon, \\ \mathbf{\Omega} & \text{pentru } t_1+\varepsilon \leqslant t \leqslant t_1+t_2, \\ \varepsilon^{-1}(t_1+t_2+\varepsilon-t)\mathbf{\Omega} & \text{pentru } t_1+t_2 \leqslant t \leqslant t_1+t_2+\varepsilon, \\ \mathbf{0} & \text{pentru } t_1+t_2+\varepsilon \leqslant t. \end{cases} \tag{5.7}$$

Pentru acest drum particular din (5.6) găsim:

$$\varepsilon^{-2}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{t} \mathbf{\Lambda}\cdot\mathfrak{L}(t-s)\,\mathbf{\Lambda}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + \varepsilon^{-2}\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} (\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Lambda})\cdot\mathfrak{L}(t-s)\,\mathbf{\Lambda}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t +$$

$$+\varepsilon^{-2}\int_{t_1}^{t_1+1}\int_{t_1}^{t} (\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Lambda})\cdot\mathfrak{L}(t-s)(\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Lambda})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t - \varepsilon^{2}\int_{t_1+t_2}^{t_1+t_2+\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \mathbf{\Omega}\cdot\mathfrak{L}\,(t-s)\,\mathbf{\Lambda}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t -$$

$$-\varepsilon^{-2}\int_{t_1+t_2}^{t_1+t_2+\varepsilon}\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon} \mathbf{\Omega}\cdot\mathfrak{L}(t-s)\,(\mathbf{\Omega}-\mathbf{\Lambda})\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t +$$

$$+\varepsilon^{-2}\int_{t_1+t_2}^{t_1+t_2+\varepsilon}\int_{t_2}^{t} \mathbf{\Omega}\cdot\mathfrak{L}(t-s)\,\mathbf{\Omega}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 0.$$

Deoarece $\mathfrak{L}(\cdot)$ este antisimetric, egalitatea precedentă se reduce la

$$\varepsilon^{-2}\int_{t_1}^{t_1+\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \mathbf{\Omega}\cdot\mathfrak{L}(t-s)\mathbf{\Lambda}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t - \varepsilon^{-2}\int_{t_1+t_2}^{t_1+t_1+\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \mathbf{\Omega}\cdot\mathfrak{L}(t-s)\,\mathbf{\Lambda}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t +$$

$$+\varepsilon^{-2}\int_{t_1+t_2}^{t_1+t_2+\varepsilon}\int_{t_1}^{t_1+t_2} \mathbf{\Omega}\cdot\mathfrak{L}(t-s)\,\mathbf{\Lambda}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = 0.$$

Utilizînd teorema mediei și făcînd $\varepsilon \to 0$, conchidem valabilitatea relației

$$\Omega \cdot (\mathfrak{L}(t_1) - \mathfrak{L}(t_1 + t_2) + \mathfrak{L}(t_2))\, \Lambda = 0,$$

pentru orice Λ, Ω din $\mathcal{A}$ și pentru orice $t_1, t_2 > 0$. Astfel rezultă că are loc egalitatea

$$\mathfrak{L}(t_1 + t_2) = \mathfrak{L}(t_1) + \mathfrak{L}(t_2) \;\forall\, t_2, t_2 > 0.$$

Se știe însă că singurele soluții continue ale acestei ecuații funcționale au forma $\mathfrak{L}(t) = t\,\mathfrak{L}(1)$ cu $t > 0$. Acest rezultat arată că dacă $\mathfrak{L}(1) \neq 0$, atunci $|\mathfrak{L}(\cdot)|$ este nemărginit, fapt ce contrazice restricția (2.4) impusă asupra funcțiilor de relaxare. Prin urmare $\mathfrak{L}(1) = 0$, deci (prin continuitate) $\mathfrak{L}(t) = 0 \;\forall\, t \geqslant 0$ și, în consecință, $\mathfrak{R}(t)$ este simetric pentru orice $t \geqslant 0$. Evident, simetria lui $\mathfrak{R}(0)$ și $\mathfrak{R}(\infty)$ rezultă din continuitatea funcției $\mathfrak{R}(\cdot)$, respectiv existența lui $\mathfrak{R}(\infty) = \lim_{t\to\infty} \mathfrak{R}(t)$.

În cazul în care funcția de relaxare $\mathfrak{R}(\cdot)$ este simetrică, relația de structură (1.2) se simplifică și avem

$$\mathfrak{R}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{G}(s) & -\mathbf{N}(s) \\ -\mathbf{N}(s) & -g(s) \end{bmatrix}, \quad s \in [0, \infty), \tag{5.8}$$

unde pentru orice $s \geqslant 0$, $\mathcal{G}(s)$ este un tensor simetric din Lin $\mathcal{S}$, $\mathbf{N}(s)$ este un tensor din $\mathcal{S}$, iar $g(s)$ este un număr real.

Rezumînd analiza efectuată, putem conchide că, criteriul de tip Day furnizează un răspuns satisfăcător la întrebarea privind proprietatea P_6 a funcției de relaxare $\mathfrak{R}(\cdot)$. Este însă evident că natura legăturii acestui criteriu de reversibilitate „macroscopică" cu proprietatea de reversibilitate „microscopică" de tip Onsager rămîne în continuare neclarificată.

§ 6. ÎNTOARCEREA ȘI ÎNTÎRZIEREA UNUI DRUM; CONSECINȚE

În acest paragraf ne vom limita la cazul unui *conductor de căldură rigid* cu memorie lungă de tip Boltzmann-Volterra. În cest caz ecuația constitutivă a materialului are forma

$$h(t, T(\cdot)) = g(0)\, T(t) + \int_0^\infty \dot{g}(s)\, T^t(s)\, \mathrm{d}s, \tag{6.1}$$

iar expresia lucrului mecanic-căldurii ce corespunde drumului (rigid) $T(\cdot)$ devine

$$l(T(\cdot)) = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t, T(\cdot))\, \dot{T}(t)\, \mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

Determinările experimentale realizate în cazul materialelor vîscoelastice liniare și izotrope arată că cele două funcții de relaxare care caracterizează complet răspunsul materialului sînt funcții monoton des-

crescătoare. Se pune astfel întrebarea dacă restricțiile termodinamice, în particular disipativitatea funcției de relaxare implică și descreșterea monotonă a componentelor sale. Răspunsul la această întrebare este *negativ*, deoarece Gurtin și Herrera [12] au construit o funcție de relaxare (în caz unidimensional) care este disipativă, dar nu este monoton descrescătoare. Reluînd problema (tot în cazul vîscoelastic și unidimensional) Day [7] a dat un criteriu necesar și suficient pentru ca funcția de relaxare să fie complet monotonă. În cele ce urmează vom cerceta modul în care funcționează criteriul lui Day în situația în care el este aplicat — cu modificările ce se impun în mod natural — la cazul unui conductor rigid, caracterizat de ecuația constitutivă (6.1). Vom începe analiza cu introducerea unor definiții și cu prezentarea a două teoreme datorate lui Bernstein, necesare în raționamentele care urmează.

Definiția 6.1. O funcție analitică $g : [0, \infty) \to R$ se numește *complet monotonă* dacă

$$(-1)^n g^{(n)}(s) \geqslant 0 \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots, \; s \geqslant 0.$$

Teorema 6.1. (Bernstein ; vezi [7]). O funcție analitică $g : [0, \infty) \to R$ este complet monotonă dacă și numai dacă poate fi reprezentată printr-o integrală Riemann-Stieltjes

$$g(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\alpha(\lambda), \qquad s \geqslant 0,$$

unde $\alpha : [0, \infty) \to R$ este o funcție mărginită nedescrescătoare.

Definiția 6.2. O funcție analitică $g : [0,\infty) \to R$ este *de tip pozitiv* dacă

$$\int_a^b \int_a^b g(s+t)\, \mu(s)\, \mu(t)\, ds\, dt \geqslant 0,$$

oricare ar fi a, b cu $0 \leqslant a < b < \infty$ și oricare ar fi funcția continuă $\mu : [a,b] \to R$.

Teorema 6.2 (Bernstein ; vezi [7]). O funcție analitică $g : [0, \infty) \to R$ admite reprezentarea integrală

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda s}\, d\beta(\lambda), \qquad s \geqslant 0,$$

cu $\beta : (-\infty, \infty) \to R$ funcție nedescrescătoare, dacă și numai dacă este de tip pozitiv.

Definiția 6.3. Spunem că drumul *închis* $T(\cdot)$ este un *drum întors* dacă există un număr real ρ, așa încît

$$T(\rho - s) = T(\rho + s) \quad \forall\, s \geqslant 0. \tag{6.3}$$

Cu alte cuvinte, pe un drum întors constatăm că, la un moment dat ρ drumul este inversat, fiind parcurs în sens opus. Momentul ρ este unic

determinat de drumul $T(\cdot)$ și se numește *momentul de întoarcere al drumului*.

Definiția 6.4. Fie $T(\cdot)$ un drum întors cu momentul de întoarcere ρ și fie τ un număr real nenegativ, drumul $T_\tau(\cdot)$ definit prin

$$T_\tau(t) = \begin{cases} T(t) & \text{pentru } -\infty < t \leqslant \rho, \\ T(\rho) & \text{pentru } \rho \leqslant t \leqslant \rho + \tau, \\ T(t-\tau) & \text{pentru } \rho + \tau \leqslant t < \infty \end{cases} \tag{6.4}$$

se numește *întîrzierea cu* τ a drum lui întors $T(\cdot)$.

$T_\tau(\cdot)$ este tot un drum întors, momentul său de întoarcere fiind $\rho + \tau/2$.

Definiția 6.5. Vom spune că lucrul mecanic-căldura ce corespunde unui drum întors $T(\cdot)$ *este mărit prin întîrzierea acestui drum*, dacă pentru orice $\tau \geqslant 0$

$$l(T_\tau(\cdot)) \geqslant l(T(\cdot)). \tag{6.5}$$

În continuare vom presupune că funcția de relaxare $g(\cdot)$ satisface următoarele restricții suplimentare:

(a) $g(\cdot)$ este o funcție analitică;

(b) $g(\cdot)$, $\dot{g}(\cdot)$ și $\ddot{g}(\cdot)$ sînt funcții mărginite;

(c) $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{g}(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \ddot{g}(t) = 0$.

Cu rezultatele, noțiunile și restricțiile introduse, avînd la bază considerațiile lui Day [9], putem enunța și demonstra

Teorema 6.3. Dacă $g(\cdot)$ este funcția de relaxare a unui conductor de căldură rigid, caracterizat de ecuația constitutivă (6.1), atunci $g(\infty) - g(\cdot)$ este o funcție *complet monotonă* dacă și numai dacă lucrul mecanic-căldura ce corespunde oricărui drum întors este *mărit* prin întîrzierea drumului.

Demonstrația urmărește îndeaproape linia raționamentelor lui Day [7], cu evidentele modificări ce se impun în mod natural.

Demonstrație. Pentru orice drum întors $T(\cdot)$ definim funcția $\overline{T}:[0, \infty) \to R$, prin relația

$$\overline{T}(s) = T(s + \rho) - T(\infty), \quad s \geqslant 0, \tag{6.6}$$

unde ρ este momentul de întoarcere al drumului $T(\cdot)$.

După un calcul lung, care face apel de repetate ori la relațiile (6.1)—(6.4), (6.6) și la restricțiile (c), se obține relația

$$l(T_\tau(\cdot)) - l(T(\cdot)) = L(\tau, \overline{T}(\cdot)) - L(0, \overline{T}(\cdot)), \tag{6.7}$$

unde

$$L(u, \overline{T}(\cdot)) = (g(u) - g(\infty))\overline{T}^2(0) + 2\overline{T}(0)\int_0^\infty \dot{g}(s+u)\,\overline{T}(s)\,ds + \int_0^\infty\int_0^\infty \ddot{g}(s+t+u)\overline{T}(s)\,\overline{T}(t)\,ds\,dt. \tag{6.8}$$

Să notăm cu $\mathcal{C}$ mulțimea tuturor funcțiilor $F : [0, \infty) \to R$, continuu diferențiabile, avînd suport compact și satisfăcînd restricțiile $F(0) = \dot{F}(0) = F(\infty) = 0$.
Pentru orice $F(\cdot)$ din $\mathcal{C}$ relațiile

$$T(s) = \begin{cases} F(-s) & \text{pentru } s < 0, \\ F(s) & \text{pentru } 0 \leqslant s \end{cases}$$

definesc un drum întors, cu timpul de întoarcere $\rho = 0$. Pentru un astfel de drum, (6.8) se reduce la

$$L(u, F(\cdot)) = \int_0^\infty \int_0^\infty \ddot{g}(s + t + u)\, F(s)\, F(t)\, ds\, dt.$$

Din a doua ipoteză (c) urmează că

$$\lim_{u \to \infty} L(u, F(\cdot)) = 0$$

și astfel, folosind (6.7) și (6.5), deducem că

$$-L(0, F(\cdot)) = -\int_0^\infty \int_0^\infty \ddot{g}(s + t)\, F(s)\, F(t)\, ds\, dt \geqslant 0 \tag{6.9}$$

oricare ar fi $F(\cdot)$ din $\mathcal{C}$.

Dar dacă $0 \leqslant a < b < \infty$, iar μ este o funcție continuă arbitrară pe $[a, b]$, atunci există un șir uniform mărginit F_n din $\mathcal{C}$ așa încît $F_n \to \mu$ punctual, a.p.t. pe $[a, b]$ și $F_n = 0$ pe $[0, a]$ și $[b, \infty)$. În acest caz

$$-L(0, F_n(\cdot)) \to -\int_a^b \int_a^b \ddot{g}(s + t)\, \mu(s)\, \mu(t)\, ds\, dt \quad \text{cînd } n \to \infty$$

și din (6.9) urmează că

$$-\int_a^b \int_a^b \ddot{g}(s + t)\, \mu(s)\, \mu(t)\, ds\, dt \geqslant 0$$

oricare ar fi funcția continuă μ pe $[a, b]$ și oricare ar fi $0 \leqslant a < b < \infty$. Astfel, pe baza teoremei 6.2 a lui Bernstein urmează că $-\ddot{g}(\cdot)$ admite reprezentarea integrală

$$-\ddot{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda s}\, d\beta(\lambda), \tag{6.10}$$

unde $\beta : (-\infty, \infty) \to R$ este o funcție nedescrescătoare.

Se constată imediat (vezi [7]) că, din a treia ipoteză (b) și din (6.10), rezultă că funcția $\beta(\cdot)$ trebuie să fie constantă pe $(-\infty, 0)$. Astfel, din (6.10) găsim

$$-\ddot{g}(s) = \beta(0^+) - \beta(0^-) + \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\beta(\lambda). \tag{6.11}$$

Făcînd $s \to \infty$ în (6.11) și folosind a doua ipoteză (c), conchidem că $\beta(0^+) - \beta(0^-) = 0$, deci

$$-\ddot{g}(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\beta(\lambda).$$

Acum teorema 6.1 a lui Bernstein ne arată că $-\ddot{g}(\cdot)$ este o funcție complet monotonă, adică satisface relațiile

$$-(-1)^n g^{(n+2)}(s) = 0 \text{ pentru } n = 0,1,2,\ldots,\ s \geqslant 0.$$

Deoarece am admis ipoteza (c), urmează că

$$\dot{g}(s) = -\int_s^\infty \ddot{g}(s')\, ds',$$

deci $\dot{g}(\cdot)$ este o funcție de asemenea complet monotonă. Dar

$$g(\infty) - g(s) = \int_s^\infty \dot{g}(s')\, ds',$$

de unde rezultă în final că și funcția $g(\infty) - g(\cdot)$ este complet monotonă.

Mai avem de arătat că, dacă funcția $g(\infty) - g(\cdot)$ este complet monotonă, atunci lucrul mecanic-căldura pe un drum întors $T(\cdot)$ este mai mic decît cel corespunzător oricărei întîrzieri cu τ a drumului $T(\cdot)$. Deoarece $g(\infty) - g(\cdot)$ este complet monoton, conform teoremei 6.1 avem

$$g(\infty) - g(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}\, d\alpha(\lambda),$$

unde $\alpha(\cdot)$ este o funcție nedescrescătoare și mărginită. Astfel, (6.8) se scrie succesiv :

$$L(u, \overline{T}(\cdot)) = -\overline{T}^2(0)\int_0^\infty e^{-\lambda u}\, d\alpha(\lambda) - 2\overline{T}(0)\int_0^\infty\int_0^\infty (-\lambda) e^{-\lambda(s+u)}\overline{T}(s)\, d\alpha(\lambda) ds -$$

$$-\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty (-\lambda)^2 e^{-\lambda(s+t+u)}\,\overline{T}(s)\,\overline{T}(t)\, d\alpha(\lambda)\, ds dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda u}\left\{-\overline{T}^2(0) + 2\overline{T}(0)\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda s}\overline{T}(s)\, ds - \left(\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda s}\overline{T}(s) ds\right)^2\right\} d\alpha(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda u}\left(\overline{T}(0) - \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda s}\,\overline{T}(s) ds\right)^2 d\alpha(\lambda).$$

Înlocuind în od corespunzător expresia de mai sus în (6.7), obținem:

$$l(T_\tau(\cdot)) - l(T(\cdot)) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda\tau}) \left(\overline{T}(0) - \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \overline{T}(s)\, ds \right)^2 d\alpha(\lambda) \geqslant 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

§ 7. CONCLUZII

Rezumăm acum principalele rezultate obținute în această lucrare, în care am încercat să răspundem la unele din întrebările legate de proprietățile enunțate în paragraful introductiv.

Urmîndu-l pe Day [11], am pornit cu ecuația constitutivă (2.5), în care funcția de relaxare $R(\cdot)$ *nu* provine în mod necesar din densitatea de energie liberă (deci cadrul este altul decît cel al lui Coleman din [3] și [4]) și *am postulat* proprietatea de disipare P_9, a cărei valabilitate a fost demonstrată de Coleman în cadrul termodinamicii materialelor cu memorie slăbită. În cadrul adoptat de noi, am demonstrat teorema 3.1., care dă un *răspuns afirmativ* la întrebările legate de P_1, P_2, P_3.

Proprietățile P_4 și P_5 ale funcției de relaxare $\mathcal{G}(\cdot)$ au fost stabilite (vezi teorema 4.1) de Gurtin și Herrera în [12]. În teorema 4.5 a lucrării noastre am dat o condiție suficientă pentru valabilitatea proprietățile P_4 și P_5 ale funcției de relaxare $g(\cdot)$.

Extinzînd raționamentele lui Day (vezi [11]) din cazul izoterm la cel în care pot apare („mici") variații de temperatură, am răspuns *complet* la întrebarea legată de proprietatea P_6, în sensul că am enunțat (vezi teorema 5.1) o proprietate a materialului termovîscoelastic liniar echivalentă cu simetria funcției de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ corespunzătoare lui. Evident, sînt posibile și alte proprietăți ale materialului echivalente cu simetria lui $\mathcal{R}(\cdot)$.

Analizînd consecințele ce decurg din ipotezele de compatibilitate cu termodinamica și, respectiv, cu termostatica asupra funcției de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$, sîntem conduși prin teorema 4.6 la a conchide că, în cadrul admis, *nu* putem da un răspuns satisfăcător la problemele legate de proprietate P_7, dacă nu vrem să excludem efectele de memorie în cazul unui material rigid conductor de căldură. Credem că tocmai datorită rezultatului paradoxal conținut în teorema 4.6, bazat pe ipoteze fizic acceptabile în cadrul a două teorii de sine stătătoare: termodinamica de tip Truesdell, Toupin, Coleman și termostatica de tip Gibbs, Coleman, Noll, Coleman în [3], [4] și Day în [7] — [11] au exclus din considerațiilor lor — legate de subiectul tratat — efectele termice, limitînd -se la cazul proceselor izoterme.

Prin teorema 6.3 am dat un răspuns la problema P_8. Completa monotonie a funcției $g(\infty) - g(\cdot)$ implică în particular $\dot{g}(s) \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, un rezultat asemănător fiind obținut pe baze termodinamice de Christensen ([6], Cap. 3), ceea ce arată că proprietatea de monotonie demonstrată de noi este în acord cu implicația similară a inegalității Clausius-Duhem

Menționăm în final că pe lista proprietăților $P_1 - P_9$ mai poate fi trecută și proprietatea P_{10}, care, ca și P_9, rămîne încă *neelucidată*, și anume :

P_{10} : Dacă $\mathcal{R}(\cdot)$ este funcția de relaxare a unui material termovîscoelastic liniar de tip Boltzmann-Volterra, există un potențial termodinamic (de tipul energiei interne specifice) din care să derive ecuația constitutivă (2.5)?. Dacă există, atunci cîte astfel de potențiale există și care sînt proprietățile lor esențiale ?

În încheiere accentuăm încă odată faptul că proprietatea de disipare P_9, impusă asupra funcției de relaxare $\mathcal{R}(\cdot)$ *nu* a fost suficientă pentr a deduce majoritatea proprietăților analizate și au fost necesare ipoteze suplimentare, logic independente de cea de disipare. Acest fapt, precum și inexistența — în cadrul adoptat — a unui răspuns satisfăcător la problema P_7 ne conving atît de incompletitudinea formulării celei de a doua legi a termodinamicii în modul stipulat de Truesdell și Toupin, cît și de natura nesatisfcăătoare a modului în care este elucidată în prezent relația dintre termodinamică și termostatică. Problema formulării mai adecvate a celei de a doua legi a termodinamicii, ca și cea a elucidării statutului termostaticii în cadrul termodinamicii, rămîn deocamdată *deschise*.

Primit la redacție la 8 octombrie 1985

CONTRIBUȚII NOI LA STUDIUL MIȘCĂRII LAMINARE A FLUIDULUI VÎSCOS. II. UTILIZAREA TRANSFORMĂRII CONFORME PENTRU DOMENII BANDĂ

de I. SETEANU și M. ERHAN

Institutul Politehnic București

Se analizează curgerea plană, permanentă și laminară a unui fluid vîscos pentru diferite valori ale numărului Reynolds într-un domeniu de tip bandă. Se transformă domeniul fizic, folosind metodele teoriei funcțiilor de variabilă complexă, pe un domeniu bandă de lățime constantă, determinîndu-se ecuațiile transformate de mișcare. Se rezolvă aceste ecuații, pentru condiții la limită și asimptotice corespunzătoare situației fizice, cu ajutorul unui algoritm de iterații succesive. Se discretizează domeniul fictiv de curgere cu o rețea rectangulară de noduri, analizîndu-se comportarea vîrtejului fizic și „fictiv" pe frontierele domeniului pentru a se obține condiții la limită suplimentare. Se prezintă rezultatele obținute pentru un caz concret la diferite numere Reynolds de curgere.

1. TRANSFORMAREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE ȘI A CONDIȚIILOR LA LIMITĂ

Se consideră curgerea plană, permanentă și laminară a fluidului vîscos într-un domeniu de tip bandă cu frontierele paralele la mare distanță amonte și aval, unde mișcarea tinde asimptotic către curgerea plană Poiseuille. Frontiera se admite netedă pe porțiuni, cu puncte anguloase.

Folosind transformarea conformă $w = u + \mathrm{i}\, v = f(z)$, unde $z = x + \mathrm{i}\, y$, se reprezintă canalul de tip bandă din planul z pe banda rectangulară din planul „fictiv" w. Ecuațiile de mișcare devin [1]:

$$T_k \Delta_1 \psi = -\omega, \tag{1}$$

$$\Delta_1 (T_k \Delta_1 \psi) = \mathrm{Re} \frac{D(T_k \Delta_1 \psi, \psi)}{D(u, v)}, \tag{2}$$

unde $\Delta_1 = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$, iar $\omega = -\Delta\psi$ este rotorul vitezei în planul fizic. Modulul transformării conforme

$$T_k = \left| \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \tag{3}$$

se anulează în punctele anguloase dirijate spre exterior și crește nemărginit în vecinătatea punctelor anguloase dirijate spre interior.

Introducînd în locul vîrtejului fizic ω, vîrtejul „fictiv" ζ, definit prin relația

$$\zeta = -\Delta_1 \psi, \tag{4}$$

ecuațiile (1) și (2) devin :

$$\omega = T_k\,\zeta, \tag{5}$$

$$\Delta_1(T_k\,\zeta) = \mathrm{Re}\frac{D(T_k\,\zeta,\,\psi)}{D(u,\,v)}. \tag{6}$$

Se arată că [2] pe frontierele solide transformate vîrtejul „fictiv" ζ satisface următoarele condiții la limită (fig. 1) :

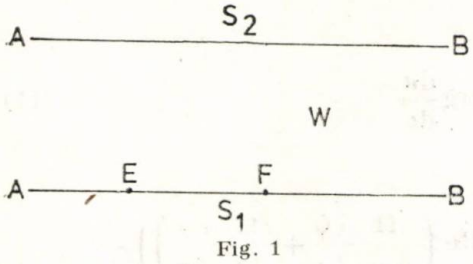


Fig. 1

$$\zeta_{S_1} = -6,\ \zeta_{S_2} = 6, \tag{7}$$

astfel încît valorile limită ale vîrtejului fizic sînt :

$$\omega_{S_1} = -6\,T_k,\ \omega_{S_2} = 6\,T_k. \tag{8}$$

În conformitate cu aceste condiții, vîrtejul fizic se anulează în punctele anguloase externe și crește nemărginit în valoare absolută în vecinătatea punctelor anguloase interne, fiind proporțional cu T_k. Dezvoltarea în serie Taylor trunchiată în planul fizic este neadecvată din acest motiv, dar este legitimă în planul „fictiv" cu referire la vîrtejul „fictiv" ζ.

Întrucît frontiera S_1 conține ambele puncte anguloase E și F (fig.2), apriori este posibil ca, vîrtejul „fictiv" fiind constant pe segmentul deschis EF, valoarea constantei să difere de $\zeta = -6$, deși această valoare a vîrtejului „fictiv" este impusă de condițiile asimptotice la mare distanță pe segmentele AE și FB.

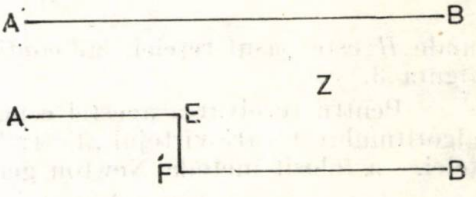


Fig. 2

Se poate demonstra că, admițînd continuitatea vîrtejului „fictiv" și a primei sale derivate în punctele interioare ale domeniului, nu poate exista o discontinuitate pe frontieră în vecinătatea punctelor anguloase. Analiza comportării vîrtejului „fictiv" pe frontieră în acest caz va fi prezentată într-o lucrare ulterioară.

2. SCHEMA ÎN DIFERENȚE FINITE

În domeniul de tip bandă din planul „fictiv" se definește o rețea rectangulară de noduri echidistante, transpunîndu-se în diferențe finite relațiile (4) și (6). Întrucît factorii T_k pot avea valori mari în nodurile adiacente punctelor anguloase interne, rezolvarea euațiilor algebrice în diferențe, direct sau prin procedee iterative, ridică probleme dificile de

stabilitate numerică. Pentru a evita acest inconvenient este comod ca în locul funcției

$$T_k = \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \exp\left(2\mathrm{Re}\left(\ln\frac{dw}{dz}\right)\right) \tag{9}$$

să se utilizeze o funcție armonic conjugată, observînd că

$$2\ln\frac{dw}{dz} = \ln T_k + i\,2\arg\frac{dw}{dz}. \tag{10}$$

Introducînd notația

$$\Omega = 2\arg\frac{dw}{dz} \tag{11}$$

se poate arăta că ecuația (6) devine

$$\Delta_1\zeta + \zeta\left(\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right)^2 - \mathrm{Re}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{\partial\Omega}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial\zeta}{\partial u}\left(\mathrm{Re}\frac{\partial\psi}{\partial v} - 2\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right) - \frac{\partial\zeta}{\partial v}\left(\mathrm{Re}\frac{\partial\psi}{\partial u} - 2\frac{\partial\Omega}{\partial u}\right). \tag{12}$$

În diferențe finite, ecuația (4) se scrie:

$$\frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0}{H^2} = -\zeta_0, \tag{13}$$

unde H este pasul rețelei, iar configurația nodurilor este prezentată în figura 3.

Pentru rezolvarea acestei ecuații de tip Poisson, în prima etapă a algoritmului în care vîrtejul „fictiv" ζ este cunoscut în toate nodurile rețelei, s-a folosit metoda Newton generalizată cu un factor de suprarelaxare adecvat, care asigură convergența necondiționată a procedeului iterativ. În fiecare nod interior al domeniului „fictiv" de tip bandă se obține o ecuație liniară de tip (13), iar valorile funcției ψ pe frontiere sînt impuse ($\psi_{S_1} = 0$, $\psi_{S_1} = 1$); la mare distanță funcția ψ este aproximată prin soluția asimptotică Poiseuille.

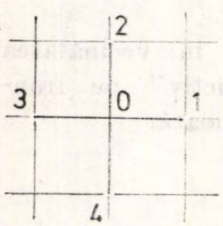


Fig. 3

Ecuația (12) are forma unei ecuații eliptice cvasiliniare în ζ, adusă la forma canonică:

$$\Delta_1\zeta + A\zeta = B\frac{\partial\zeta}{\partial u} + C\frac{\partial\zeta}{\partial v} \tag{14}$$

cu notații evidente. Transpunerea în diferențe finite a acestei ecuații are ca rezultat obținerea unui sistem de ecuații liniare avînd ca necunoscute

valorile vîrtejului „fictiv" ζ în nodurile interioare, pentru o problemă Dirichlet cu condiții pe contur și la mare distanță :

$$\zeta_{S_1} = -6\,;\ \zeta_{S_2} = 6,$$
$$\zeta_{\pm\infty} = 6(2v - 1). \tag{15}$$

În principiu, se poate rezolva sistemul algebric prin metoda Newton generalizată, însă nu este garantată condiția de dominanță diagonală datorită termenului $A\zeta$ din membrul stîng. Din această cauză se preferă folosirea unei scheme în diferențe mixtă (forward-backward) care asigură condiția de dominanță diagonală necesară pentru convergența procedeului iterativ [3] :

— dacă $B < 0$ se folosește schema forward :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} \simeq \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{H} \quad \text{(analog pentru } C < 0); \tag{16}$$

— dacă $B > 0$ se folosește schema backward :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{\zeta_0 - \zeta_3}{H} \quad \text{(analog pentru } C > 0). \tag{17}$$

Valorile derivatelor funcției Ω în nodurile interioare au fost exprimate prin relațiile analitice corespunzătoare transformării conforme.

Algoritmul de rezolvare se desfășoară în etape globale de calcul, fiecare etapă divizîndu-se în două secvențe :

— calculul funcției de curent ψ cu valorile vîrtejului „fictiv" cunoscute (condiții inițiale date sau rezultatele din etapa anterioară);

— calculul vîrtejului „fictiv" ζ în cadrul schemei forward-backward, admițînd că funcția de curent în noduri este cunoscută din secvența anterioară.

Fiecare secvență presupune un șir de iterații în cadrul metodei Newton generalizată de rezolvare a sistemului algebric obținut. La sfîrșitul fiecărei etape se testează convergența în sens Cauchy a șirului de funcții vîrtej „fictiv" ζ, verificîndu-se tendința de scădere monotonă a maximului valorii absolute a diferenței dintre vîrtejul „fictiv" actual și cel din etapa precedentă în toate nodurile rețelei. Procedeul de calcul se încheie atunci cînd această abatere globală devine inferioară unei valori impuse.

3. REZULTATE

S-a utilizat modelul matematic descris mai sus pentru determinarea spectrului hidrodinamic al liniilor de curent în cazul curgerii laminare a fluidului vîscos într-un domeniu de tip bandă cu treaptă, de lățime egală cu unitatea în aval, respectiv 0,533 în amonte. Transformarea conformă $w = w(z)$ care realizează trecerea de la domeniul fizic la domeniul

„fictiv" — bandă de lăţime constantă egală cu unitatea este [4]:

$$z = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arch}\left(\frac{2c_1}{c_1 - 1} e^{\pi w} - \frac{c_1 + 1}{c_1 - 1}\right) - \frac{1}{\pi\sqrt{c_1}} \operatorname{Arch}\left(\frac{c_1 + 1}{c_1 - 1} - \frac{2}{c_1 - 1} e^{-\pi w}\right), \tag{18}$$

unde c_1 este un factor supraunitar egal cu pătratul raportului dintre lăţimea aval şi lăţimea amonte :

$$c_1 = \left(\frac{1}{0{,}533}\right)^2 = 3{,}514. \tag{19}$$

În figura 4 se reprezintă schematic influenţa numărului Reynolds al mişcării asupra configuraţiei liniei de separare dintre nucleul curgerii directe şi zona turbionară de curgere inversă (spectrele hidrodinamice ale liniilor de curent vor fi prezentate într-o lucrare ulterioară). Se constată că zona de curgere inversă se extinde cu atît mai mult spre aval cu cît numărul Reynolds este mai mare. Reţeaua de discretizare are paşi

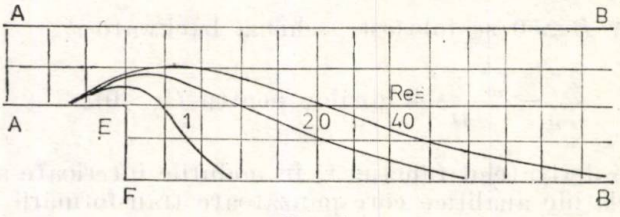


Fig. 4

egali pe ambele direcţii de coordonate ale planului „fictiv" (=0,1). Condiţiile asimptotice la mare distanţă amonte şi aval au fost impuse la $u = -1{,}567$ în amonte, respectiv $u = 6{,}846$ în aval. Mulţimea nodurilor reţelei (caroiaj rectangular în planul „fictiv") are drept corespondent familia de linii de curent şi potenţial a mişcării potenţiale corespunzătoare domeniului analizat. Se constată o viteză de convergenţă net superioară metodelor de rezidual orientat, precum şi o slabă influenţă a pasului de discretizare. Întrucît, pentru numere Reynolds mari zona de curgere inversă are tendinţa de propagare spre aval, este deosebit de important să se impună condiţiile asimptotice la distanţă suficient de mare.

Se poate demonstra că linia de separaţie are tendinţe de apropiere asimptotică de suprafaţa solidă atît în amonte cît şi în aval. Prezentarea rezultatelor obţinute pentru diverse situaţii de curgere (diferite numere Reynolds şi parametrii c_1 de transformare diferiţi) va face obiectul unei lucrări ulterioare.

Primit la redacţie la 10 iunie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Edit. Academiei R.S.România, Bucureşti, 1967.
2. I. SETEANU, M. ERHAN, *Contribuţii noi la studiul mişcării laminare a fluidului vîscos. I. Vîrtejul fizic pe frontierele solide*, St. Cerc. Mec. Apl. **44**, 6, (1985).
3. D. GREENSPAN, *Discrete Numerical Methods in Physics and Engineering*, Academic Press Inc., New-York, 1974.
4. H. KOBER, *Dictionary of Conformal Representations*, Dover Publications Inc., 1957.

EFECTE DE COMPRESIBILITATE PENTRU O CLASĂ DE MIȘCĂRI FLUIDE

de N. MARCOV

Universitatea din București

Se consideră mișcarea unui fluid incompresibil într-un colector plan de suflerie aerodinamică, colector ale cărui dimensiuni depind liniar de lungimea caracteristică λ și a cărui formă depinde de trei parametri adimensionali. În ipoteza că mișcarea fluidă este simetrică în raport cu un plan orizontal, este suficient să se studieze mișcarea din semidomeniul fluid aflat sub acest plan orizontal. Atunci cînd fluidul în mișcare este un fluid compresibil sistemul ecuațiilor de mișcare este neliniar. În acest caz este necesar să se evalueze corecțiile de compresibilitate. Utilizînd și dezvoltînd metoda lui Imai-Lamla-Iacob se obține corecția corespunzătoare a potențialului complex al mișcării. Ordinul de mărime al termenilor adimensionali neprecizați în calcule este egal cu puterea a patra a numărului lui Mach de la intrarea în colector a fluidului compresibil considerat.

Fie ε, n, m și λ constante reale pozitive astfel încît

$$0 < \varepsilon < h < m, \quad k = (m + \varepsilon)/2 \notin \{h, n, \varepsilon m/h, \ \varepsilon m/n\}. \tag{1}$$

Notăm S semicercul având segmentul I ca diametru

$$S = \{w = u - \mathrm{i}v \in \mathbb{C} \mid v = \tilde{v}(u) = \sqrt{(u - \varepsilon)(m - u)}, \\ \forall\, u \in I = [\varepsilon, m]\}. \tag{2}$$

Acest semicerc definește un cerc cu centrul în punctul k, având raza r. Ecuația acestui cerc are formele echivalente următoare:

$$\begin{aligned} &\overline{w} = k + r^2/(w - k), && |w - k| = r, \\ &(\overline{w} - h)(w - k) = (h - k)(a - w), && (a - w)/(a - k) = (\overline{w} - h)(w - k)r^{-2}, \\ &(\overline{w} - n)(w - k) = (n - k)(b - w), && (b - w)/(b - k) = (\overline{w} - n)(w - k)r^{-2}, \end{aligned} \tag{2}$$

unde

$$r = (m - \varepsilon)/2, \quad a = k + r^2/(h - k), \quad b = k + r^2/(n - k). \tag{3}$$

Desigur că a și b nu aparțin segmentului I. În planul variabilei complexe w se consideră semidiscul D,

$$D = \{w = u - \mathrm{i}v \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant v \leqslant \tilde{v}(u), \quad \forall\, u \in I\} \setminus \{h, n\}, \tag{4}$$

a cărui frontieră este reuniunea semicercului S cu diametrul I.

Fie funcțiile $f, g, z, s : D \to \mathbb{C}$ definite prin egalitățile

$$\begin{aligned} f &= h\lambda(A - B + H - N), \\ g &= h\lambda(aA - bB + hH - nN), \\ z &= h\lambda(A/a - B/b + H/h - N/n) - \lambda(h/a - h/b + 1 - h/n)\log(-w), \\ s &= h\lambda(A(a + h) - (b + n)B), \end{aligned} \tag{5}$$

unde

$$A = \log\frac{a-w}{a-k}, \quad B = \log\frac{b-w}{b-k}, \quad H = \log\frac{h-w}{r}, \quad N = \log\frac{n-w}{r}. \tag{6}$$

Prin derivare rezultă identitățile următoare:

$$f'(w)/h\lambda = \frac{1}{w-a} - \frac{1}{w-b} + \frac{1}{w-h} - \frac{1}{w-n} = \frac{(a-b+h-n)(w-\varepsilon)(w-m)}{(w-a)(w-b)(w-h)(w-n)}, \tag{7}$$

$$z'(w) = f'(w)/w, \qquad g'(w) = wf'(w). \tag{8}$$

Deoarece punctele a și b nu aparțin segmentului I, se obține

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B = \operatorname{Im} s(w) = 0, && \forall\, w \in I,\\ &\operatorname{Im} H = \pi(\operatorname{sign}(w-h)+1)/2, && \forall\, w \in I\setminus\{h\},\\ &\operatorname{Im} N = \pi(\operatorname{sign}(w-n)+1)/2, && \forall\, w \in I\setminus\{n\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Date fiind formulele (2′) și (3) rezultă că în punctele semicercului S au loc egalitățile următoare:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} H,\ \operatorname{Re} B = \operatorname{Re} N,\ \operatorname{Re} s(w) = \operatorname{Re} g(w), && \forall\, w \in S,\\ &f(w)/h\lambda = \log(\overline{w}-h)(w-h) - \log(\overline{w}-n)(w-n) \in \mathbb{R}, && \forall\, w \in S. \end{aligned} \tag{10}$$

Funcția f realizează reprezentarea semidiscului D pe submulțimea

$$f(D) = \{f = \varphi_1 + i\,\psi_1 \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \psi_1 \leqslant \pi h\lambda\}.$$

Ținînd seama și de formula (8), se obține interpretarea următoare a funcțiilor f și z:

Funcțiile f și z definite în formulele (5) precizează prin intermediul vitezei complexe w, potențialul complex $f(z)$ din cazul mișcărilor potențiale ale fluidelor incompresibile într-un spațiu $z(D)$ de tipul unui semicolector de suflerie aerodinamică. Dimensiunile semicolectorului depind liniar de parametrul λ, iar forma lui depinde de trei parametri adimensionali n/h, ε/h și m/h în care h, n, ε și m ar reprezenta viteza de intrare, de ieșire, minimă, respectiv viteze maximă admisă pentru particulele fluide în mișcare.

Studiul mișcării unui fluid compresibil isentropic, în planul cartesian al variabilelor reale x și y, presupune determinarea vitezelor U și V, a potențialului real φ, a funcției de curent ψ, a densității ρ și a presiunii p corelate prin ecuațiile

$$U = (\partial\varphi/\partial x) = (\rho_0/\rho)(\partial\psi/\partial y), \quad V = (\partial\varphi/\partial y) = -(\rho_0/\rho)(\partial\psi/\partial x) \tag{11}$$

$$p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma, \quad (\rho/\rho_0)^{\gamma-1} = 1 - (\gamma-1)a_0^{-2}(U^2+V^2)/2, \tag{12}$$

în care ρ_0 este o densitate de referință, a_0 este o viteză de propagare a sunetului, iar γ este o constantă supraunitară, toate specifice fluidului compresibil considerat [1], [2].

Presupunem că acest fluid compresibil se deplasează în semicolectorul $z(D)$. Condițiile la limită pentru funcția de curent ψ vor fi aceleași ca în cazul unui fluid incompresibil cu densitatea ρ_0 și cu potențialul complex de mișcare $f(z)$ specificat parametric în formulele (5).

$$\psi = \operatorname{Im} f, \quad \forall\, z \in z(\partial D). \tag{13}$$

Utilizînd variabilele

$$z = x + \mathrm{i}y, \qquad \bar{z} = x - \mathrm{i}y,$$

ecuațiile (11) pot fi retranscrise în formele echivalente

$$U + \mathrm{i}V = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\mathrm{i}\,\frac{\rho_0}{\rho}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \\ = -2\mathrm{i}\,\frac{\rho_0}{\rho}\,\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}. \tag{14}$$

Notînd cu F potențialul complex al mișcării fluidului compresibil,

$$F = \varphi + \mathrm{i}\psi, \qquad F = \varphi - \mathrm{i}\psi, \tag{15}$$

se obțin expresiile

$$\partial F/\partial \bar{z} = (1 - \rho/\rho_0)\,(U + \mathrm{i}V)/2, \qquad \partial \bar{F}/\partial \bar{z} = (1 + \rho/\rho_0)\,(U + \mathrm{i}V)/2$$

și prin urmare ecuația potențialului complex F,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1 - \rho/\rho_0}{1 + \rho/\rho_0}\,\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}}. \tag{16}$$

Acest potențial F definește viteza complexă W corespunzătoare fluidului compresibil prin

$$W = U - \mathrm{i}V = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mathrm{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial (F + \bar{F})}{\partial z}, \\ \bar{W} = \frac{\partial (F + \bar{F})}{\partial \bar{z}}. \tag{17}$$

Metoda de aproximare a lui Imai-Lamla [1], sugerează înlocuirea ecuației de stare (12) cu ecuația de stare următoare precizată parametric astfel

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha)/(1 + \alpha), \qquad \alpha = a_0^{-2}\,(U^2 + V^2)/4 = a_0^{-2}\,W\,\bar{W}/4, \tag{18}$$
$$p = p_0(1 - 2\,\alpha\gamma) = p_0 - \rho_0(U^2 + V^2)/2.$$

Diferența densităților relative definite de aceste ecuații de stare pentru mișcările subsonice cînd modulul vitezelor particulelor fluide nu depă-

şeşte viteza critică V^*, este de ordinul de mărime al termenului $2\alpha(3 - 2\gamma)\alpha$,

$$\alpha^2 < (V^*/a_0)^2/4 = 1/(2 + 2\gamma) < 1/4.$$

Substituind (18) în (16) se obţine ecuaţia potenţialului F,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4} a_0^{-2} W \overline{W} \frac{\partial \overline{F}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{4} a_0^{-2} \frac{\partial (F + \overline{F})}{\partial z} \frac{\partial (F + \overline{F})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \overline{F}}{\partial \bar{z}}. \tag{19}$$

Soluţia aproximativă a acestei ecuaţii este de forma

$$F = f + \frac{1}{4} a_0^{-2} G + a_0^{-4} h^5 \lambda_1, \tag{20}$$

unde

$$f = f(z), \qquad \partial G(z, \bar{z})/\partial \bar{z} = (\mathrm{d}f/\mathrm{d}z)\,\overline{(\mathrm{d}f/\mathrm{d}z)}^2,$$

iar ultimul factor λ_1 ar avea valori moderate admisibile.
Valorile mari ale vitezei a_0 de propagare a sunetului ar conduce la limită în formula (18) la o densitate ρ constantă. Prin urmare, drept funcţie $f(z)$ se alege potenţialul complex f definit parametric în formulele (5)—(8). Pentru determinarea funcţiei G se obţine astfel ecuaţia

$$\partial G/\partial \bar{z} = w(\overline{w})^2.$$

Exprimînd variabilele z şi $\bar{z}$ cu ajutorul variabilelor w şi $\overline{w}$ conform formulelor (5)—(8), rezultă ecuaţia şi soluţia generală următoare:

$$\partial G/\partial \overline{w} = (\partial G/\partial \bar{z})\,(\mathrm{d}\bar{z}/\mathrm{d}\overline{w}) = w(\overline{w})^2\,\overline{z'(w)} = w\,\overline{wf'(w)}, \tag{21}$$

$$G = w\,\overline{[g(w)} + g(w)] + E(w). \tag{22}$$

Funcţia g este specificată în (5), dar funcţia E trebuie determinată din condiţia la limită (13). Potenţialul F avînd expresiile (15) şi (20) se obţine

$$\mathrm{Im}\, G = 0, \quad \forall z \in z(\partial D), \quad \partial D = S \cup [\varepsilon, h) \cup (h, n) \cup (n, m]. \tag{23}$$

$$\mathrm{Im}\, E(w) = -\,\mathrm{Im}\,\{w[\overline{g(w)} + g(w)]\} = 2v\,\mathrm{Re}\, g(w), \quad \forall w = u - \mathrm{i}v \in \partial D. \tag{24}$$

Soluţia acestei probleme la limită este următoarea:

$$\begin{aligned} E(w) &= (m - w)\,(w - \varepsilon)s(w)/(w - k) = (k + r^2/(w - k) - w)s(w) \\ E(k) &= h\lambda(m - k)\,(k - \varepsilon)\,(n^2 - h^2)\,r^{-2}, \end{aligned} \tag{25}$$

în care funcţia s este specificată în formulele (5). Într-adevăr, ţinînd seama de prima egalitate din (2′), de (9) şi (10), rezultă

$$\mathrm{Im}\; E(w) = \mathrm{Im}(\overline{w} - w)s(w) = \mathrm{Im}\; 2\mathrm{i}vs(w) = 2v\;\mathrm{Re}\; s(w) = 2v\;\mathrm{Re}\; g(w), \quad \forall w \in S;$$

$$\mathrm{Im}E(w) = (m - w)\,(w - \varepsilon)\,(w - k)^{-1}\,\mathrm{Im}\; s(w) = 0 = 2v\;\mathrm{Re}\; g(w), \quad \forall w \in I \setminus \{h, n, k\}.$$

Prin urmare potenţialul complex F al mişcării fluidului compresibil poate fi specificat parametric sub forma următoare :

$$F = f(w) + \frac{1}{4}\, a_0^{-2}\{w[g(w) + \overline{g(w)}] + (m - w)(w - \varepsilon)\, s(w)/(w - k)\} + \\ + a_0^{-4}\, h^5\, \lambda_1, \tag{26}$$

$$z = z(w),$$

în care funcţiile f, g, s şi z sînt specificate în formulele (5), iar ultimul termen ar da erori neglijabile. Expresia vitezei complexe corespunzătoare se obţine din formula (17),

$$W = (\partial(F + \bar{F})/\partial w)\,(\mathrm{d}w/\mathrm{d}z), \tag{27}$$

$$W = w + \frac{1}{4}\, a_0^{-2}\, w\{w(w + \bar{w}) + [g(w) + \overline{g(w)} + \\ + E'(w)]/f'(w)\} + a_0^{-4} h^4 \tau \tag{28}$$

în care derivata f' este specificată în (7), derivata E' rezultă din (25), iar ultimul termen ar da erori admisibile,

$$E'(w) = -2s(w) + (m - w)(w - \varepsilon)\,(s(w)/(w - k))', \\ E'(k) = (m - k)(k - \varepsilon)\; s''(k)/2. \tag{29}$$

Substituind f' şi E' în (28), rezultă

$$W = w + \frac{1}{4}\, a_0^{-2}\, w\{w(w + \bar{w}) + (s(w)\,(w - k)^{-2} + \beta) \times \\ \times (w - \varepsilon)(w - m)/f'(w)\} + a_0^{-4}\, h^4\, \tau, \tag{30}$$

unde

$$\beta = \frac{g(w) + \overline{g(w)} - 2s(w)}{(w - \varepsilon)(w - m)} - \frac{s'(w)}{w - k}, \qquad s'(w) = h\lambda\left(\frac{a + h}{w - a} - \frac{b + n}{w - b}\right), \\ \lim_{w \to \varepsilon} \beta = 2s'(k)/(k - \varepsilon), \qquad \lim_{w \to m} \beta = -2s'(m)/(m - k). \tag{31}$$

În concluzie, formulele (5)—(7), (26) şi (30) permit evaluarea potenţialului complex F şi a vitezei complexe W pentru cazul mişcării în semicolectorul $z(D)$ a fluidului compresibil şi isentropic considerat.

Deoarece $1/f'$ se anulează în h şi n, vitezele particulelor fluidului compresibil la intrarea, respectiv ieşirea semicolectorului considerat au valorile

$$W(h) = h(1 + a_0^{-2}\, h^2/2), \qquad W(n) = n(1 + a_0^{-2}\, n^2/2).$$

În figura 1 se precizează semidiscul D al argumentelor w. Figura 2 ilustrează forma semicolectorului $z(D)$ având coeficientul de contracție de valoare $(1 - h/n)$.

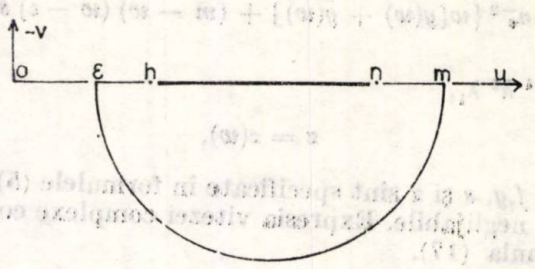


Fig. 1

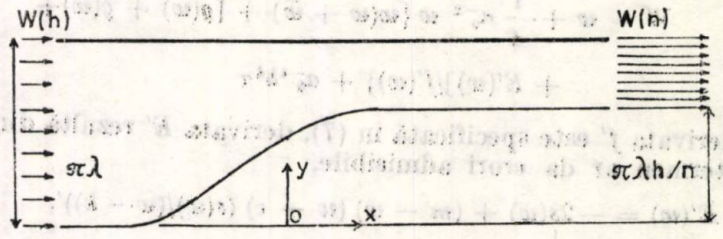


Fig. 2

Metoda lui Imai-Lamla-Iacob este prezentată de către Simona Popp ca o metodă eficientă de cercetare [2]. Specificul aplicării acestei metode în lucrarea prezentă îl constituie utilizarea variabilei complexe w și a reprezentării (22) a soluției ecuației (21). Corelația dintre w și variabila hodografică W este precizată în formula (30).

Primită la redacție la 28 iulie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. C. IACOB, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei Bucarest-Gauthier-Villars, Paris, 1959.
2. S. POPP, *Modele matematice în teoria cavitației*, Edit. Tehnică, București, 1985.

IMPLICAȚII TERMODINAMICE ȘI REVERSIBILITATE TEMPORALĂ ÎN TERMOVÎSCOELASTICITATEA LINIARĂ DE TIP INTEGRAL

de IOANA LUCA

ICECHIM

În prima parte a lucrării sînt stabilite proprietăți ale funcțiilor de răspuns ale materialului cu memorie slăbită de tip McCarthy, în care toate undele termomecanice se propagă cu viteză finită; în a doua parte, sînt liniarizate ecuațiile constitutiv ale materialului amintit și sînt demonstrate anumite proprietăți de simetrie care joacă un rol esențial în studiul propagării undelor termomecanice în tipul de material analizat.

1. INTRODUCERE

Materialele simple cu memorie slăbită introduse de Coleman și Noll în [1] au fost tratate din punct de vedere termodinamic de către Coleman în [2]. În lucrarea [3], Coleman fixează locul vîscoelasticității liniare de tip Boltzmann-Volterra în cadrul termodinamicii materialelor cu memorie slăbită. În [4], urmînd o analiză paralelă cu cea din [3], am stabilit locul termovîscoelasticității liniare în cadrul teoriei abordate în [2], iar în [5] am analizat proprietățile funcțiilor constitutive care apar în [4], din punctul de vedere al lui Day ([6], cap. 6).

Studiul efectuat în cercetarea prezentă are la bază lucrarea lui McCarthy [7], în care printre variabilele constitutive ale funcțiilor ce descriu materialul cu memorie slăbită nu apare gradientul spațial curent al temperaturii, ca în [2], ci istoria sa sumată, ceea ce a condus, prin utilizarea inegalității Clausius-Duhem, la concluzia că energia liberă specifică este funcție potențial nu numai pentru tensiune și entropie specifică, cum se întîmplă în cadrul altor teorii (ipoteze) constitutive (vezi de exemplu [2]), ci și pentru fluxul de căldură. Un rezultat similar fusese obținut anterior de Gurtin și Pipkin în [8], dar pentru conductori de căldură rigizi. Din cîte știm, nici o altă lucrare, în afară de cele două amintite mai înainte, nu conține o astfel de concluzie, care va fi esențială în demonstrarea faptului că fluxul de căldură la echilibru se anulează (§3) și a aceluia că tensorul conductivității termice instantanee este simetric pentru orice istorie totală a particulei materiale, iar pentru istoria diferență nulă este pozitiv semidefinit (§4). Importanța admiterii independenței funcționalelor constitutive de gradientul spațial curent al temperaturii se va vedea mai ales într-o lucrare viitoare, care va aborda fenomenul propagării undelor în materialul precizat de ecuațiile (2.12), analiza efectuată conducînd la viteze de propagare finite (ca în [8]).

Independența amintită permite, totuși, ca legea lui Fourier să fie utilizabilă în unele cazuri particulare. De asemenea, legea conducției de căldură propusă de Cattaneo are loc în cadrul teoriei de tip McCarthy. În §5 vom vedea exact circumstanțele în care cele două legi apar ca forme reduse ale ecuației fluxului de căldură.

Rezultatul principal al lucrării [7], și anume existența funcției potențial energie liberă specifică pentru tensiuni, entropie specifică și flux de căldură, este utilizat în prima parte a lucrării care urmează o analiză

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 6, 1986, P. 549—578

similară cu cea din [2] și [8]. Astfel, după ce în §2 introducem notațiile necesare și amintim prin teorema 2.1 rezultatul obținut de McCarthy ([7]) pentru funcțiile constitutive (2.4), în §3, prin definiția (3.2), avînd în vedere [2] și [8], introducem *continuarea statică izotermă uniformă cu valoarea* δ a unei istorii totale, pentru a arăta apoi că, în timpul continuării statice izoterme uniforme materialul „se relaxează" dacă δ crește nelimitat, adică funcțiile constitutive tind la valorile lor de echilibru. Conceptul introdus în definiția 3.2 și existența fenomenului de „relaxare" „furnizează o proprietate de minim a energiei libere specifice, similară cu cea din [2] și prezentată în teorema 3.1 : dintre toate istoriile care se termină cu valori date ale deformației, temperaturii și gradientului său spațial, istoriei constante cu acele valori date ale deformației și temperaturii, dar cu gradientul spațial nul, îi corespunde cea mai mică valoare a energiei libere specifice. O consecință importantă a acestei teoreme este anularea fluxului de căldură la echilibru. De asemenea, nenegativitatea integralei de disipare pentru orice proces ciclic care pornește din starea de echilibru, proprietate care reflectă convingerea noastră că pentru a deforma un material simplu cu memorie slăbită trebuie depus un lucru mecanic și cheltuită o cantitate de căldură, este tot o consecință a proprietății de minim a energiei libere. În §4 introducem, urmînd lucrarea [8], *tensorul conductivității termice instatanee*, a cărui denumire va fi justificată și a cărui simetrie va fi demonstrată. Într-un caz particular — cel de echilibru — acest tensor va fi și pozitiv semidefinit. În următorul paragraf se deduc ecuațiile care aproximează, în cazul „micilor" deformații și al „micilor" variații de temperatură de la o stare naturală de echilibru comportarea materialului studiat în paragrafele precedente. Spunem că ecuațiile obținute (5.22), care sînt similare cu cele din [4] și [5] și care amintesc de teoria liniară de tip Boltzmann-Volterra definesc un *material termovîscoelastic liniar de tip integral*. Funcțiile constitutive care apar în (5.22) posedă anumite caracteristici, valabile în virtutea proprietății de minim a energiei libere. Astfel, *modulul termoelastic instantaneu* $\mathcal{R}(0)$ și *modulul termoelastic de echilibru* sînt simetrice, diferența $\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(\infty)$ este pozitiv semidefinită, iar $\mathbf{K}(0)$ este simetric și negativ semidefinit. Pe baza inegalității Clausius-Duhem nu am putut arăta că $\mathcal{R}(s)$ și $K(s)$ sînt simetrici pentru orice $s \geqslant 0$, proprietate pe care nici anumite simetrii materiale nu o implică (vezi comentariile din [5], § 5). Așa încît, în § 6, cu presupunerea că *lucrul mecanic-căldura* este invariant la inversarea temporală a oricărui drum închis care pleacă din starea de echilibru, ipoteză logic independentă de inegalitatea amintită, similară cu cea propusă de Day în [6] și de I. Luca și E. Soós în [5], vom deduce simetria *funcției de relaxare a tensiunii generalizate* $\mathcal{R}(s)$ și a celei de *relaxare a căldurii* $\mathbf{K}(s)$, precum și o legătură simplă între celelalte două funcții constitutive din (5.22), acest ultim rezultat reducînd numărul funcțiilor de material (ceea ce ușurează munca experimentatorilor) și reflectînd interdependența între fenomenul termomecanic și cel al conducției de căldură în cadrul unui proces al unui astfel de material.

Simetria lui $\mathbf{K}(s)$ pentru orice $s \geqslant 0$ va implica simetria tensorului conductivității termice de echilibru $\mathbf{K}_\infty$, care apare în legea lui Fourier cînd aceasta are loc în cadrul teoriei abordate, ceea ce oferă o nouă bază (în [9] Day și Gurtin au arătat că un tip de stabilitate termică implică

simetria tensorului conductivității) pentru presupunerea uzuală a adepților relațiilor de reciprocitate de tip Onsager că tensorul conductivității din teoria clasică este simetric (vezi [10], Lecture 7). De altfel, ipoteza de reversibilitate temporală a lucrului mecanic-căldurii, propusă pentru prima dată de Day în [11] (ulterior extinsă de Gurtin în [12] la alte mărimi) și care a condus la proprietățile de simetrie din teorema 6.1, într-un fel reflectă pretenția „termodinamicii ireversibile onsageriste" că relațiile de simetrie de tip Onsager (nedemonstrate în cazul general în care ele se pretind valabile) sînt implicate de „reversibilitatea" temporală existentă la nivel „microscopic".

I. MATERIALE CU MEMORIE SLĂBITĂ ȘI VITEZE DE PROPAGARE FINITE

2. NOTAȚII. REZULTATE PRELIMINARE

În acest paragraf introducem notații și prezentăm rezultate din [7], necesare pe parcursul lucrării.

Fie, deci, $\mathcal{U}$, $\mathcal{W}$ spații finit dimensionale cu produs interior, iar $\mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ mulțimea transformărilor liniare de la $\mathcal{U}$ la $\mathcal{W}$. Transpusul lui $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ este aplicația $\mathbf{A}^T \in \mathrm{Lin}(\mathcal{W}, \mathcal{U})$ cu proprietatea că

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T\mathbf{w}, \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{U},\ \mathbf{w} \in \mathcal{W}.$$

Spunem că $\mathbf{A} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ este simetric dacă $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Produsul interior în $\mathrm{Lin}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ este definit prin

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T).$$

Vom desemna prin $\mathbf{F}$, ρ, θ, η, ε, ψ, $\mathbf{q}$ gradientul deformației, densitatea de masă, temperatura absolută (strict pizitivă), entropia specifică, energia internă specifică, energia liberă specifică și, respectiv, fluxul de căldură la momentul t în particula $\mathbf{X}$.
Vom nota

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}), \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\rho}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T}, \quad T = \theta - \theta_0, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{g} = \mathrm{grad}\,\theta,$$

unde $\mathbf{T}$ este tensorul tensiune al lui Cauchy la momentul t în particula $\mathbf{X}$, θ_0 este temperatura absolută în configurația de referință a corpului, iar grad θ este gradientul temperaturii relativ la vectorul spațial $\mathbf{x}$ care reprezintă locul particulei $\mathbf{X}$ la momentul t.

Prin $\mathcal{A}_7$ și $\mathcal{A}_{10}$ vom înțelege, respectiv, mulțimea perechilor $\boldsymbol{\Omega} = (\mathbf{A}, a)$ și cea a tripletelor $\mathbf{A} = (\mathbf{A}, a, \mathbf{a})$, unde $\mathbf{A}$ aparține mulțimii $\mathcal{S}$ a tensorilor simetrici de ordinul al doilea, a este un număr real, iar $\mathbf{a}$ este un element al spațiului de translație $\mathcal{V}$ al spațiului euclidian tridimensional $\mathcal{E}$. Elemente de tipul menționat sînt, de exemplu, $(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ și $\left(\mathbf{S}, -\eta, \frac{\mathbf{q}}{\rho\theta}\right)$.

Transformăm pe $\mathcal{A}_7$ în spațiu vectorial 7-dimensional cu produs interior introducînd următoarele operații :

$$\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{\Omega}_2 = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,\ a_1 + a_2), \qquad \alpha\boldsymbol{\Omega} = (\alpha\mathbf{A},\ \alpha a),$$

$$\boldsymbol{\Omega}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 + a_1 a_2, \qquad |\boldsymbol{\Omega}| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + a^2)^{1/2},$$

pentru orice $\boldsymbol{\Omega}_1 = (\mathbf{A}_1, a_1)$, $\boldsymbol{\Omega}_2 = (\mathbf{A}_2, a_2)$ din $\mathcal{A}_7$ și pentru orice α real. Analog, $\mathcal{A}_{10}$ devine spațiu vectorial 10-dimensional cu produs interior dacă punem :

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2 = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2,\ a_1 + a_2,\ \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2), \quad \alpha\boldsymbol{\Lambda} = (\alpha\mathbf{A},\ \alpha a,\ \alpha\mathbf{a}),$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_1 \cdot \boldsymbol{\Lambda}_2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 + a_1 \cdot a_2 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2, \quad |\boldsymbol{\Lambda}| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + a^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2},$$

pentru orice $\boldsymbol{\Lambda}_1, \boldsymbol{\Lambda}_2$ din $\mathcal{A}_{10}$ și pentru orice α real.

Ipotezele constitutive din această lucrare necesită următoarele notații :

$$f^t(s) = f(t - s), \quad f^t_d(s) = f^t(s) - f^t(0), \quad \bar{f}^t(s) = \int_0^s f^t(\tau)\, d\tau,$$

$$s \geqslant 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

unde f este o funcție definită pe $(-\infty, \infty)$ cu valori într-un spațiu vectorial finit dimensional. Numim $f^t(\cdot)$ istoria totală, $f^t_d(\cdot)$ istoria diferență, iar $\bar{f}^t(\cdot)$ istoria sumată a lui $f(\cdot)$ pînă la momentul t. Cu $\mathbf{0}^+(\cdot)$ vom nota funcția cu valoarea constantă $\mathbf{0}$,

$$\mathbf{0}^+(s) = \mathbf{0}, \qquad \forall\ s \in [0, \infty),$$

iar $f1^+(\cdot)$ va desemna funcția cu valoarea constantă f :

$$f1^+(s) = f, \qquad \forall\ s \in [0,\ \infty).$$

Exemplu de istorie totală este funcția $\boldsymbol{\Omega}^t(\cdot)$ cu valori în $\mathcal{A}_7$, definită prin

$$\boldsymbol{\Omega}^t(s) = (\mathbf{G}^t(s), \quad \theta^t(s)).$$

Vom numi, simplu, istorie pînă la momentul t, funcția definită pe $[0, \infty)$ cu valori în $\mathcal{A}_{10}$,

$$\boldsymbol{\Lambda}^t(s) = (\mathbf{G}^t(s), \theta^t(s), \quad \bar{\mathbf{g}}^t(s)) = (\boldsymbol{\Omega}^t(s), \ \bar{\mathbf{g}}^t(s)).$$

Evident,

$$\boldsymbol{\Lambda}^t(0) = (\boldsymbol{\Omega}^t(0), \mathbf{0}) = (\boldsymbol{\Omega}(t), \mathbf{0}), \tag{2.2}$$

așa încît, acolo unde intervine, $\boldsymbol{\Lambda}^t(0)$ va fi înlocuit cu $\boldsymbol{\Omega}(t)$ și așa încît istoria diferență $\boldsymbol{\Lambda}^t_d(s) = \boldsymbol{\Lambda}^t(s) - \boldsymbol{\Lambda}^t(0)$ este dată de

$$\boldsymbol{\Lambda}^t_d(s) = (\mathbf{G}^t_d(s), \ \theta^t_d(s), \quad \bar{\mathbf{g}}^t(s)),$$

ceea ce conduce la următoarea interpretare pentru istoria diferență nulă : dacă particula materială a fost ținută la toate timpurile în trecut la valoarea actuală a tensorului deformației $\mathbf{G}$, a temperaturii θ cu gradientul spațial nul, atunci $\boldsymbol{\Lambda}^t_d(\cdot) = \mathbf{0}^+(\cdot)$ și invers.

Pe mulțimea funcțiilor $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$ care aplică pe $[0, \infty)$ în $\mathcal{A}_{10}$ introducem următorul produs scalar, cu ajutorul unei funcții fixate $h(s)$, pozitivă, monoton descrescătoare, continuă, cu $h(0) = 1$ și așa încît $s^2h^2(s)$ să fie integrabilă pe $[0, \infty)$:

$$\langle \mathbf{\Lambda}_1(\cdot), \mathbf{\Lambda}_2(\cdot) \rangle = \int_0^\infty \mathbf{\Lambda}_1(s) \cdot \mathbf{\Lambda}_2(s) h^2(s)\, ds.$$

Norma generată de acest produs scalar este

$$\|\mathbf{\Lambda}(\cdot)\| = \left(\int_0^\infty |\mathbf{\Lambda}(s)|^2 h^2(s)\, ds \right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Spunem că $\mathbf{\Lambda}_1(\cdot)$ și $\mathbf{\Lambda}_2(\cdot)$ sînt echivalente și notăm [1]

$$\mathbf{\Lambda}_1(\cdot) \doteq \mathbf{\Lambda}_2(\cdot),$$

dacă ele diferă pe o mulțime de măsură nulă. Mulțimea claselor de echivalență ale funcțiilor $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$ cu norma (2.3) finită formează un spațiu hilbertian, notat $\mathcal{H}$, fără a mai menționa astfel explicit dependența sa de funcția $h(\cdot)$. Distincția între o clasă de echivalență și un reprezentant al său nu va interveni în considerațiile noastre. Vom nota cu $\mathcal{H}'$ submulțimea lui $\mathcal{H}$ formată din toate funcțiile $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$ cu proprietatea că $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$ poate fi modificată pe o mulțime de măsură nulă, așa încît $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$ să fie diferențiabilă în orice s, $0 \leqslant s < \infty$ și așa încît $\frac{d}{ds}\mathbf{\Lambda}(\cdot) \in \mathcal{H}$ (vezi [3]).

Ecuațiile cosntitutive în particula $\mathbf{X}$ sînt cele considerate în [7], particula nefiind menționată explicit:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}}(\mathbf{G}^t(s), \theta^t(s), \bar{\mathbf{g}}^t(s)), \qquad \eta(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\ell}}(\mathbf{G}^t(s), \theta^t(s), \bar{\mathbf{g}}^t(s)), \\ \mathbf{q}(t) &= \rho\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{j}}(\mathbf{G}^t(s), \theta^t(s), \bar{\mathbf{g}}(s)), \quad \psi(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{G}^t(s), \theta^t(s), \bar{\mathbf{g}}^t(s)). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Notînd

$$\Gamma = \left(\mathbf{S}, -\eta, \frac{\mathbf{q}}{\rho\theta}\right), \qquad \mathcal{G} = (\mathcal{S}, -\ell, j) \tag{2.5}$$

și ținînd seama de $(2.2)_2$, relațiile (2.4) se scriu compact astfel:

$$\Gamma(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{\Lambda}^t(s)), \qquad \psi(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Lambda}^t(s)).$$

Aici, $\mathcal{S}$, j, π, $\mathcal{G}$ sînt funcționale constitutive date ce caracterizează un material simplu. Deoarece cunoașterea lui $\mathbf{\Lambda}^t(s)$ este echivalentă cu cea a lui $\mathbf{\Lambda}_d^t(s)$ și a lui $\mathbf{\Lambda}^t(0) = (\mathbf{\Omega}, \mathbf{0})$, avem

$$\Gamma(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega}), \qquad \psi(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega}). \tag{2.6}$$

[1] Această notație va fi folosită și pentru funcții definite pe $(0, \infty)$ cu valori într-un alt spațiu vectorial.

Evident, ecuațiile constitutive sînt supuse la restricțiile impuse de principiul obiectivității. pe care însă nu le vom investiga aici.

Absența din ecuațiile constitutive postulate a gradientului temperaturii la momentul t este justificată (vezi [7]) prin aceea că perturbațiile într-un punct al materialului descris de (2.6) se propagă cu viteză finită, ceea ce nu este cazul la Coleman și Gurtin în [13], în care ecuațiile constitutive pentru un conductor de căldură rigid depind de istoria gradientului temperaturii și nu de istoria sumată $\bar{\mathbf{g}}^t(s)$. Gurtin și Pipkin au arătat în [8] că, dacă ecuațiile constitutive ale unui material rigid conductor de căldură conțin drept variabile istoriile sumate ale temperaturii și gradientului temperaturii, precum și valoarea curentă a temperaturii, adică tripletul $(\theta, \theta^t(s), \bar{\mathbf{g}}^t(s))$, atunci vitezele de propagare într-un astfel de material sînt finite.

Datorită absenței menționate, teoria bazată pe (2.6) nu conține, ca un caz particular, legea conducției de căldură a lui Fourier, care, cuplată cu ecuațiile Navier-Stokes, conduce la propagarea instantanee a perturbațiilor temperaturii, fenomen cunoscut sub numele de paradoxul conducției de căldură (vezi [14], § 5.2.3.8). Totuși, în § 5 vom arăta în ce condiții fluxul de căldură are expresia din teoria clasică

$$\mathbf{q} = -\varkappa \mathbf{g},$$

cu $\varkappa$ o constantă pozitivă numită conductivitate termică. De asemenea, relația constitutivă pentru fluxul de căldură

$$\dot{\mathbf{q}} + \sigma \mathbf{q} = -\varkappa \sigma \mathbf{g}, \tag{2.7}$$

propusă de Cattaneo pentru a evita paradoxul amintit, este inclusă de teoria expusă în această lucrare pentru funcții constitutive particulare. În § 5 vom justifica și această afirmație.

Pentru ecuațiile (2.6) postulăm principiul memoriei slăbite al lui Coleman, adică presupunem că, pentru fiecare valoare a lui $\boldsymbol{\Omega}$, funcționalele π și $\mathcal{G}$ au un domeniu comun de definiție $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ în vecinătatea istoriei nule $\mathbf{0}^+(\cdot)$, iar pe $\mathcal{D}$ au derivate Fréchet și derivate parțiale continue de ordinul 2 și, respectiv, 1; mai exact, pentru orice $\mathbf{A}_d^t(\cdot)$ și $\boldsymbol{\Omega}$, cu $\mathbf{A}_d^t(\cdot) + \boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ din $\mathcal{D}$ și pentru $\boldsymbol{\Theta}$ într-o anumită vecinătate a lui $\mathbf{0}$ din $\mathcal{A}_7$, au loc relațiile:

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{A}_d^t(s) + \boldsymbol{\Phi}(s); \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Theta}) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{A}_d^t(s); \boldsymbol{\Omega}) + \delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{A}_d^t(s); \boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{\Phi}(s)) +$$

$$+ \partial_{\Omega} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{A}_d^t(s); \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{\Theta} + \frac{1}{2} \delta^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{A}_n^t(s); \boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{\Phi}(s)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \boldsymbol{\Theta} \cdot \partial_{\Omega}^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{A}_d^t(s); \boldsymbol{\Omega}) [\boldsymbol{\Theta}] + o(\|\boldsymbol{\Phi}(\cdot)\|^2 + |\boldsymbol{\Theta}|^2)$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{A}_d^t(s) + \boldsymbol{\Phi}(s); \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Theta}) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{A}_d^t(s); \boldsymbol{\Omega}) + \delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{A}_d^t(s); \boldsymbol{\Omega} | \boldsymbol{\Phi}(s)) +$$

$$+ \partial_{\Omega} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{A}_d^t(s); \boldsymbol{\Omega}) [\boldsymbol{\Theta}] + o(\|\boldsymbol{\Phi}(\cdot)\| + |\boldsymbol{\Theta}|).$$

Aici, $\delta\pi$ și $\delta\mathcal{G}$ sînt liniari în ultima variabilă $\Phi(\cdot)$ și continui în cele trei variabile $\Lambda_d^t(\cdot)$, Ω, $\Phi(\cdot)$, iar $\delta^2\pi$ este biliniar în $\Phi(\cdot)$ și continuu în $\Lambda_d^t(\cdot)$, Ω, $\Phi(\cdot)$; gradienții $\partial_\Omega\pi$, $\partial_\Omega^2\pi$ și $\partial_\Omega\mathcal{G}$ sînt presupuși continui în $\Lambda_d^t(\cdot)$ și Ω. Menționăm că $\partial_\Omega \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega) \in \mathcal{A}_7$, $\partial \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\Lambda_d^t(s); \Omega)$ aparține mulțimii aplicațiilor liniare de la $\mathcal{A}_7$ la $\mathcal{A}_{10}$, notată $\mathrm{Lin}(\mathcal{A}_7, \mathcal{A}_{10})$, iar $\partial_\Omega^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega) \in$ $\in \mathrm{Lin}(\mathcal{A}_7, \mathcal{A}_7)$.

Pentru orice $\Phi \in \mathcal{A}_{10}$, funcția $\Phi\mathbf{1}^+(\cdot)$ este în $\mathcal{H}$, iar pentru Ω și $\Lambda_d^t(\cdot)$ fixați, scalarul $\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} \Delta_d^t(s); \Omega \mid \Phi\mathbf{1}^+(s))$ este o funcție liniară de Φ. Urmează din teorema de reprezentare a lui Riesz, că există o unică funcțională $\nabla\pi$ definită pe $\mathcal{D}$ cu valori în $\mathcal{A}_{10}$, așa încît

$$\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega \mid \Phi\mathbf{1}^+(s)) = \nabla \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega) \cdot \Phi. \tag{2.8}$$

Urmînd lucrare [7], definim un operator liniar $\square$ care aplică funcționale cu valori scalare π în funcționale $\square\ \pi$ cu valori vectori în $\mathcal{A}_{10}$, prin relația :

$$\square\ \pi = (\partial_\Omega \pi, \mathbf{0}) - \nabla\pi.$$

Observăm că

$$\nabla\pi = (\nabla_\Omega\pi, \nabla_{\bar{g}}\pi) = (\nabla_G\pi, \nabla_\theta\pi, \nabla_{\bar{g}}\pi),$$

așa încît, introducînd operatorul lui Coleman $\mathbf{D}$ (vezi [2]), definit prin

$$D\pi = \partial_\Omega\pi - \nabla_\Omega\pi,$$

obținem o altă formă pentru $\square$:

$$\square\pi = (D\pi, -\nabla_{\bar{g}}\pi),$$

Alte posibilități de a exprima operatorii introduși mai înainte, utile în cele ce urmează, sînt :

$$\partial_\Omega \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega) \cdot \Theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega + \nu\Theta)|_{\nu=0},$$

$$\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega \mid \Phi(s)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \overset{\infty}{\underset{s-0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s) + \nu\Phi(s); \Omega)|_{\nu=0},$$

$$\nabla \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega) \cdot \Phi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s) + \nu\Phi\mathbf{1}^+(s); \Omega)|_{\nu=0}.$$

În ultima relație am pus $\Phi = (\Theta, \mathbf{a})$. Analog, se exprimă $\delta\mathcal{G}$, $\partial_\Omega\mathcal{G}$, $\delta^2\pi$ și $\partial_\Omega^2\pi$.

În lucrarea [7], postulînd inegalitatea Clausius-Duhem,

$$\theta\gamma = -\dot{\psi} + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{tr}\,(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\dot{\mathbf{F}}) - \eta\dot{\theta} - \frac{1}{\rho\theta}\,\mathbf{q}\cdot\mathbf{g} \geqslant 0, \tag{2.9}$$

McCarthy a demonstrat

Teorema 2.1. Fie un corp $\mathcal{B}$ caracterizat de ecuațiile constitutive (2.6) în fiecare particulă $\mathbf{X}$, cu $\mathcal{G}$ și π satisfăcînd principiul memoriei slăbite al lui Coleman. Pentru ca inegalitatea Clausius-Duhem să aibă loc pentru orice istorie $\Lambda^t(\cdot)$ din $\mathcal{H}'$, este necesar și suficient ca în fiecare $\mathbf{X}$ din $\mathcal{B}$ să aibă loc *relația tensiunii generalizate*

$$\Gamma(t) = \square \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega) \tag{2.10}$$

și *inegalitatea disipării interne*

$$\sigma = \frac{1}{\theta} \delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} \left(\Lambda_d^t(s); \Omega \middle| \frac{d}{ds} \Lambda^t(s) \right) \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Pe componente (2.10) se scrie :

$$\mathbf{T}(t) = \rho \mathbf{F} D_G \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega) \mathbf{F}^T,$$

$$\eta(t) = - D_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega), \tag{2.12}$$

$$\mathbf{q}(t) = - \rho\theta \nabla_{\bar{g}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega).$$

Deoarece $\mathcal{H}'$ este dens în $\mathcal{H}$ (vezi [3]), urmează că relația (2.10) are loc pentru orice istorie $\Lambda^t(\cdot)$ din $\mathcal{D}$.

Menționăm că, presupunerea ecuațiilor constitutive (2—6) și a inegalității Clausius-Duhem a impus ca energia liberă specifică să fie funcție potențial nu numai pentru tensiune și entropie specifică, ci și pentru fluxul de căldură. Un rezultat asemănător a fost obținut doar în [8] de către Gurtin și Pipkin, în alte lucrări ecuația pentru fluxul de căldură fiind dată independent de cea pentru energia liberă, ea fiind supusă numai cerinței de a verifica o anumită inegalitate reziduală, dacă inegalitatea entropiei (2.9) este postulată.

De asemenea, McCarthy a arătat că, deși în general vectorul conducției de căldură nu apare în inegalitatea disipării interne (2.11), inegalitatea conducției de căldură are loc pentru toate procesele *staționare*, adică pentru care $\mathbf{G}^t(s) = \mathbf{G}_0$, $\theta^t(s) = \theta_0$, $\mathbf{g}^t(s) = \mathbf{g}_0$, oricare ar fi $s \geqslant 0$. Într-adevăr, în cazul acestor procese,

$$\Lambda_d^t(s) = (\mathbf{0}^+(s), 0^+(s), s\mathbf{g}_0), \qquad \Omega = (\mathbf{G}_0, \theta_0)$$

și, ținînd seama de liniaritatea funcționalei $\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^t(s); \Omega | \cdot)$, precum și de expresia $(2.12)_3$ a fluxului de căldură, se obține (vezi [7])

$$\sigma\theta = \delta_{\bar{g}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s), 0^+(s), s\mathbf{g}_0 | \mathbf{g}_0 \mathbf{1}^+(s)) =$$

$$= \nabla_{\bar{g}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s), 0^+(s), s\mathbf{g}_0) \cdot \mathbf{g}_0 = - \frac{\mathbf{q}_0 \cdot \mathbf{g}_0}{\rho\theta_0} \geqslant 0.$$

3. CONTINUAREA STATICĂ IZOTERMĂ UNIFORMĂ. INTEGRALA DE DISIPARE

În acest paragraf și cel următor vom cerceta consecințele ce decurg din rezultatele (2.10), (2.11) obținute în [7], urmînd căile abordate de Coleman în [2], [3] și de Gurtin și Pipkin în [8]. Astfel, introducem următoarele definiții (vezi [2]):

Definiția 3.1. Presupunînd că pentru materialul (2.6) istoria $\Lambda^t(\cdot)$ a fost ținută la valoarea constantă $\Lambda^t(s) = (\mathbf{\Omega}, \mathbf{0})$ pentru orice $s \geqslant 0$, numim *valorile de echilibru* ale lui ψ, η, $\mathbf{T}$, $\mathbf{q}$ și le notăm $\psi^{(\infty)}$, $\eta^{(\infty)}$, $\mathbf{T}^{(\infty)}$, respectiv $\mathbf{q}^{(\infty)}$ valorile funcționalelor de răspuns ale materialului pentru istoria constantă; adică,

$$\psi^{(\infty)} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{0}^+(s); \mathbf{\Omega}) = \psi^{(\infty)}(\mathbf{G}, \theta), \quad \eta^{(\infty)} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{L}}}(\mathbf{0}^+(s); \mathbf{\Omega}) = \eta^{(\infty)}(\mathbf{G}, \theta),$$
$$\mathbf{T}^{(\infty)} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}(\mathbf{0}^+(s); \mathbf{\Omega}) = \mathbf{T}^{(\infty)}(\mathbf{G}, \theta), \quad \mathbf{q}^{(\infty)} = \rho\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{J}}}(\mathbf{0}^+(s); \mathbf{\Omega}) = \mathbf{q}^{(\infty)}(\mathbf{G}, \theta). \tag{3.1}$$

Definiția 3.2. Fie istoriile totale $\mathbf{\Omega}^t(\cdot)$ și $\mathbf{g}^t(\cdot)$, așa încît $\mathbf{g}^t(0) = \mathbf{0}$, corespunzătoare istoriei $\Lambda^t(\cdot)$. Pentru $\delta > 0$ definim istoria $\Lambda^{t+\delta}(\cdot)$, numită *continuarea statică izotermă uniformă a istoriei* $\Lambda^t(\cdot)$ *cu valoarea* δ, astfel,

$$\Lambda^{t+\delta}(s) = \begin{cases} (\mathbf{\Omega}, \mathbf{0}), & 0 \leqslant s \leqslant \delta, \\ \Lambda^t(s - \delta), & \delta < s < \infty. \end{cases}$$

Din definiția de mai înainte, care este o generalizare imediată a definiției lui Coleman ([2]) și a aceleia a lui Gurtin și Pipkin ([8]), rezultă

$$\mathbf{\Omega}(\tau) = \mathbf{0}, \quad \text{pentru} \quad t < \tau \leqslant t + \delta \tag{3.2}$$

și

$$\Lambda_d^{t+\delta}(s) = \begin{cases} \mathbf{0}, & 0 \leqslant s \leqslant \delta, \\ \Lambda_d^t(s - \delta), & \delta < s < \infty, \end{cases}$$

unde punctul suprapus desemnează derivata în raport cu τ.

Vom nota cu $\psi^{(\delta)}$, $\eta^{(\delta)}$, $\mathbf{T}^{(\delta)}$, $\mathbf{q}^{(\delta)}$ valorile lui ψ, η, $\mathbf{T}$ și $\mathbf{q}$ pentru continuarea statică izotermă uniformă $\Lambda^{t+\delta}(\cdot)$, adică

$$\psi^{(\delta)} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\Lambda_d^{t+\delta}(s); \mathbf{\Omega}), \quad \eta^{(\delta)} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{L}}}(\Lambda_d^{t+\delta}(s); \mathbf{\Omega}),$$
$$\mathbf{T}^{(\delta)} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}(\Lambda_d^{t+\delta}(s); \mathbf{\Omega}), \quad \mathbf{q}^{(\delta)} = \rho\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{J}}}(\Lambda_d^{s+\delta}(s); \mathbf{\Omega}).$$

Observația 3.1. Urmînd demonstrația observației 8 din lucrarea lui Coleman [2], se poate arăta că, dacă $\Lambda_d^t(\cdot)$ se află într-o vecinătate $\mathfrak{D}$ a lui $\mathbf{0}^+(\cdot)$ din $\mathcal{H}$, atunci:

(i) $\Lambda_d^{t+\delta}(\cdot) \in \mathfrak{D}$;

(ii) $\lim_{\delta \to \infty} \| \Lambda_d^{t+\delta}(\cdot) - \mathbf{0}^+(\cdot) \| = 0.$

Observația 3.2. Din observația precedentă și din continuitatea în $\mathbf{A}^t_d(\cdot)$ a funcționalelor π, t, $\mathcal{T}$ și $\jmath$ urmează că

$$\lim_{\delta\to\infty}\psi^{(\delta)}=\psi^{(\infty)},\quad \lim_{\delta\to\infty}\eta^{(\delta)}=\eta^{(\infty)},$$
$$\lim_{\delta\to\infty}\mathbf{T}^{(\delta)}=\mathbf{T}^{(\infty)},\quad \lim_{\delta\to\infty}\mathbf{q}^{(\delta)}=\mathbf{q}^{(\infty)}. \tag{3.3}$$

Deci, în timpul continuării statice izoterme uniforme cu valoarea δ, cînd δ crește nelimitat valorile lui ψ, η, $\mathbf{T}$ și $\mathbf{q}$ tind la valorile lor de echilibru, adică materialul „se relaxează". Rezultatele $(3.3)_{1,2,3}$ au fost obținute și în cadrul teoriei lui Coleman din [2].

Observația 3.3. Fie $\mathbf{\Lambda}^{t}{}_{+}{}^{\delta}(\cdot)$ o continuare statică izotermă uniformă a istoriei $\mathbf{\Lambda}^{\tau}(\cdot)$ din $\mathcal{H}'$ și fie $\psi(\tau)$ energia liberă la momentul τ a unui punct material cu istoria $\mathbf{\Lambda}^{t+\delta}(\cdot)$. Atunci, deoarece $\mathbf{\Lambda}^{t+\delta}(\cdot)\in\mathcal{H}'$, avem (vezi [7])

$$\dot\psi(\tau)=-\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}\left(\mathbf{\Lambda}^{\tau}_d(s);\,\mathbf{\Omega}\,\middle|\,\frac{d}{ds}\,\mathbf{\Lambda}^{\tau}(s)\right)+D_{\mathbf{\Omega}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Lambda}^{t}_d(s);\,\mathbf{\Omega})\cdot\mathbf{\Omega}(\tau)+$$
$$+\nabla_{\mathbf{g}}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Lambda}^{t}_d(s);\,\mathbf{\Omega})\cdot\mathbf{g}(\tau) \tag{3.4}$$

și, conform cu (3.2) și (2.11),

$$\dot\psi(\tau)=-\theta\sigma\leqslant 0,\quad\text{cînd}\quad t<\tau\leqslant t+\delta.$$

Deci, în timpul continuării statice izoterme uniforme din $\mathcal{H}'$, energia liberă nu poate să crească. Rezultă

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Lambda}^{t+\delta}_d(s);\,\mathbf{\Omega})\leqslant\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Lambda}^{t}_d(s);\,\mathbf{\Omega}),$$

pentru orice valoare a lui $\mathbf{\Omega}$. Dacă trecem la limită cu $\delta\to\infty$, ținînd seama de $(3.3)_1$, obținem

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{0}^{+}(s);\,\mathbf{\Omega})\leqslant\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Lambda}^{t}_d(s);\,\mathbf{\Omega}), \tag{3.5}$$

pentru orice istorie $\mathbf{\Lambda}^{t}(\cdot)$ din $\mathcal{H}'\cap\mathcal{D}$, așa încît $\mathbf{g}^{t}(0)=\mathbf{0}$.

Menționăm că în definiția 3.2 am cerut $g^{t}(0)=0$ deoarece pe „partea statică" $(t<\tau\leqslant t+\delta)$ a continuării izoterme uniforme temperatura $\theta(X,\tau)$ cu valoarea constantă $\theta(X,t)$ are gradientul spațial nul și, deoarece $\mathbf{F}(\tau)=\mathbf{F}(t)$, urmează grad $\theta(t)=g^{t}(0)=0$. Rezultatul (3.5) însă, datorită independenței funcționalei constitutive π de gradientul curent $g^{t}(0)$, are loc pentru orice istorie $\mathbf{\Lambda}^{t}(\cdot)$ din $\mathcal{H}'\cap\mathcal{D}$. Mai mult, deoarece $\mathcal{H}'$ este dens în $\mathcal{H}$, rezultă că inegalitatea (3.5) este satisfăcută de orice istorie $\mathbf{\Lambda}^{t}(\cdot)$ din $\mathcal{D}$. Astfel am obținut

Teorema 3.1. Dintre toate istoriile $\mathbf{\Lambda}^{t}(\cdot)$ din $\mathcal{D}$, cu $\mathbf{\Lambda}^{t}(0)=(\mathbf{\Omega},0)$, istoriei constante $(\mathbf{\Omega}\,1^{+}(\cdot),\mathbf{0}^{+}(\cdot))$ îi corespunde cea mai mică valoare a energiei libere în particula $\mathbf{X}$:

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Lambda}^{t}_d(s);\;\mathbf{\Omega})\geqslant\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{0}^{+}(s);\,\mathbf{\Omega}).$$

Proprietatea de minim din teorema precedentă furnizează următorul *Corolar 3.1.* Pentru orice $\Phi(\cdot)$ din $\mathcal{D}$ și pentru orice Ω din $\mathcal{A}_7$ au loc relațiile:

$$\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s);\ \Omega \mid \Phi(s) = 0,\quad \delta^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s);\ \Omega \mid \Phi(s), \Phi(s)) \geqslant 0$$

sau, echivalent,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\nu\Phi(s);\ \Omega)\Big|_{\nu=0} = 0,\quad \frac{d^2}{\mathrm{d}\nu^2} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\nu\Phi(s);\ \Omega)\Big|_{\nu=0} \geqslant 0. \tag{3.6}$$

În particular, pentru $\Phi(s) = \Phi\mathbf{1}^+(s)$, din (2.8) obținem

$$\nabla \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s);\ \Omega) = \mathbf{0},\ \Phi \cdot \nabla\nabla \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s);\ \Omega)[\Phi] \geqslant 0. \tag{3.7}$$

Relația $(3.7)_1$ conduce, ținînd seama de (2.12), (3.1) și de următoarele expresii pentru operatorii $D_{\mathbf{G}}\pi$, $D_\theta\pi$,

$$D_{\mathbf{G}}\pi = \partial_{\mathbf{G}}\pi - \nabla_{\mathbf{G}}\pi,\ D_\theta\pi = \partial_\theta\pi - \nabla_\theta\pi,$$

la relațiile din termostatica clasică dintre tensiune, entropie și energie liberă specifică, precum și la anularea valorii de echilibru a fluxului de căldură:

$$\mathbf{T}^{(\infty)} = {}_{\mathbf{F}}\psi^{(\infty)}_{\mathbf{G}}(\mathbf{G}, \theta)\mathbf{F}^T,\ \eta^{(\infty)} = -\psi^{(\infty)}_\theta(\mathbf{G}, \theta),\ \mathbf{q}^{(\infty)} = 0, \tag{3.8}$$

unde $\psi^{(\infty)}_{\mathbf{G}}$ este gradientul obișnuit al lui $\psi^{(\infty)}$ în raport cu $\mathbf{G}$, iar $\psi^{(\infty)}_\theta$ derivata obișnuită a lui $\psi^{(\infty)}$ în raport cu θ. Relații de tipul $(3.8)_{1,2}$, dar pentru θ nu neapărat uniform, au fost obținute în cadrul termodinamicii materialelor cu memorie slăbită de tip Coleman în [2], iar Gurtin și Pipkin ([8]) au arătat că, în cazul unui conductor de căldură rigid cu variabilele constitutive θ, $\theta^t(s)$, $\mathbf{g}^t(s)$, fluxul de căldură pentru corpul ținut la toate timpurile la temperatura uniformă θ_0 se anulează. Deci relațiile (3.8) sînt în acord cu [2] și [8].

În continuare vom demonstra o inegalitate pe care, urmîndu-l pe Coleman [2], o vom numi inegalitatea de disipare integrată. Pentru aceasta, fie $(\mathbf{G}(t), \theta(t), \mathbf{g}(t)) = (\Omega(t), \mathbf{g}(t))$ valorile la momentul curent $t \in (-\infty, \infty)$ ale tripletului $(\mathbf{G}, \theta, \mathbf{g})$ și fie $\Gamma(t) = (\Pi(t), \mathbf{j}(t))$ răspunsul materialului la momentul t, unde

$$\Pi(t) = (\mathbf{S}(t), -\eta(t)),\ \mathbf{j}(t) = \frac{\mathbf{q}(t)}{\rho(t)\,\theta(t)}. \tag{3.9}$$

Pentru două momente arbitrare $t_0 < t_1$ definim *integrala de disipare* prin relația

$$\mathcal{I}(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} (\Pi(t) \cdot \dot{\Omega}(t) - \mathbf{j}(t) \cdot \mathbf{g}(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{G}} - \eta\dot{\theta} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{\rho\,\theta} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{\rho}\,\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} - \eta\dot{\theta} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{\rho\,\theta} \right) \mathrm{d}t, \tag{3.10}$$

unde $\mathbf{L} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}$ este gradientul spațial al vitezei.

Cu notațiile (3.9) și relațiile (2.10), (2.11), expresia (3.4) pentru $\dot{\psi}(t)$ devine

$$\dot{\psi} = \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{g} - \theta\sigma. \tag{3.11}$$

Integrînd (3.11), cu relația de definiție (3.10) găsim :

$$\psi(t_1) - \psi(t_0) = \mathscr{I}(t_1, t_0) - \int_{t_0}^{t_1} \theta\sigma \, dt$$

și, deoarece dispunem de (2.11), obținem

$$\mathscr{I}(t_1, t_0) \geqslant \psi(t_1) - \psi(t_0), \tag{3.12}$$

relație pe care o numim *inegalitatea de disipare integrală* și care exprimă faptul că integrala disipării nu poate fi mai mică decît creșterea energiei libere. Menționăm că rezultatul (3.12) se mai poate obține integrînd direct inegalitatea (2.9) între momentele $t_0 < t_1$, ceea ce arată că el nu depinde de alegerea variabilelor constitutive în funcționalele de răspuns ale materialului. Am preferat însă să dăm o demonstrație analoagă celei din [2] pentru a justifica denumirea de inegalitate de disipare integrată.

Următoarea observație, similară celei din [2], § 9, afirmă că, dacă un punct material a fost ținut pînă la momentul t_0 la valorile constante $(\mathbf{G}_0, \theta_0, \mathbf{0})$, iar după un drum neted $(\mathbf{G}(t), \theta(t), \mathbf{g}(t))$ este caracterizat la momentul t_1 de $(\mathbf{G}_0, \theta_0, \mathbf{g})$, atunci integrala de disipare $\mathscr{I}(t_1, t_0)$ nu poate fi negativă,

Mai exact :

Observația 3.4. Fie $\mathbf{\Omega}(t)$ și $\mathbf{g}(t)$ pentru o particulă $\mathbf{X}$ dați d e

$$\mathbf{\Omega}(t) = \begin{cases} \bar{\mathbf{\Omega}}, & t \leqslant t_0, \\ \text{arbitrar, neted} & \\ \bar{\mathbf{\Omega}}, & t = t_1 \end{cases} \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{cases} \mathbf{0}, & t \leqslant t_0 \\ \text{continuu} & \end{cases}$$

Atunci

$$\mathscr{I}(t_1, t_0) \geqslant 0. \tag{3.13}$$

Într-adevăr, deoarece $\Lambda_d^{t_0}(s) = \mathbf{0}^+(s)$, avem

$$\psi(t_0) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s); \bar{\mathbf{\Omega}}), \quad \psi(t_1) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\Lambda_d^{t_1}(s); \bar{\mathbf{\Omega}}),$$

iar din (3.5) rezultă

$$\psi(t_0) \leqslant \psi(t_1),$$

ceea ce, împreună cu (3.12), conduce la (3.13).

Observăm că, dacă $\mathbf{g}(t) = 0$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, atunci

$$\mathscr{I}(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} - \eta\dot{\theta} \right) dt,$$

adică tocmai expresia integralei de disipare introdusă de Coleman în [2]. Dacă, în plus, presupunem că $\dot{\theta}(t) = 0$ pentru $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, atunci obținem următoarea teoremă, ca un caz particular al teoremei 4 din [2]:

Teorema 3.2. Într-un proces izoterm *uniform* care pornește dintr-o stare de echilibru, integrala puterii tensiunii de-a lungul oricărui drum închis este nenegativă:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \mathbf{L}\, dt \geqslant 0.$$

4. TENSORUL CONDUCTIVITĂȚII TERMICE INSTANTANEE. CĂLDURA SPECIFICĂ INSTANTANEE

Prin analogie cu [8], ipotezele de netezime despre funcționala π și relația $(2.12)_3$ permit să introducem următoarea mărime tensorială:

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega}) = -\nabla_{\mathbf{g}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega}), \tag{4.1}$$

unde

$$\mathbf{q}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega}) = \rho\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{J}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega}).$$

Acest tensor caracterizează saltul vitezei fluxului de căldură datorat schimbării bruște a gradientului temperaturii, motiv pentru care îl numim *tensorul conductivității termice instantanee.* Mai exact, fie un proces $(\mathbf{G}(\tau), \theta(\tau), \mathbf{g}(\tau))$, $-\infty < \tau < \infty$, în care $\mathbf{G}(\cdot)$ și $\theta(\cdot)$ sînt funcții netede în timp, iar $\mathbf{g}(\cdot)$ este discontinuu, cu salt finit, la un moment t. Calculul lui $\dot{\mathbf{q}}(\tau)$ pentru procesul considerat și pentru $\tau \neq t$ conduce la

$$\dot{\mathbf{q}}(\tau) = D_{\mathbf{\Omega}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}(\mathbf{\Lambda}_d^\tau(s); \mathbf{\Omega})[\dot{\mathbf{\Omega}}(\tau)] - \delta_{\mathbf{\Omega}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}\left(\mathbf{\Lambda}_d^\tau(s); \mathbf{\Omega} \,\middle|\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathbf{\Omega}^\tau(s)\right) -$$

$$- \delta_{\mathbf{g}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}(\mathbf{\Lambda}_d^\tau(s); \mathbf{\Omega} \,|\, \mathbf{g}^\tau(s)) + \nabla_{\mathbf{g}} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}(\mathbf{\Lambda}_d^\tau(s); \mathbf{\Omega})\mathbf{g}(\tau).$$

Scriind această relație la momentele t^+ și t^-, scăzînd rezultatele obținute și ținînd seama de continuitatea funcționalelor constitutive precum și de faptul că

$$\mathbf{\Lambda}_d^{t^+}(s) = \mathbf{\Lambda}_d^{t^-}(s) = \mathbf{\Lambda}_d^t(s), \quad \mathbf{g}^{t^+}(s) = \mathbf{g}^t(s), \quad \mathbf{\Omega}^{t^+}(s) = \mathbf{\Omega}^{t^-}(s) = \mathbf{\Omega}^t(s), \quad s \geqslant 0,$$

obținem

$$\dot{\mathbf{q}}(t^+) - \dot{\mathbf{q}}(t^-) = -\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega})[\mathbf{g}(t^+) - \mathbf{g}(t^-)],$$

adică o schimbare bruscă a gradientului temperaturii este însoțită de o schimbare a derivatei temporale a fluxului de căldură, relația între cele

două salturi fiind liniară și caracterizată de tensorul conductivității termice instantanee.

Următoarea teoremă precizează proprietăți ale tensorului $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \mathbf{\Omega})$ deduse din expresia constitutivă a fluxului de căldură impusă de inegalitatea Clausius-Duhem.

Teorema 4.1. Tensorul conductivității termice instantanee este simetric, adică

$$\mathbf{u}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \mathbf{\Omega})\,\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \mathbf{\Omega})\mathbf{u}, \tag{4.2}$$

pentru orice $\mathbf{\Lambda}^t(\cdot)\in\mathfrak{D}$ și orice $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathscr{V}$. Mai mult, $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{0}^+(s);\ \mathbf{\Omega})$ este pozitiv semidefinit, adică

$$\mathbf{u}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{0}^+(s);\ \mathbf{\Omega})\,\mathbf{u}\geqslant 0,\quad\forall\,\mathbf{u}\in\mathscr{V}\ \text{și}\ \forall\,\mathbf{\Omega}\in\mathscr{A}_7.$$

Demonstrație. Folosind (4.1), $(2.12)_3$ și netezimea lui π, avem:

$$\mathbf{u}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \mathbf{\Omega})\,\mathbf{v}=-\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{g}}^{-}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \mathbf{\Omega})\,\mathbf{v}=$$

$$=-\mathbf{u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{Q}}}(\mathbf{\Omega}_d^t(s),\ \overline{\mathbf{g}}^t(s)+\nu\mathbf{v}\mathbf{1}^+(s);\ \mathbf{\Omega})\Big|_{\nu=0}=$$

$$=\rho\theta\mathbf{u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\nabla_{\mathbf{g}}^{-}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Omega}_d^t(s),\ \overline{\mathbf{g}}^t(s)+\nu\mathbf{v}\mathbf{1}^+(s);\ \mathbf{\Omega})\Big|_{\nu=0} \tag{4.3}$$

$$=\rho\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Omega}_d^t(s),\ \overline{\mathbf{g}}^t(s)+\nu\mathbf{v}\mathbf{1}^+(s)+\alpha\,\mathbf{u}\mathbf{1}^+(s);\ \mathbf{\Omega})\Big|_{\alpha=0}\right\}_{\nu=0}=$$

$$=\rho\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Omega}_d^t(s),\ \overline{\mathbf{g}}^t(s)+\nu\mathbf{v}\mathbf{1}^+(s)+\alpha\mathbf{u}\mathbf{1}^+(s);\ \mathbf{\Omega})\Big|_{\nu=0}\right\}_{\alpha=0}=$$

$$=\mathbf{v}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \mathbf{\Omega})\mathbf{u},$$

adică (4.2). Dacă $\mathbf{\Lambda}_d^t(s)=\mathbf{0}^+(s)$, adică $\mathbf{\Omega}_d^t(s)=\mathbf{0}^+(s)$ și $\overline{\mathbf{g}}^t(s)=\mathbf{0}^+(s)$, atunci, din $(4.3)_4$ cu $\mathbf{v}=\mathbf{u}$, avem:

$$\mathbf{u}\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{0}^+(s);\ \mathbf{\Omega})\,\mathbf{u}=\rho\theta\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\nu^2}\overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{0}^+(s),\ \nu\mathbf{u}\mathbf{1}^+(s);\ \mathbf{\Omega})\geqslant 0, \tag{4.4}$$

inegalitatea din (4.4) rezultînd din $(3.6)_2$; deci $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{0}^+(s);\ \mathbf{\Omega})$ este pozitiv semidefinit.

Simetria afirmată în teoremă a fost demonstrată în [8] de Gurtin și Pipkin pentru un conductor de căldură rigid[1] și este, împreună cu pozitiv semidefinirea lui $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathfrak{K}}}(\mathbf{0}^+(s);\ \Omega)$, o consecință a inegalității Clausius-Duhem. Proprietatea de pozitiv semidefinire a tensorului conductivității termice instantanee pentru orice istorie $\mathbf{\Lambda}^t(\cdot) \in \mathfrak{D}$ necesită, credem, restricții în plus față de inegalitatea amintită mai înainte. Problema rămîne astfel deschisă în fața cercetării.

Introducem acum, urmînd lucrarea [8], căldura specifică instantanee, mărime ce caracterizează variația energiei interne datorate unei schimbări instantanee infinitezimale a temperaturii. Deoarece

$$\varepsilon = \psi + \theta\eta, \tag{4.5}$$

rezultă că energia internă este dată de o funcțională ce depinde de variabilele constitutive care apar în (2.4):

$$\varepsilon(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{e}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \Omega).$$

Definim *căldura specifică instantanee* prin relația

$$c(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{c}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \Omega) = D_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{e}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \Omega). \tag{4.6}$$

Din (4.5), (4.6) și $(2.12)_2$ rezultă că

$$c(t) = \theta D_\theta \overset{\infty}{\underset{s=0}{l}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \Omega) = -\theta D_\theta^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\ \Omega).$$

II. MATERIALE TERMOVÎSCOELASTICE LINIARE DE TIP INTEGRAL CU VITEZE DE PROPAGARE FINITE

5. TERMOVÎSCOELASTICITATE LINIARĂ DE TIP INTEGRAL

Presupunînd că drept configurație de referință pentru corpul $\mathcal{B}$ a fost aleasă una în care particula $\mathbf{X}$ s-a aflat la toate timpurile în trecut cu temperatura uniformă θ_0, „dezvoltînd" funcționala $\mathcal{G}$ în jurul istoriei nule, vom liniariza ecuațiile constitutive (2.12), rezultatul obținut fiind similar cu cel din [4].

Pentru simplificarea calculelor este util ca perechea $(\mathbf{G}, \theta)$ să fie înlocuită cu $(\mathbf{G}, T)$, unde $T = \theta - \theta_0$, ceea ce nu modifică rezultatele obținute pînă acum. Așadar, în continuare Ω va desemna perechea $(\mathbf{G}, T)$, iar

$$\mathbf{\Lambda}_d^t(s) = (\mathbf{G}_d^t(s),\ T_d^t(s),\ \overline{\mathbf{g}}^t(s)).$$

[1] Din cîte știm, tensorul conductivității termice instantanee a fost introdus pentru prima dată în [8], aceasta fiind singura lucrare care face referiri la el.

Notăm

$$\Gamma_0 = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}),$$

și, ținînd seama de $(2.5)_1$ și $(3.8)_3$, avem

$$\Gamma_0 = (\mathbf{S}_0, -\gamma_{l0}, \mathbf{0}),$$

unde $\mathbf{S}_0$ și γ_{l0} reprezintă valorile funcționalelor de răspuns $\$$ și l ale particulei $\mathbf{X}$ în configurația de referință. Din principiul memoriei slăbite, pentru $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\mathbf{\Omega})$ avem următoarea „dezvoltare" în jurul istoriei nule:

$$\Gamma(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\mathbf{\Omega}) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}) + \delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}|\mathbf{\Lambda}_d^t(s)) +$$

$$+ \partial_\Omega \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0})[\mathbf{\Omega}] + o(\|\mathbf{\Lambda}_d^t(\cdot)\| + |\mathbf{\Omega}|) = \Gamma_0 + \delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}|\mathbf{\Lambda}_d^t(s) +$$

$$+ \partial_\Omega \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0})[\mathbf{\Omega}] + o(\|\mathbf{\Lambda}_d^t(\cdot)\| + |\mathbf{\Omega}|) = \square\overset{\infty}{\underset{s=0}{\Pi}}(\mathbf{\Lambda}_d^t(s);\Omega). \quad (5.1)$$

Aici $\partial_\Omega \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}) \in \mathrm{Lin}(\mathcal{A}_7, \mathcal{A}_{10})$, iar $\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}|\cdot)$ este o funcțională liniară și continuă pe spațiul hilbertian $\mathcal{H}$, ceea ce conduce la următoarea reprezentare integrală:

$$\rho_0\,\delta\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}}(\mathbf{0}^+(s);\mathbf{0}|\mathbf{\Lambda}_d^t(s)) = \int_0^\infty \mathfrak{L}(s)[\mathbf{\Lambda}_d^t(s)]\,ds,$$

unde

$$\mathfrak{L}(s) \in \mathrm{Lin}(\mathcal{A}_{10}, \mathcal{A}_{10}), \int_0^\infty h^{-2}(s)\,|\mathfrak{L}(s)|^2\,ds < \infty, \quad (5.2)$$

cu $|\mathfrak{L}(s)| = \max|\mathfrak{L}(s)[\mathbf{\Phi}]|$. Introducem *funcția de relaxare* $\bar{\mathcal{K}}(s)$ prin relația $\|\mathbf{\Phi}\| \leqslant 1$

$$\bar{\mathcal{K}}(s) = -\int_s^\infty \mathfrak{L}(\tau)\,d\tau,$$

de unde rezultă

$$\bar{\mathcal{K}}'(s) = \mathfrak{L}(s), \quad \lim_{s\to\infty}\bar{\mathcal{K}}(s) = \mathbf{0} \equiv \bar{\mathcal{K}}(\infty) \quad (5.3)$$

şi

$$\rho_0 \delta \overset{0}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{0}^+(s); \mathbf{0} \mid \mathbf{\Lambda}_d^t(s)) = \overline{\mathcal{K}}(0)[(\mathbf{\Omega}, \mathbf{0})] + \int_0^\infty \overline{\mathcal{K}}'(s)[\mathbf{\Lambda}^t(s)]\, ds,$$

unde „'" desemnează derivata în raport cu s. Avem, deci :

$$\rho_0 \mathbf{\Gamma}(t) = \rho_0 \mathbf{\Gamma}_0 + \mathcal{C}[\mathbf{\Omega}] + \overline{\mathcal{K}}(0)[(\mathbf{\Omega}, \mathbf{0})] + \int_0^\infty \overline{\mathcal{K}}'(s)[\mathbf{\Lambda}^t(s)]\, ds + \\ + o(\|\mathbf{\Lambda}_d^t(\cdot)\| + |\mathbf{\Omega}|), \tag{5.4}$$

unde am notat

$$\mathcal{C} \equiv \rho_0 \partial_\Omega \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{0}^+(s); \mathbf{0}). \tag{5.4}_1$$

Despre operatorii $\mathcal{C}$ şi $\overline{\mathcal{K}}(0)$ vom demonstra cîteva proprietăţi, similare cu cele din [4]. Pentru aceasta avem nevoie de următoarea evaluare, în care $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Theta}, a) \in \mathcal{A}_{10}$:

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Lambda} \cdot \square \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega}) = \\ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} \left(\mathbf{\Lambda}_d^t(s); \mathbf{\Omega} + \nu\mathbf{\Theta}\right)|_{\nu=0} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{\Lambda}_d^t(s) + \nu \mathbf{\Lambda}\, 1^+(s); \mathbf{\Omega})|_{\nu=0}. \tag{5.5}$$

Vom arăta acum că $\mathcal{C} \in \mathrm{Lin}\,(\mathcal{A}_7, \mathcal{A}_{10})$ satisface relaţia

$$(\mathbf{\Theta}, \mathbf{0}) \cdot \mathcal{C}[\mathbf{\Omega}] = (\mathbf{\Omega}, \mathbf{0}) \cdot \mathcal{C}[\mathbf{\Theta}], \quad \forall \mathbf{\Theta}, \mathbf{\Omega} \in \mathcal{A}_7.$$

Demonstraţie. Cu definiţia $(5.4)_1$ a lui $\mathcal{C}$ şi (5.5) avem :

$$(\mathbf{\Theta}, \mathbf{0}) \cdot \mathcal{C}[\mathbf{\Omega}] = (\mathbf{\Theta}, \mathbf{0}) \cdot \rho_0 \partial_\Omega \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{0}^+(s); \mathbf{0})[\mathbf{\Omega}] =$$

$$= \rho_0 (\mathbf{\Theta}, \mathbf{0}) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{0}^+(s); \lambda\mathbf{\Omega})|_{\lambda=0} = \rho_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left\{(\mathbf{\Theta}, \mathbf{0}) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{0}^+(s); \lambda\mathbf{\Omega})\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \rho_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s); \lambda\mathbf{\Omega} + \nu\mathbf{\Theta})_{\nu=0} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\nu\mathbf{\Theta} 1^+(s), \mathbf{0}^+(s); \lambda\mathbf{\Omega})|_{\nu=0} \right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \rho_0 \mathbf{\Theta} \cdot \partial_\Omega^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s); \mathbf{0})[\mathbf{\Omega}] = \rho_0 \mathbf{\Omega} \cdot \partial_\Omega^2 \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s); \mathbf{0})[\mathbf{\Theta}] = (\mathbf{\Omega}, \mathbf{0}) \cdot \mathcal{C}[\mathbf{\Theta}].$$

Trecem la a arăta că, oricare ar fi $\mathbf{\Theta}, \mathbf{\Omega} \in \mathcal{A}_7$, avem

$$(\mathbf{\Theta}, \mathbf{0}) \cdot \overline{\mathcal{K}}(0)[(\mathbf{\Omega}, \mathbf{0})] = (\mathbf{\Omega}, \mathbf{0}) \cdot \overline{\mathcal{K}}(0)[\mathbf{\Theta}, \mathbf{0})] \tag{5.6}$$

și

$$(\Omega, \mathbf{0}) \cdot \overline{\mathcal{K}}(0)\,[(\Omega, \mathbf{0})] \geqslant 0. \tag{5.7}$$

Pentru aceasta, fie istoria

$$\mathbf{A}^t(s) = \begin{cases} \mathbf{0}, & s > 0, \\ (\Omega, \mathbf{0}), & s = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\mathbf{A}^t(s) = \mathbf{0}^+(s), \qquad \mathbf{A}_d^t(s) = (-\,\Omega\,\mathbf{1}^+(s), \mathbf{0}^+(s)),$$

deci

$$\int_0^\infty \overline{\mathcal{K}}'(s)\mathbf{A}^t(s)\,ds = 0, \quad \rho_0\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{0}^+(s)\,;\,\mathbf{0}\,|\,\mathbf{A}_d^t(s)) =$$

$$= -\,\rho_0\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{0}^+(s)\,;\,\mathbf{0}\,|\,(\Omega\,\mathbf{1}^+(s), \mathbf{0}^+(s))). \tag{5.8}$$

Ținînd seama de (5.8), obținem :

$$-\,\mathcal{K}(0)[(\Omega, \mathbf{0})] = \rho_0\delta \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\mathbf{0}^+(s)\,;\,\mathbf{0}\,|\,(\Omega\mathbf{1}\,|^+(s), \mathbf{0}^+(s))) =$$

$$= \rho_0 \frac{d}{d\lambda} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\lambda(\Omega\mathbf{1}^+(s), \mathbf{0}^+(s)\,;\,\mathbf{0})\,|_{\lambda=0}.$$

Înmulțind scalar această relație cu $(\Theta, \mathbf{0})$ și ținînd seama de (5.5) și $(36)_1$, avem :

$$-\,(\Theta, \mathbf{0}) \cdot \mathcal{K}(0)[(\Omega, \mathbf{0})] = \rho_0 \frac{d}{d\lambda} \left\{ (\Theta, 0) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{G}}} (\lambda(\Omega\,|^+(s), \mathbf{0}^+(s))\,;\,\mathbf{0}) \right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \rho_0 \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{d}{d\nu} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\lambda(\Omega\mathbf{1}^+(s), \mathbf{0}^+(s))\,;\ \nu\Theta)\,|_{\nu=0} \right\}_{\lambda=0} -$$

$$-\,\rho_0 \frac{d}{d\lambda} \left\{ \frac{d}{d\nu} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\lambda(\Omega\mathbf{1}^+(s), \mathbf{0}^+(s)) + \nu(\Theta\mathbf{1}^+(s),\ \mathbf{0}^+(s))\,;\,\mathbf{0})\,|_{\nu=0} \right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \rho_0 \frac{d}{d\nu} \left\{ \frac{d}{d\lambda} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\lambda(\Omega\mathbf{1}^+(s), \mathbf{0}^+(s))\,;\,\nu\,\Theta)\,|_{\lambda=0} \right\}_{\nu=0} -$$

$$-\,\rho_0(\Theta, \mathbf{0}) \cdot \nabla\nabla \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s)\,;\,\mathbf{0})[(\Omega, \mathbf{0})] = -$$

$$-\,\rho_0(\Omega, \mathbf{0}) \cdot \nabla\nabla \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\mathbf{0}^+(s)\,;\ \mathbf{0})[(\Theta, \mathbf{0})] = -\,(\Omega, \mathbf{0}),\ \overline{\mathcal{K}}(0)[(\Theta, \mathbf{0})].$$

Făcînd mai sus $\Theta = \Omega$ și ținînd seama de $(3.6)_2$, obținem

$$(\Omega, \mathbf{0}) \cdot \overline{\mathcal{K}}(0)[(\Omega, \mathbf{0})] = \rho_0 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} \overset{\infty}{\underset{s=0}{\pi}} (\lambda(\Omega \mathbf{1}^+(s), \mathbf{0}^+(s)); \mathbf{0})|_{\lambda=0} \geqslant 0,$$

adică tocmai (5.7).

Ținînd seama de proprietățile demonstrate mai înainte, escompunem operatorii $\mathcal{C}$ și $\overline{\mathcal{K}}(s)$, după car vom explicita expresiile pentru $\mathbf{S}$, η și $\mathbf{q}$:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathscr{C} & -\mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & -c \\ \mathbf{P} & \mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathcal{K}}(s) = \begin{bmatrix} \mathscr{K}(s) & -\mathbf{A}(s) & -\mathbf{R}(s) \\ -\mathbf{L}(s) & -k(s) & \mathbf{r}(s) \\ \mathbf{B}(s) & \mathbf{b}(s) & -\mathbf{K}(s) \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathcal{K}}(0) = \begin{bmatrix} \mathscr{K}(0) & -\mathbf{L}(\mathbf{c}) & -\mathbf{R}(0) \\ -\mathbf{L}(0) & -k(0) & \mathbf{r}(0) \\ \mathbf{B}(0) & \mathbf{b}(0) & -\mathbf{K}(0) \end{bmatrix}, \tag{5.9}$$

unde $\mathscr{C}$ și $\mathscr{K}(0)$ sînt tensori simetrici de ordinul 4, $\mathscr{K}(0)$ fiind pozitiv semidefinit, $\mathbf{M}$ și $\mathbf{L}(0) \in \mathcal{T}$, $\mathbf{L}(0)$ pozitiv semidefinit, $c \in (-\infty, \infty)$, $\mathbf{P} \in \mathrm{Lin}\,(\mathcal{T}, \mathcal{V})$, $\mathbf{p} \in \mathcal{V}$, $\mathscr{K}(s)$ tensor de ordinul 4, $k(s) \in (-\infty, \infty)$, $k(0) \leqslant 0$, $\mathbf{R}(s) \in \mathrm{Lin}\,(\mathcal{V}, \mathcal{T})$, $\mathbf{B}(s) \in \mathrm{Lin}\,(\mathcal{T}, \mathcal{V})$, $\mathbf{r}(s)$ și $\mathbf{b}(s) \in \mathcal{V}$, $\mathbf{K}(s) \in \mathrm{Lin}\,(\mathcal{V}, \mathcal{V})$, $\mathbf{L}(s)$ și $\mathbf{A}(s) \in \mathcal{T}$. Cu aceste descompuneri relația (5.4) se scrie pe componente astfel:

$$\rho_0 \mathbf{S} = \rho_0 \mathbf{S}_0 + \mathscr{C}[\mathbf{G}] - \mathbf{M}T + \mathscr{K}(0)[\mathbf{G}] - \mathbf{L}(0)T + \int_0^\infty \mathscr{K}'(s)[\mathbf{G}^t(s)]\,\mathrm{d}s -$$

$$- \int_0^\infty \mathbf{A}'(s)\, T^t(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^\infty \mathbf{R}'(s)\, \bar{\mathbf{g}}^t(s)\,\mathrm{d}s + o(\|\mathbf{\Lambda}_d^t(\cdot)\| + |\Omega|),$$

$$\rho_0 \eta = \rho_0 \eta_0 + \mathbf{M} \cdot \mathbf{G} + cT + \mathbf{L}(0) \cdot \mathbf{G} + k(0)\, T + \int_0^\infty \mathbf{L}'(s) \cdot \mathbf{G}^t(s)\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \int_0^\infty k'(s)\, T^t(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^\infty \mathbf{r}'(s) \cdot \bar{\mathbf{g}}^t(s)\,\mathrm{d}s + o(\|\mathbf{\Lambda}_d^t(\cdot)\| + |\Omega|),$$

$$\rho_0 \frac{q}{\rho\theta} = \mathbf{P}[\mathbf{G}] + \mathbf{p}T + \mathbf{B}(0)[\mathbf{G}] + \mathbf{b}(0)T + \int_0^\infty \mathbf{B}'(s)[\mathbf{G}^t(s)]\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \int_0^\infty \mathbf{b}'(s)\, T^t(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^\infty \mathbf{K}'(s)\, \bar{\mathbf{g}}^t(s)\,\mathrm{d}s + o(\|\mathbf{\Lambda}_d^t(\cdot)\| + |\Omega|).$$

Presupunînd că

$$\varepsilon = \sup_{-\infty<\tau<\infty} \{|\mathbf{H}(\tau)| + |T(\tau)/\theta_0| + |\mathbf{g}(\tau)\, l_0/\theta_0|\} \ll 1,$$

unde $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{1}$, iar l_0 este o lungime caracteristică a corp lui (de exemplu diametrul său în cinfigurația de referință) și ținînd seama de următoarele evaluări :

$$\mathbf{H} = O(\varepsilon),\ T = O(\varepsilon),\ \mathbf{g} = O(\varepsilon),\ \mathbf{E} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = O(\varepsilon),$$

$$\mathbf{W} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T) = O(\varepsilon),\quad \mathbf{G} = \mathbf{E} + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon),$$

$$\rho = \rho_0(\det F)^{-1} = \rho_0(1 - \operatorname{tr}\mathbf{E}) + O(\varepsilon^2) = \rho_0 + O(\varepsilon), \qquad (5.11)$$

relațiile cosntitutive (5.10) pot fi liniarizate, așa încît se obține (vezi și [4]) :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_0 + \mathbf{E}\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0\mathbf{E} - (\operatorname{tr}\mathbf{E})\mathbf{T}_0 + \mathbf{W}\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\mathbf{W} + \mathscr{C}[\mathbf{E}] -$$

$$- \mathbf{M}T + \mathscr{K}(0)[\mathbf{E}] - \mathbf{L}(0)\, T +$$

$$+ \int_0^\infty \{\mathscr{K}'(s)[\mathbf{E}^t(s)] - \mathbf{A}'(s)\, T^t(s) - \mathbf{R}'(s)\bar{\mathbf{g}}^t(s)\}\, ds + o(\varepsilon), \qquad (5.12)$$

$$\rho_0\eta(t) = \rho_0\eta_0 + \mathbf{M}\cdot\mathbf{E} + cT + \mathbf{L}(0)\cdot\mathbf{E} + k(0)\, T +$$

$$+ \int_0^\infty \{\mathbf{L}'(s)\cdot\mathbf{E}^t(s) + k'(s)\, T^t(s) + \mathbf{r}'(s)\cdot\bar{\mathbf{g}}^t(s)\}\, ds + o(\varepsilon),$$

$$\frac{q(t)}{\theta_0} = \mathbf{P}[\mathbf{E}] + \mathbf{p}T + \mathbf{B}(0)[\mathbf{E}] + \mathbf{b}(0)T +$$

$$+ \int_0^\infty \{\mathbf{B}'(s)[\mathbf{E}^t(s)] + \mathbf{b}(s)\, T^t(s) - \mathbf{K}'(s)\bar{\mathbf{g}}^t(s)\}\, ds + o(\varepsilon),$$

unde $\mathbf{T}_0$ este tensiunea Cauchy în configurația de referință.

Dacă se are în vedere $(5.3)_2$ și definiția lui $\bar{\mathbf{g}}^t(s)$, ecuațiile constitutive (5.12), neglijînd termenii $o(\varepsilon)$, pot fi scrise într-o altă formă, utilă în cele ce urmează :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_0 + \mathbf{E}\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_0\mathbf{E} - (\operatorname{tr}\mathbf{E})\,\mathbf{T}_0 + \mathbf{W}\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\mathbf{W} + \mathscr{C}[\mathbf{E}] - \mathbf{M}T +$$

$$+ \mathscr{K}(0)[\mathbf{E}] - \mathbf{L}(0)\, T + \int_0^\infty \{\mathscr{K}'(s)[\mathbf{E}^t(s)] - \mathbf{A}'(s)\, T^t(s)\}\, ds + \int_0^\infty \mathbf{R}(s)\mathbf{g}^t(s)\, ds,$$

$$\rho_0\eta(t) = \rho_0\eta_0 + \mathbf{M}\cdot\mathbf{E} + cT + \mathbf{L}(0)\cdot\mathbf{E} + k(0)\,T + \\ + \int_0^\infty \{\mathbf{L}'(s)\cdot\mathbf{E}^t(s) + k'(s)\,T^t(s)\}\,\mathrm{d}s - \int_0^\infty \mathbf{r}(s)\cdot\mathbf{g}^t(s)\,\mathrm{d}s, \tag{5.13}$$

$$\frac{\mathbf{q}(t)}{\theta_0} = (\mathbf{P} + \mathbf{B}(0))[\mathbf{E}] - \mathbf{r}(0)\,T + \int_0^\infty \{\mathbf{B}'(s)[\mathbf{E}^t(s)] + \mathbf{b}'(s)T^t(s)\}\,\mathrm{d}s + \\ + \int_0^\infty \mathbf{K}(s)\,\mathbf{g}^t(s)\,\mathrm{d}s.$$

Din $(5.13)_3$ se vede că, în cazul particular în care punctul material **X**, suferă un proces în care

$$\mathbf{E}(\tau) = \mathbf{0},\quad T(\tau) = 0,\quad \mathbf{g}(\tau) = \mathbf{g} = \text{constant, pentru } \tau \leqslant t$$

și, deoarece $\int_0^\infty \mathbf{K}(s)\mathrm{d}s$ există (în virtutea ipotezei că $s^2\hbar^2(s)$ este integrabilă pe $(0, \infty)$ și a proprietății $(5.2)_2$), fluxul de căldură are forma

$$\mathbf{q}(t) = \theta_0\left(\int_0^\infty \mathbf{K}(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathbf{g}(t) \equiv \mathbf{K}_\infty\,\mathbf{g}(t).$$

Mai mult, dacă materialul este izotrop, atunci

$$\mathbf{K}(s) = \varkappa(s)\mathbf{1},$$

așa încît

$$\mathbf{q}(t) = \theta_0\left(\int_0^\infty \varkappa(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathbf{g}(t) \equiv -\varkappa\,\mathbf{g}(t),$$

adică legea lui Fourier are loc cu $\varkappa = -\theta_0\int_0^\infty \varkappa(s)\mathrm{d}s$. Din acest motiv numim mărimea $\varkappa$ *conductivitate termică de echilibru* ([8]), iar tensorul $\mathbf{K}_\infty$, *tensorul conductivității termice de echilibru* ([12]). Din $(5.12)_3$ și $(5.3)_2$ se vede că tensorul conductivității termice instantanee (4.1) este constant și este dat de $-\theta_0\mathbf{K}(0)$, așa încît, în virtutea teoremei 4.1, $\mathbf{K}(0)$ este *simetric* și *negativ semidefinit*, rezultat care nu s-a putut obține din proprietățile (5.6) și (5.7) ale lui $\overline{\mathfrak{K}}(0)$.

Dacă materialul este izotrop în **X**, atunci

$$\mathbf{q}(t) = \theta_0\int_0^\infty \varkappa(s)\,\mathbf{g}(t-s)\,\mathrm{d}s.$$

Alegînd mai sus $\varkappa(s) = -\frac{\varkappa\sigma}{\theta_0} e^{-\sigma s}$ (vezi [8]), legea conducției de căldură a lui Cattane (2.7) are loc, adică teoria expusă în această lucrare conține, pentru funcții constitutive particulare, legea propusă de Cattaneo pentru a evita propagarea instantanee a perturbațiilor temperaturii.

Scriem acum compact ecuațiile constitutive liniarizate (5.13), introducînd un operator liniar $\overline{\mathcal{R}}(s) \in \mathrm{Lin}\,(\mathcal{A}_{10}, \mathcal{A}_{10})$, $s \geqslant 0$ și desemnînd prin $\mathbf{\Lambda}$ perechea $(\mathbf{E}, T)$. Pentru aceasta, definim aplicația $\overline{\mathcal{C}} : \mathcal{A}_{10} \to \mathcal{A}_{10}$, de co ponente (vezi $(5.9)_1$)

$$\overline{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \mathscr{C} & -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M} & -c & \mathbf{0} \\ \mathbf{P} & \mathbf{p} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

așa încît, pentru orice $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Omega}, \mathbf{a}) \in \mathcal{A}_{10}$,

$$\overline{\mathcal{C}}[\mathbf{\Lambda}] = \mathcal{C}[\mathbf{\Omega}];$$

deci $\overline{\mathcal{C}}$ este bine diefinit și aparține mulțimii $\mathrm{Lin}\,(\mathcal{A}_{10}, \mathcal{A}_{10})$.

Presupunem că am ales o configurație de referință *naturală*, adică în care $\mathbf{T}_0 = \mathbf{0}$; deoarece entropia specifică este determinată înă la o constantă aditivă, luăm $\eta_0 = 0$, astfel încît ecuațiile (5.13) se scriu

$$\mathbf{\Sigma}(t) = (\overline{\mathcal{C}} + \overline{\mathcal{R}}(0))[(\mathbf{\Delta}, \mathbf{0})] + \int_0^\infty \overline{\mathcal{R}}'(s)[\mathbf{\Lambda}^t(s)]\,ds,$$

unde

$$\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{T}, -h, \mathbf{l}) \equiv (\mathbf{\Pi}, \mathbf{l}), \quad \text{cu} \quad h = \rho_0 \eta, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{q}}{\theta_0} \tag{5.14}$$

și

$$\mathbf{\Lambda}^t(s) = (\mathbf{E}^t(s), T^t(s), \overline{\mathbf{g}}^t(s)), \quad \mathbf{\Lambda}^t(0) = (\mathbf{\Delta}, \mathbf{0}).$$

Dacă notăm

$$\overline{\mathcal{C}} + \overline{\mathcal{K}}(s) = \overline{\mathcal{R}}(s), \tag{5.15}$$

atunci

$$\mathbf{\Sigma}(t) = \overline{\mathcal{R}}(0)[(\mathbf{\Delta}, \mathbf{0})] + \int_0^\infty \overline{\mathcal{R}}'(s)[\mathbf{\Lambda}^t(s)]. \tag{5.16}$$

Pentru necesități ulterioare dorim să scriem această ecuație sub o altă formă. De aceea descompunem $\overline{\mathcal{R}}(s)$ astfel :

$$\overline{\mathcal{R}}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{R}(s) & -\mathscr{R}(s) \\ \mathscr{I}(s) & -\mathbf{K}(s) \end{bmatrix}, \tag{5.17}$$

unde $\mathcal{R}(s) \in \mathrm{Lin}\,(\mathcal{A}_7, \mathcal{A}_7)$, $\mathcal{R}(s) \in \mathrm{Lin}\,(\mathcal{V}, \mathcal{A}_7)$, $\mathcal{J}(s) \in \mathrm{Lin}\,(\mathcal{A}_7, \mathcal{V})$, $\mathbf{K}(s) \in \mathrm{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$, legătura între aceste componente și cele din (5.9) fiind următoarea :

$$\mathcal{R}(s) = \begin{bmatrix} \mathcal{C} + \mathcal{K}(s) & -\mathbf{M} & -\mathbf{A}(s) \\ -\mathbf{M} & -\mathbf{L}(s) & -c - k(s) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(s) \\ -\mathbf{r}(s) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{J}(s) = [\mathbf{P} + \mathbf{B}(s)\,\mathbf{p} + \mathbf{b}(s)]. \tag{5.18}$$

Ținînd seama de (5.17) și (5.14), ecuația (5.16) devine :

$$\boldsymbol{\Pi}(t) = \mathcal{R}(0)[\boldsymbol{\Delta}] + \int_0^\infty \mathcal{R}'(s)\,[\boldsymbol{\Delta}^t(s)]\,ds - \int_0^\infty \mathcal{R}'(s)\,\bar{\mathbf{g}}^t(s)\,ds,$$

$$\mathbf{l}(t) = \mathcal{J}(0)[\boldsymbol{\Delta}] + \int_0^\infty \mathcal{J}'(s)[\boldsymbol{\Delta}^t(s)]\,ds - \int_0^\infty \mathbf{K}'(s)\,\bar{\mathbf{g}}^t(s)\,ds.$$

Evident,

$$\overline{\mathcal{R}}(0) = \bar{\mathcal{C}} + \overline{\mathcal{K}}(0), \tag{5.20}$$

iar $\overline{\mathcal{R}}(\infty)$ există și este dat (vezi $(5.3)_2$) de

$$\overline{\mathcal{R}}(\infty) = \bar{\mathcal{C}}, \tag{5.21}$$

așa încît, presupunînd $\boldsymbol{\Delta}(-\infty) = \mathbf{0}$ (adică procesul pornește din configurația de referință) și integrînd prin părți integralele din (5.19), obținem :

$$\boldsymbol{\Pi}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{R}(t-s)[\dot{\boldsymbol{\Delta}}(s)]\,ds + \int_{-\infty}^t \mathcal{R}(t-s)\,\mathbf{g}(s)\,ds,$$

$$\mathbf{l}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{J}(t-s)[\dot{\boldsymbol{\Delta}}(s)]\,ds + \int_{-\infty}^t \mathbf{K}(t-s)\,\mathbf{g}(s)\,ds. \tag{5.22}$$

Numim materialul caracterizat de aceste ecuații constitutive material *termovîscoelastic liniar de tip integral*. Din modul în care au fost deduse rezultă că expresiile (5.22) aproximează comportarea pentru istorii cu normă „mică" a unui material definit de (2.4) cu funcții constitutive care satisfac principiul memoriei slăbite al lui Coleman. Materialul (5.22) poate însă să nu aibă memorie slăbită, adică funcțiile constitutive să nu satisfac principiul amintit (vezi [15], §4.8).

Numim $\mathcal{R}(\cdot)$ *funcția de relaxare a tensiunii generalizate*, iar $\mathbf{K}(\cdot)$ *funcția de relaxare a căldurii* (în acord cu [12]). Cu un argument similar celui din [5], §1, numim $\mathcal{R}(0)$ *modulul termoelastic instantaneu*, iar $\mathcal{R}(\infty)$

modulul termoelastic de echilibru. Forma liniarizată (5.22) a ecuațiilor constitutive (2.12) este în acord cu ipoteza (E) a lui Gurtin din [12].

Din proprietățile demonstrate pentru $\overline{\mathcal{R}}(0)$ și $\mathcal{C}$ și din (5.17), (5.20), (5.21) și definiția lui $\overline{\mathcal{C}}$ rezultă că :

$$(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{0}) \cdot \overline{\mathcal{R}}(\infty)[(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{0})] = (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{0}) \cdot \overline{\mathcal{R}}(\infty)[(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{0})],$$

ceea ce este echivalent cu

$$\boldsymbol{\Theta} \cdot \mathcal{R}(\infty)[\boldsymbol{\Omega}] = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathcal{R}(\infty)[\boldsymbol{\Theta}].$$

De asemenea,

$$(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{0}) \cdot (\overline{\mathcal{R}}(0) - \overline{\mathcal{R}}(\infty))[(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{0})] = (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{0}) \cdot (\overline{\mathcal{R}}(0) - \overline{\mathcal{R}}(\infty))[(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{0})],$$

$$(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{0}) \cdot (\overline{\mathcal{R}}(0) - \overline{\mathcal{R}}(\infty))\,[(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{0})] \geqslant 0,$$

adică

$$\boldsymbol{\Theta} \cdot (\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(\infty))[\boldsymbol{\Omega}] = \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(\infty))(\boldsymbol{\Theta}),$$

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(\infty)[\boldsymbol{\Omega}] \geqslant 0.$$

Deci inegalitatea Clausius-Duhem și principiul memoriei slăbite au condus la faptul că modulul termoelastic de echilibru este simetric, iar $\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(\infty)$ este simetric și pozitiv semidefinit, rezultate obținute și în [4], în care ecuațiile constitutive ale termovîscoelasticității liniare pentru tensiuni și entropie specifică nu depind de gradientul temperaturii. În plus, $\mathbf{K}(0)$ a rezultat negativ semidefinit.

6. PROPRIETĂȚI DE SIMETRIE ÎN TERMOVÎSCOELASTICITATEA LINIARĂ DE TIP INTEGRAL

În §5 am arătat simetria operatorilor $\mathcal{R}(\infty)$, $\mathcal{R}(0) - \mathcal{R}(\infty)$, $\mathbf{K}(0)$, proprietăți pe care nu le-am putut demonstra în cadrul termodinamicii bazate pe inegalitatea Clausius-Duhem pentru funcțiile de relaxare $\mathcal{R}(s)$ și $\mathbf{K}(s)$, pentru orice $s \geqslant 0$. Urmînd lucrarea [5] și folosind rezultate din [12], vom da o condiție necesară și suficientă pentru simetria funcțiilor de relaxare $\mathcal{R}(s)$, $\mathbf{K}(s)$ pentru $s \geqslant 0$ și, în plus, pentru ca o anumită relație între $\mathcal{R}(s)$ și $(\mathcal{I}s)$ să aibă loc pentru orice $s \geqslant 0$.

Pentru aceasta sînt necesare unele notații și leme ajutătoare (vezi [12]). Pentru o mulțime deschisă $\mathcal{U}_0$ din spațiul vectorial finit dimensional cu produs interior $\mathcal{U}$ definim un *drum închis* în $\mathcal{U}_0$ ce pleacă din $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_0$ ca fiind o funcție netedă $\mathbf{f} : (-\infty, \infty) \to \mathcal{U}_0$, așa încît, pentru un anumit $t_0 > 0$,

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{u} \text{ dacă } t < -t_0 \text{ sau } t > t_0.$$

Dacă $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, spunem că drumul $\mathbf{f}$ pornește din starea de echilibru. Prin inversare temporală a drumului $\mathbf{f}$ înțelegem funcția $\tilde{\mathbf{f}} : (-\infty, \infty) \to \mathcal{U}_0$, definită prin

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{f}(-t), \qquad \forall t \in (-\infty, \infty). \tag{6.1}$$

Evident, $\bar{\mathbf{f}}$ este un drum închis în $\mathscr{U}_0$. Vom nota cu $P(\mathscr{U}_0, \mathbf{u})$ mulțimea drumurilor închise din $\mathscr{U}_0$ care pleacă din $\mathbf{u}$.

Următoarele leme, ale căror demonstrații se pot găsi în [11] și [12], intervin esențial în demonstrarea teoremei.

Lema 6.1. (Day, [11]). Fie $\mathbf{A}:[0, \infty) \to \text{Lin}\,(\mathscr{U}, \mathscr{U})$ continuă și mărginită și, pentru orice $\mathbf{f} \in P(\mathscr{U}, 0)$, fie

$$F(\mathbf{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \dot{\mathbf{f}}(t) \cdot \mathbf{A}(t-s)[\dot{\mathbf{f}}(s)]\, ds\, dt.$$

Atunci

$$F(\mathbf{f}) = F(\bar{\mathbf{f}}) \quad \text{pentru orice} \quad \mathbf{f} \in P(\mathscr{U}, \mathbf{0})$$

dacă și numai dacă $\mathbf{A}(s)$ este simetric pentru orice $s \geqslant 0$.

Lema 6.2. (Gurtin, [12]). Fie $\mathbf{B}: [0, \infty) \to \text{Lin}\,(\mathscr{U}, \mathscr{U})$ continuă și, pentru orice $\mathbf{g} \in P(\mathscr{U}, 0)$, fie

$$F(\mathbf{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{B}(t-s)[\mathbf{g}(s)]\, ds dt.$$

Atunci

$$F(\mathbf{g}) = F(\tilde{\mathbf{g}}) \text{ pentru orice } \mathbf{g} \in P(\mathscr{U}, \mathbf{0})$$

dacă și numai dacă $\mathbf{B}(s)$ este simetric pentru orice $s \geqslant 0$.

Lema 6.3. (Gurtin, [12]). Fie $\mathbf{C}: [0, \infty) \to \text{Lin}\,(\mathscr{U}, \mathscr{W})$ și $\mathbf{D}: [0, \infty) \to \text{Lin}\,(\mathscr{W}, \mathscr{U})$ continue și, pentru orice $\mathbf{f} \in P(\mathscr{U}, 0)$, $g \in P(\mathscr{W}, \mathbf{0})$, fie

$$F(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} \{\dot{\mathbf{f}}(t) \cdot \mathbf{D}(t-s)[\mathbf{g}(s)] + \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{C}(t-s)[\dot{\mathbf{f}}(s)]\}\, ds dt.$$

Atunci

$$F(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = F(\bar{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{g}}) \text{ pentru orice } \mathbf{f} \in P(\mathscr{U}, \mathbf{0}),\ \mathbf{g} \in P(\mathscr{W}, \mathbf{0})$$

dacă și numai dacă

$$\mathbf{C}(s) \overset{\text{a.e.}}{=} -\mathbf{D}^T(s) + \text{const.}$$

Observația 6.1. În cazul unui drum închis $\mathbf{\Lambda}(\cdot) = (\mathbf{E}(\cdot), T(\cdot), \mathbf{g}(\cdot)) = (\mathbf{\Delta}(\cdot), \mathbf{g}(\cdot))$ din $P(\mathscr{C}_{10}, \mathbf{0})$, ținînd seama de evaluările (5.11), de ecuațiile constitutive (5.13) și neglijînd termenii $\mathbf{O}(\varepsilon^3)$, integrala de disipare $(3.10)_3$ devine:

$$\mathscr{I}(t_0, -t_0) = \frac{1}{\rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{\Pi}(t) \cdot \mathbf{\Delta}(t) - \mathbf{l}(t) \cdot \mathbf{g}(t))\, dt \equiv \frac{1}{\rho_0}\, \mathscr{L}\{\mathbf{\Lambda}(\cdot)\}. \quad (6.2)$$

Prin analogie cu [5] numim mărimea $\mathscr{L}\{\mathbf{\Lambda}(\cdot)\}$ *lucrul mecanic-căldura* corespunzător drumului închis $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$, care, în virtutea observației 3.4, nu poate fi negativ. Următoarea teoremă precizează că numai proprietăți ale func-

țiilor constitutive din (5.22) au loc dacă și numai dacă lucrul mecanic-căldura posedă o proprietate suplimentară, cea de invarianță la inversarea temporală a oricărui drum din $P(\mathcal{C}_{10}, \mathbf{0})$.

Teorema 6.1. Lucrul mecanic-căldura corespunzător oricărui drum închis $\mathbf{\Lambda}(\cdot)$ care pornește din starea de echilibru este invariant la inversarea temporală a drumului, adică

$$\mathscr{L}\{\mathbf{\Lambda}(\cdot)\} = \mathscr{L}\{\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(\cdot)\}, \tag{6.3}$$

dacă și numai dacă, pentru orice $s \geqslant 0$, sînt adevărate următoarele afirmații :

(i) $\mathscr{R}(s)$ este simetric ;

(ii) $\mathbf{K}(s)$ este simetric

(ii) $\mathscr{R}(s) = \mathscr{J}^T(s) + \text{const.}$

Demonstrație. Folosind definiția (6.1) pentru $\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(\cdot)$, relația de definiție (6.2) și expresiile (5.22), avem :

$$\mathscr{L}\{\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(\cdot)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \{\dot{\mathbf{\Delta}}(-t)\cdot\mathscr{R}(t-s)[\dot{\mathbf{\Delta}}(-s)] + \dot{\mathbf{\Delta}}(-t)\cdot\mathscr{R}(t-s)\,\mathbf{g}(s)\}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\{\mathbf{g}(-t)\cdot\mathscr{J}(t-s)[\dot{\mathbf{\Delta}}(-s)] + \mathbf{g}(-t)\cdot\mathbf{K}(t-s)\,\mathbf{g}(-s)]\}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Făcînd mai sus $-t = t'$, $-s = s'$, schimbînd ordinea de integrare și făcînd apoi $t' = t$, $s' = s$, obținem

$$\mathscr{L}\{\mathbf{\Lambda}(\cdot)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\dot{\mathbf{\Delta}}(t)\cdot\mathscr{R}^T(t-s)[\dot{\mathbf{\Delta}}(s)]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\mathbf{g}(t)\cdot\mathbf{K}^T(t-s)\mathbf{g}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\{\dot{\mathbf{\Delta}}(s)\cdot\mathscr{R}(t-s)\,\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(s)\cdot\mathscr{J}(t-s)[\dot{\mathbf{\Delta}}(t)]\}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

ceea ce conduce la :

$$\mathscr{L}\{\mathbf{\Lambda}(\cdot)\} - \mathscr{L}\{\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(\cdot)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\dot{\mathbf{\Delta}}(t)\cdot(\mathscr{R}(t-s) - \mathscr{R}^T(t-s))[\dot{\mathbf{\Delta}}(s)]\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\mathbf{g}(t)\cdot(\mathbf{K}(t-s) - \mathbf{K}^T(t-s))\,\mathbf{g}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\{\dot{\mathbf{\Delta}}(t)\cdot\mathscr{R}(t-s)\,\mathbf{g}(s)-\mathbf{g}(t)\cdot\mathscr{J}(t-s)[\dot{\mathbf{\Delta}}(s)]\}\,ds\,dt-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t}\{\dot{\mathbf{\Delta}}(s)\cdot\mathscr{R}(t-s)\,\mathbf{g}(t)-\mathbf{g}(s)\cdot\mathscr{J}(t-s)[\dot{\mathbf{\Delta}}(t)]\}\,ds\,dt. \qquad (6.4)$$

Dacă (i), (ii), (iii) au loc, din expresia de mai înainte și din lema 6.3, în care luăm $\mathbf{D}=\mathscr{R}$, $\mathbf{C}=-\mathscr{J}$, $\mathscr{U}=\mathscr{A}_7$ și $\mathscr{W}=\mathscr{V}$, vedem că $\mathscr{L}\{\mathbf{\Lambda}(\cdot)\}=\mathscr{L}\{\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(\cdot)\}$.

Invers, presupunem că (6.3) are loc pentru orice $\mathbf{\Lambda}\in P(\mathscr{A}_{10},\mathbf{0})$. În particular, fie $\mathbf{\Lambda}(\cdot)=(\mathbf{\Delta}(\cdot),\mathbf{0}^{+}(\cdot))$. Atunci lema 6.1 implică

$$\mathscr{R}(s)=\mathscr{R}^{T}(s),\quad\forall\ s\geqslant 0.$$

Dacă $\mathbf{\Lambda}=(\mathbf{0},\mathbf{g})$, atunci lema 6.2 implică

$$\mathbf{K}(s)=\mathbf{K}^{T}(s),\qquad\forall s\geqslant 0,$$

așa încît, din diferența nulă (6.4) au mai rămas ultimii doi termeni ceea ce, în virtutea lemei 6.3, implică (iii) din teorema.

Corolar 6.1. Dacă $\mathscr{L}\{\mathbf{\Lambda}(\cdot)\}=\mathscr{L}\{\widetilde{\mathbf{\Lambda}}(\cdot)\}$ oricare ar fi $\mathbf{\Lambda}\in P(\mathscr{A}_{10},\mathbf{0})$, atunci tensorul conductivității termice de echilibru,

$$\mathbf{K}_{\infty}=\theta_0\int_{0}^{\infty}\mathbf{K}(s)\,ds,$$

este simetric.

Descompunem acum operatorii $\mathscr{R}(s)$, $\mathscr{R}(s)$ și $\mathscr{J}(s)$ în forma

$$\mathscr{R}(s)=\begin{bmatrix}\mathscr{G}(s) & -\mathbf{N}\\ -\mathbf{P}(s) & -g(s)\end{bmatrix},\qquad \mathscr{R}(s)=\begin{bmatrix}\mathbf{R}(s)\\ -\mathbf{r}(s)\end{bmatrix},\qquad \mathscr{J}(s)=[\mathbf{J}(s)\ \mathbf{j}(s)],$$

unde semnificația componentelor este evidentă din (5.18). Ecuațiile constitutive (5.22) se scriu pe componente astfel:

$$\mathbf{T}(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathscr{G}(t-s)\,\dot{\mathbf{E}}(s)\,ds-\int_{-\infty}^{t}\mathbf{N}(t-s)\ \dot{T}(s)ds+\int_{-\infty}^{t}\mathbf{R}(t-s)\ \mathbf{g}(s)\,ds,$$

$$\varrho_0\eta(t)=\int_{-\infty}^{t}\mathbf{P}(t-s)\cdot\mathbf{E}(s)\,ds+\int_{-\infty}^{t}g(t-s)\dot{T}(s)ds+\int_{-\infty}^{t}\mathbf{r}(t-s)\cdot\mathbf{g}(s)\,ds,$$

$$\frac{\mathbf{q}(t)}{\theta_0}=\int_{-\infty}^{t}\mathbf{J}(t-s)\,\dot{\mathbf{E}}(s)\,ds+\int_{-\infty}^{t}\mathbf{j}(t-s)\,\dot{T}(s)ds+\int_{-\infty}^{t}\mathbf{K}(t-s)\ \mathbf{g}(s)\,ds$$

Avem imediat următorul

Corolar 6.2. Dacă (6.3) are loc pentru orice $\mathbf{A}(\cdot) \in P(\mathcal{A}_{10}, 0)$, atunci, pentru orice $s \geqslant 0$, avem :

(i) $\mathcal{G}(s)$ simetric

(ii) $\mathbf{P}(s) = \mathbf{N}(s)$;

(iii) $\mathbf{R}(s) = \mathbf{J}^T(s) + \mathbf{C}_1$

(iv) $\mathbf{r}(s) = -\mathbf{j}(s) + \mathbf{c}_2$,

unde $\mathbf{C}_1$ este o aplicație liniară constantă din Lin ($\mathcal{V}$, $\mathcal{S}$), iar $\mathbf{c}_2$ este un vector constant din $\mathcal{V}$. Deoarece $\mathcal{R}(\infty) = \mathcal{C}$, $\mathcal{K}(\infty) = \mathbf{0}$, făcînd $s \to \infty$ în (iii) și (iv), obținem

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{P}^T, \qquad \mathbf{c}_2 = \mathbf{p},$$

deci

(iii)′ $\mathbf{R}(s) = \mathbf{J}^T(s) - \mathbf{P}^T$,

(iv)′ $\mathbf{r}(s) = -\mathbf{j}(s) + \mathbf{p}$

În cazul în care $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ și $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ obținem $\mathcal{R}(s) = \mathcal{J}^T(s)$, adică tensiunea și entropia specifică sînt independente de istoria gradientului temperaturii dacă și numai dacă fluxul de căldură este independent de istoria deformației și de cea a temperaturii.

Teorema 6.1 ne asigură că proprietatea de reversibilitate temporală a lucrului mecanic-căldurii, logic independentă de inegalitatea Clausius-Duhem, este o condiție necesară și suficientă pentru ca proprietățile (i), (ii), (iii) să aibă loc pentru funcțiile constitutive descriind materialul termovîscoelastic liniar (5.22), deci cînd tensiunea, entropia specifică și fluxul de căldură nu provin în mod necesar dintr-o funcție potențial (energia liberă). Subliniem, astfel, faptul că termodinamica bazată pe inegalitatea Clausius-Duhem în forma stipulată de Truesdell și Toupin nu a fost capabilă să furnizeze proprietățile de simetrie din teoremă, ci a fost necesară o ipoteză suplimentară, de unde se vede, încă o dată, caracterul incomplet al inegalității (2.9).

Menționăm că ipotezele de disipativitate din lucrarea [5], independente de proprietatea de invarianță a lucrului mecanic-căldurii la inversarea temporală a oricărui drum și de inegalitatea Clausius-Duhem, pot fi admise în cadrul teoriei prezente cu cerința suplimentară ca ele să aibă loc pentru drumuri cu cîmpul de temperatură *uniform*. Adoptarea lor ar conduce la aceleași concluzii ca în [5], §4, dînd astfel o justificare teoretică faptelor constatate experimental despre funcțiile de relaxare din termovîscoelaticitatea liniară (vezi comentariile din [5], §§1, 5, 6). De asemenea, se poate arăta că funcția $g(\infty) - g(\cdot)$ a unui conductor de căldură rigid este complet monotonă dacă și numai dacă lucrul mecanic-căldura ce corespunde unui drum *uniform* întors este mărit prin întîrzierea acestui drum (pentru semnificația acestor concepte vezi [5], §6). Aceasta implică, în particular,

$$g(s) \geqslant 0, \quad s \geqslant 0.$$

Concluzii. Prezentăm acum pe scurt rezultatele analizei efectuate.

Relațiile (2.10) și (2.11), deduse de McCarthy în [7] postulînd inegalitatea Clausius-Duhem și ecuațiile constitutive (2.4), au fost supuse mai întîi unei tratări similare celei făcute de Coleman [2]. Rezultatele obținute sînt de tipul celor din [2], care se reduc întotdeauna la acestea cînd cîmpul de temperatură este uniform. Cu ajutorul lor a fost posibilă o analiză analoagă abordărilor din [4] și [5]. Astfel au fost deduse ecuațiile (5.12) care aproximează liniar comportarea materialului de tip McCarthy la „mici" deformații și „mici" variații de temperatură de la o configurație de referință. Presupunînd că această configurație este una naturală și neglijînd termenii „mici" din (4.12), au fost obținute ecuațiile (5.22), care definesc materialul termovîscoelastic liniar ce constituie obiectul studiului din §6, unde condiția de reversibilitate temporală a lucrului mecanic-căldurii este necesară și suficientă pentru ca anumite funcții de relaxare ce caracterizează materialul (5.22) să fie simetrice (teorema 6.1). Această condiție nu a fost însă suficientă pentru a demonstra anumite proprietăți ale componențelor funcției de relaxare $\mathcal{R}(s)$ constatate experimental, așa încît, în cadrul teoriei elaborate, problemele enunțate și nerezolvate din [5] rămîn în continuare nesoluționate. În particular, nu s-a putut arăta că tensorul simetric de ordinul 4 $\mathcal{C}$ este pozitiv (semi)definit, ceea ce ar fi asigurat, fără vreo ipoterză suplimentară, existența vitezelor reale de propagare în materialul precizat de (5.22). Studiul perturbațiilor termomecanice în materialul de tip McCarthy și în cel termovîscoelastic liniar de tip integral va constitui conținutul unei lucrări viitoare. Rezultatu principal — condiția de propagare de tip Fresnel-Hadamard — dezvăluie încă o dată importanța admiterii independenței răspunsului materialului de gradientul de curent al temperaturii. Vom vedea că ipoteza fizic acceptabilă a existenței undelor de accelerație simetrice (vezi [16]) impune alte restricții asupra funcțiilor constitutive discutate în lucrarea prezentă.

Primită la redacție la 1 martie 1986

BIBLIOGRAFIE

1. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals with application in continuum mechanics*, Arch. Rat. Mech. Anal. **6**, 355—370 (1960).
2. B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal. **17**, 1—45 (1964).
3. B. D. COLEMAN, *On thermodynamics, strain impulses and viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal. **17**, 230—254 (1964).
4. IOANA LUCA, E. SOOS, *Restricții termodinamice în termovîscoelasticitatea liniară*, St. Cerc. Mec. Apl., **45**, 217—226 (1986).
5. IOANA LUCA, E. SOOS, *Proprietăți constitutive în termoviscoelasticitatea liniară*, St. Cerc. Mec. Apl., **45**, nr. 5 și 6 (1986).
6. W. A. DAY, *The Thermodynamics of Simple Materials with Fading Memory*, Springer-Varlag, Berlin and New York (1972).
7. M. F. Mc CARTHY, *Constitutive equations for thermomechanical materials with memory*, Int. J. Eng. Sci. **8**, 467—474 (1970).
8. M. E. GURTIN, A. C. PIPKIN, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, Ach. Rat. Mech. Anal. **31**, 113—126 (1968).
9. W. A. DAY, M. E. GURTIN, *On the symmetry of the conductivity tensor and other restrictions in the nonlinear theory of heat conduction*, Arch. Rat. Mech. Anal. **33**, 26—32 (1969).

10. C. TRUESDELL, ,,*Rational Thermodynamics*'' with an appendix by C.-C. Wang, Springer Verlag New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo (1984).
11. W. A. DAY, *Time-reversal and the symmetry of the relaxation function of a linear viscoelastic material*, Arch. Rat. Mech. Anal. **40**, 155—159 (1971).
12. M. E. GURTIN, *Time-reversal and symmetry in the thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal. **44**, 387—399 (1972).
13. B. D. COLEMAN, M. E. GURTIN, *Equipresences and constitutive equation for rigid heat conductors*, ZAMP **18**, 199—208 (1967).
14. I. MÜLLER, *Thermodynamics*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London--Melbourne (1985).
15. E. H. DILL, *Simple materials with ading memory* in *Continuum Physics II* editat de A. C. Eringen (1975).
16. M. MIHĂILESCU, I. SULICIU, *Finite and symmetric thermomechanical waves in materials with internal state variables*, Int. J. Solids Structures, **12**, 559—575 (1976).

AFLAREA EXPRESIEI VITEZEI ŞI ACCELERAŢIEI LINIARE ABSOLUTE PENTRU CAZUL GENERAL PE CALE DEDUCTIVĂ

de N. MOŞU

Universitatea din Braşov

Se studiază mişcarea absolută a unui punct, precum şi a unui rigid, atunci cînd raportarea la triedrul fix se face prin intermediul mai multor triedre mobile.

1. INTRODUCERE

În general, problema de faţă se studiază sub denumirea de *mişcarea relativă*, deşi întotdeauna studiul se extinde şi asupra mişcării de transport şi se încheie cu mişcarea absolută, care de fapt reprezintă scopul studiului.

Problema se studiază deductiv numai pentru cazul unui punct a cărui poziţie faţă de triedrul fix, T_0, este precizată prin intermediul unui singur triedru mobil.

Pentru un punct oarecare dintr-un rigid, aflat într-o situaţie similară, problema se rezolvă pe baza regulii de compunere ce rezultă în cazul punctului şi a formelor care dau distribuţia vitezelor şi acceleraţiilor punctelor rigidului. Rezultatele anterioare se generalizează printr-un raţionament inductiv şi pentru cazul unui rigid a cărui mişcare este raportată la triedrul fix prin intermediul a $n-1$ triedre mobile, triedrul T_n fiind solidar cu rigidul.

În lucrarea de faţă se urmează calea deductivă şi în cazul general, atît pentru un punct cît şi pentru un rigid (mai exact pentru un punct oarecare A al rigidului).

2. DATELE PROBLEMEI

Se consideră triedrul T_0 fix şi n triedre mobile, T_i, $i = \overline{1, n}$. Se cunoaşte mişcarea fiecărui triedru în raport cu precedentul, precum şi mişcarea punctului P în raport cu T_n, iar dacă ne referim la un rigid acesta este solidar cu T_n.

Mişcarea fiecărui triedru faţă de precedentul, de exemplu a lui T_i faţă de T_{i-1}, este precizată de viteza şi acceleraţia liniară a originii sale O_i faţă de T_{i-1}, $\vec{v}_{i-1}^{\,o_i}$ şi $\vec{a}_{i-1}^{\,o_i}$, precum şi de viteza şi acceleraţia unghiulară a lui T_i faţă de T_{i-1}, $\vec{\omega}_{i-1}^{\,i}$ şi $\vec{\varepsilon}_{i-1}^{\,i}$. Toţi aceşti patru vectori sînt exprimaţi în triedrul T_{i-1}. Menţionăm că a cunoaşte pe $\vec{v}_{i-1}^{\,o_i}$ şi $\vec{a}_{i-1}^{\,o_i}$ este echivalent cu a cunoaşte legea de variaţie în timp faţă de T_{i-1} a vectorului $\overrightarrow{O_{i-1}O_i}$, vectorul fiind exprimat în baza legată de triedrul T_{i-1}. În cazul punctului mai trebuie să cunoaştem şi legea de variaţie în timp a vectorului $\overrightarrow{O_nP}$, vectorul fiind exprimat desigur în triedrul T_n.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 45, NR. 6, 1986, P. 579–583

3. REZOLVAREA PROBLEMEI PROPUSE

Procedeul deductiv pornește de la definiția vitezei și accelerației liniare ca și a derivatelor succesive ale vectorului de poziție. În acest scop se exprimă vectorul de poziție al punctului subiect față de triedrul fix T_0 urmînd drumul care pleacă din originea acestuia O_0 și trece prin originile tuturor triedrelor mobile,

$$\overrightarrow{O_0P} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \ldots + \overrightarrow{O_{n-1}O_n} + \overrightarrow{O_nP} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_{i-1}O_i} + \overrightarrow{O_nP}, \tag{1}$$

și evident întru totul similar, $\overrightarrow{O_0A} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_{i-1}O_i} + \overrightarrow{O_nA}$. (2)

Derivatele vectorilor de poziție din relațiile (1) și (2) trebuie să fie absolute, adică față de triedrul fix, iar vectorii, cu excepția lui $\overrightarrow{O_0O_1}$, sînt exprimați în baze legate de triedre mobile. În aceste condiții derivarea se face după regula cunoscută [1], regulă care trebuie însă generalizată. Generalizarea revine la a preciza că viteza unghiulară din regula menționată este viteza unghilare absolută a triedrului în care este exprimat vectorul ce urmează să fie derivat.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{U}} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{\omega}^{n}_{obs} \times \vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \vec{\omega}^{k-1}_{k} \times \vec{U}. \tag{3}$$

Așadar, pentru aflarea vitezei absolute a punctului P derivăm în raport cu timpul relația (1).

$$\vec{v}^{P}_{abs} = \overrightarrow{O_0P} = \sum_{i+1}^{n} \left(\frac{\partial \overrightarrow{O_{i-1}O_i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{i1} \vec{\omega}^{k}_{k-1} \times \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \right) + \frac{\partial \overrightarrow{O_nP}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}^{i}_{i-1} \times \overrightarrow{O_nP},$$

dar $\dfrac{\partial \overrightarrow{O_{i-1}O}}{\partial t} = \vec{v}^{o_i}_{i-1}$ — reprezintă viteza originii lui T_i față de T_{i-1},

iar $\dfrac{\partial \overrightarrow{O_nP}}{\partial t} = \vec{v}^{P}_{n}$ — reprezintă viteza lui P față de T_n,

și deci

$$\vec{v}^{P}_{abs} = \vec{v}^{P}_{n} + \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}^{o_i}_{i-1} + \vec{\omega}^{i}_{i-1} \times O_n P + \sum_{k=1}^{i-1} \vec{\omega}^{k}_{k-1} \times \overrightarrow{O_{i-1}O_i}). \tag{4}$$

Relația (4) poate fi scrisă mai concentrat dacă se ține seama de egalitățile arătate în tabelul 1.

$$\vec{v}^{P}_{abs} = \vec{v}^{P}_{n} + \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}^{o_i}_{i-1} + \vec{\omega}^{i}_{i-1} \times \overrightarrow{O_iP}). \tag{4.a}$$

Tabelul 1

$$\sum_{i=1}^{n}(\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_nP}+\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\times\overrightarrow{O_{i-1}O_i})=$$

$$=\vec{\omega}_0^1\times\overrightarrow{O_nP}+$$

$$+\vec{\omega}_1^2\times\overrightarrow{O_nP}+\vec{\omega}_0^1\times\overrightarrow{O_1O_2}+$$

$$+\vec{\omega}_2^3\times\overrightarrow{O_nP}+(\vec{\omega}_0^1+\vec{\omega}_1^2)\times\overrightarrow{O_2O_3}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\vec{\omega}_{n-1}^{n}\times\overrightarrow{O_nP}+(\vec{\omega}_0^1+\vec{\omega}_1^2+\vec{\omega}_2^3+\ldots+\vec{\omega}_{n-2}^{n-1})\times\overrightarrow{O_{n-1}O_n}=$$

$$=\vec{\omega}_0^1\times(\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2O_3}+\overrightarrow{O_3O_4}+\ldots+\overrightarrow{O_{n-1}O_n}+\overrightarrow{O_nP})+$$

$$+\vec{\omega}_1^2\times(\overrightarrow{O_2O_3}+\overrightarrow{O_3O_4}+\ldots+\overrightarrow{O_{n-1}O_n}+\overrightarrow{O_nP})+$$

$$+\vec{\omega}_2^3\times(\overrightarrow{O_3O_4}+\ldots+\overrightarrow{O_{n-1}O_n}+\overrightarrow{O_nP})+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\vec{\omega}_{n-1}^{n}\times\overrightarrow{O_nP}=$$

$$=\vec{\omega}_0^1\times\overrightarrow{O_1P}+\vec{\omega}_1^2\times\overrightarrow{O_2P}+\ldots+\vec{\omega}_1^n\times\overrightarrow{O_nP}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_iP}.$$

A se vedea în acest sens şi [2], [3].

Acceleraţia absolută rezultă, desigur, prin derivarea în raport cu timpul a relaţiei (4a).

$$\vec{a}_{abs}^{P}=\dot{\vec{v}}=\frac{\partial\vec{v}_n^P}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\vec{v}_n^P+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\vec{v}_{i-1}^{O_i}}{\partial t}+\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\times\vec{v}_{i-1}^{O_i}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\vec{\omega}_{i-1}^{i}}{\partial t}+\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\times\vec{\omega}_{i-1}^{i}\right)\times\overrightarrow{O_iP}+\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\left(\frac{\overrightarrow{\partial O_iP}}{\partial t}+\sum_{k=1}^{i}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\times\overrightarrow{O_iP}\right)\right],$$

dar

$\partial\vec{v}_n^P/\partial t=\vec{a}_n^P$ — reprezintă acceleraţia lui P faţă de T_n,

$\partial\vec{v}_{i-1}^{O_i}/\partial t=\vec{a}_{i-1}^{O_i}$ — reprezintă acceleraţia originii lui T_i faţă de T_{i-1},

$\partial\vec{\omega}_{i-1}^{i}/\partial t=\vec{\varepsilon}_{i-1}^{i}$ — reprezintă acceleraţia unghiulară a lui T_i faţă de T_{i-1}

$\dfrac{\overrightarrow{\partial O_iP}}{\partial t}=\vec{v}_i^P=\vec{v}_n^P+\sum_{j=i+1}^{n}(\vec{v}_{j-1}^{O_j}+\vec{\omega}_{j-1}^{j}\times\overrightarrow{O_jP})$ — reprezintă viteza lui

P față de T_i și se calculează cu relația (4a), iar

$$\left(\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\times\vec{\omega}_{i-1}^{i}\right)\times\overrightarrow{O_iP}+\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\left(\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\times\overrightarrow{O_iP}\right)=-(\overrightarrow{O_iP}\cdot\vec{\omega}_{i}^{i})\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}+$$

$$+\left(\overrightarrow{O_iP}\cdot\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}^{i}\right)\vec{\omega}_{i-i}^{i}+\left(\vec{\omega}_{i-1}^{i}\cdot\overrightarrow{O_iP}\right)\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}-$$

$$-\left(\vec{\omega}_{i-1}^{i}\cdot\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\right)\overrightarrow{O_iP}=\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\times(\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_iP})$$

și astfel expresia accelerației absolute devine:

$$\vec{a}_{abs}^{P}=\vec{a}_{n}^{P}+\sum_{i=1}^{n}[\vec{a}_{i-1}^{o_i}+\vec{\varepsilon}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_iP}+\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times(\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_iP})+\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\vec{v}_{n}^{P}]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\times(\vec{v}_{i-1}^{o_i}+\vec{\omega}_{i}^{i}\times\overrightarrow{O_iP})+ \tag{5}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i-1}\vec{\omega}_{k-1}^{k}\times(\vec{v}_{i-1}^{o_i}+\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\vec{o}_{i})P+\sum_{i-7}^{n}\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times$$

$$\times\left[\vec{v}_{n}^{P}+\sum_{j=i+1}^{n}(\vec{v}_{j-1}^{o_j}+\vec{\omega}_{j-1}^{j}\times\overrightarrow{O_jP})\right].$$

Dacă se ține seama de egalitatea arătată în tabelul 2 expresia accelerației absolute poate fi scrisă și mai restrîns.

$$\vec{a}_{abs}^{P}=\vec{a}_{n}^{P}+\sum_{i=1}^{n}\left[\vec{a}_{i-1}^{i}+\vec{\varepsilon}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_iP}+\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times(\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_iP})+2\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\vec{v}_{n}^{P}\right]+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\sum_{j=i+1}^{n}(\vec{v}_{j-1}^{o_j}+\vec{\omega}_{j-1}^{j}\times\overrightarrow{O_jP}). \tag{5a}$$

Expresiile vitezei și accelerației liniare absolute pentru un punct oarecare A dintr-un rigid solidar cu T_n rezultă imediat din (4a) și (5a) dacă se înlocuiește P cu A și se ține seama că $\vec{v}_{n}^{A}=0$ și $\vec{a}_{n}^{A}=0$ deoarece punctul A este solidar cu T_n.

$$\vec{v}_{abs}^{A}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{v}_{i-1}^{o_i}+\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_iA}), \tag{6}$$

$$\vec{a}_{abs}^{A}=\sum_{i=1}^{n}[\vec{a}_{i-1}^{o_i}+\vec{\varepsilon}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_iA}+\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times(\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\overrightarrow{O_iA})]+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\vec{\omega}_{i-1}^{i}\times\sum_{j=i+1}^{n}(\vec{v}_{j-1}^{o_j}+\vec{\omega}_{j-1}^{j}\times\overrightarrow{O_jA}). \tag{7}$$

Se regăsesc astfel formulele date în [3].

Tabelul 2

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\omega}_{i-1}^{\,i} \times \sum_{j=i+1}^{n} (\vec{v}_{j-1}^{\,O_j} + \vec{\omega}_{j-1}^{\,j} \times \overrightarrow{O_jP}) =$$

$$= \vec{\omega}_0^{\,1} \times (\vec{v}_1^{\,O_2} + \vec{\omega}_1^{\,2} \times \overrightarrow{O_2P} + \vec{v}_2^{\,O_3} + \vec{\omega}_2^{\,3} \times \overrightarrow{O_3P} + \vec{v}_3^{\,O_4} + \vec{\omega}_3^{\,4} \times \overrightarrow{O_4P} + \ldots + \vec{v}_{n-1}^{\,O_n} + \vec{\omega}_{n-1}^{\,n} \times \overrightarrow{O_nP}) +$$

$$+ \vec{\omega}_1^{\,2} \times (\vec{v}_2^{\,O_3} + \vec{\omega}_2^{\,3} \times \overrightarrow{O_3P} + \vec{v}_3^{\,O_4} + \vec{\omega}_3^{\,4} \times \overrightarrow{O_4P} + \ldots + \vec{v}_{n-1}^{\,O_n} + \vec{\omega}_{n-1}^{\,n} \times \overrightarrow{O_nP}) +$$

$$+ \vec{\omega}_2^{\,3} \times (\vec{v}_3^{\,O_4} + \vec{\omega}_3^{\,4} \times \overrightarrow{O_4P} + \ldots + \vec{v}_{n-1}^{\,O_n} + \vec{\omega}_{n-1}^{\,n} \times \overrightarrow{O_nP}) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \omega_{n-2}^{n-1} \times (\vec{v}_{n-1}^{\,O_n} + \vec{\omega}_{n-1}^{\,n} \times \overrightarrow{O_nP}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} \vec{\omega}_{k-1}^{\,k} \times (\vec{v}_{i-1}^{\,O_i} + \vec{\omega}_{i-1}^{\,i} \times \overrightarrow{O_iP}) =$$

$$= \vec{\omega}_0^{\,1} \times (\vec{v}_1^{\,O_2} + \vec{\omega}_1^{\,2} \times \overrightarrow{O_2P}) +$$

$$+ (\vec{\omega}_0^{\,1} + \vec{\omega}_1^{\,2}) \times (\vec{v}_2^{\,O_3} + \vec{\omega}_2^{\,3} \times \overrightarrow{O_3P}) +$$

$$+ (\vec{\omega}_0^{\,i} + \vec{\omega}_1^{\,2} + \vec{\omega}_2^{\,3}) \times (\vec{v}_3^{\,O_4} + \vec{\omega}_3^{\,4} \times \overrightarrow{O_4P}) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ (\vec{\omega}_0^{\,1} + \vec{\omega}_1^{\,2} + \vec{\omega}_2^{\,3} + \vec{\omega}_3^{\,4} + \vec{\omega}_4^{\,5} + \vec{\omega}_5^{\,6} + \ldots + \vec{\omega}_{n-2}^{\,n-1}) \times (\vec{v}_{n-1}^{\,O_n} + \vec{\omega}_{n-1}^{\,n} \times \overrightarrow{O_nP}).$$

4. CONCLUZII

După cum se ştie în [1], [2], [3] şi în multe alte lucrări se prezintă metoda deductivă numai pentru aflarea acceleraţiei unghiulare absolute a rigidului solidar cu T_n.

Aşadar, prin prezenta lucrare se arată posibilitatea aplicării metodei deductive pentru toate aspectele problemei menţionate şi oferă deci, celor ce studiază problema, posibilitatea unei opţiuni.

Primită la redacţie la 6 decembrie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. V. VÂLCOVICI, ŞT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanica Teoretică*, ediţia a doua, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
2. R. VOINEA, D. VOICULESCU, V. CEAUŞU, *Mecanica*, ed. II, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
3. ŞT. STAICU, *Introducere in mecanica teoretică*, Edit. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1983.

CONTRIBUȚII LA UTILIZAREA CARBURILOR METALICE SINTERIZATE ÎN FORAJ. I

de D. CONSTANTINESCU

Institutul de Cercetare Științifică și Inginerie Tehnologică pentru Mecanică Fină și Scule, ICSITMFS — București

Lucrarea prezintă studiul indicatorilor de uzare și ai rezistențelor la uzură, în scopul optimizării duratelor de funcționare ale carburilor metalice sinterizate, utilizate la armarea sculelor de foraj.
Prima parte a lucrării conține definirea noțiunilor generale de bază, în legătură cu caracteristicile rocilor, specifice uzării și cu tipurile de uzură ale sculelor dislocante, ipotezele lucrării și studiul capacităților rocilor de a uza sculele dislocante.

1. GENERALITĂȚI

După cum este bine cunoscut, ca în oricare dintre procesele care au loc la contactul dintre două suprafețe în condițiile funcțional necesare, deci sub acțiunea unor forțe, cu mișcări relative și eventual cu prezența suplimentară a unor medii de influență, în foraj au loc două efecte reciproce, între *sculă* și *rocă*, și anume :

— *Dislocarea* rocii, de către sculă și

— *Uzarea* sculei, de către rocă.

Aceste efecte, cu caracter obiectiv, sînt, în mod evident, contradictorii din punct de vedere al scopului tehnico-economic urmărit în exploatare. Amploarea lor depinde de :

— metoda de foraj utilizată, asigurînd o anumită cinematică a sculei, specializată în prezent,

— regimul de lucru aplicat și de

— caracteristicile relative ale „cuplului" formînd suprafețele în contact, *natura* rocii și *tipul* părții active a sculei,

factori necesar a fi deci optimizați.

Datorită varietății foarte mari a rocilor, din punct de vedere al forajului, natura lor este definită de caracteristicile de *forabilitate* și de *abrazivitate* de la suprafața de contact cu scula dislocantă.

Forabilitatea reprezintă inversul „tăriei", adică inversul capacității rocii de a se opune dizlocării (tăria este proporțională cu valorile caracteristicilor mecanice proprii, de exemplu cu rezistența la compresiune), iar abrazivitatea este capacitatea de a uza abraziv scula dislocantă, fiind proporțională cu conținutul de constituienți abrazivi (și măsurîndu-se prin volumul specific de uzură al tăișului unei scule etalon).

În realitate, în ceea ce privește forabilitatea, o importanță deosebită o are și caracteristica de *fragilitate* (opusă „plasticității"), confundată în pratică cu „tăria", cu care, în general, variază proporțional. Fragilitatea rocii este hotărîtoare pentru alegerea metodei de foraj și sculei, și anume :

— forajul *rotativ*, cu scule cu „tăiș fix", de exemplu capete detașabile *CR* [1], pentru roci cu fragilitate mică,

— forajul *percutant*, cu scule de tip sfredele percutante [2], pentru roci cu fragilitate mijlocie sau ridicată, sau

— forajul *rotopercutant*, cu scule de tip capate (sape) detașabile (rotopercutante axial), de asemenea pentru roci cu fragilitate mijlocie sau mare, respectiv cu cuțite pentru combine miniere (rotopercutante tangențial) sau cu sape cu role, pentru forajul rocilor din oricare categorie [3], [4].

Deși noțiunile caracteristicilor rocilor sînt relative, întrucît performanțele sînt raportabile la condițiile concrete în care are loc forajul (metoda, regimul de lucru, tipodimensiunea sculei etc.) și nu pot fi stabilite a priori, neexistînd relații de calcul (și date) cantitative concrete cu aplicabilitate universală, tehnica forajului admite o clasificare generală, cuprinzînd patru categorii pentru forabilitate, adică roci de tărie :

slabă ; medie ; tare și extratare,

precum și cîte trei categorii pentru abrazivitate, adică roci :

puțin abrazive ; abrazive și foarte abrazive [5], [6].

În tabelele 1.1 și 1.2, sînt date limitele rezistenței de rupere la compresiune σ_{rc}/daN/cm^2/ pentru unele roci medii... extratari cunoscute și respectiv clasificarea rocilor în funcție de forabilitatea lor, după M. M. Protodiakonov, în care coeficientul de tărie al rocii este

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \sigma_{rc}/100, \qquad (1.1),$$

iar φ — unghiul de frecare interioară a rocii.

Întrucît tipurile de uzură de bază ale sculelor dislocante de rocă sînt [7] :

— *uzura prin oboseală la șoc* (generală și/sau superficială), respectiv

— *uzura abrazivă*

(celelalte tipuri de uzură adezivă și chimică, precum și influențele date de temperatura ridicată sau de mediile suplimentare, prezente la suprafețele în contact, avînd o pondere relativ redusă, se consideră incluse în uzurile de bază), ambele caracteristici de foraj ale rocilor reprezintă capacități de uzare :

— tăria rocii reprezintă *capacitatea de uzare prin oboseală la șoc* și

— abrazivitatea, *capacitatea de uzare abrazivă*.

Tabelul 1.1

Exemple de roci

Nr. crt.	ROCA	Rezistența (limită) la compresiune σ_{rc}, daN/cm^2
1	Caăcar	500...1700
2	Gresii	500...1800
3	Gnaise	1000...1500
4	Marmore	1000...1700
5	Andezite	500...2500
6	Granite	700...2500
7	Bazalte	1500...3000
8	Cuarțite	2000...3500

Indicatorii capacității rocii de a uza scula, care depind deci de natura rocii (și implicit de rezistențele la uzură ale sculei), se notează cu C_0, pentru uzura prin oboseală la șoc și cu C_A, pentru uzura abrazivă, iar coeficienții de pondere ai tipurilor de uzură, avînd valori depinzînd de metoda de foraj aplicată (și de construcția sculei) — cu P_0, pentru uzura prin oboseală la șoc și cu P_A, pentru uzura abrazivă (exprimată în %/100) și fiind corelați prin

$$P_0 + P_A = 1. \qquad (1.2)$$

Tabelul 1.2

Forabilitatea rocilor (clasificarea M. M. Protodiakonov)

Categoria (clasa)	Gradul de tărie	Natura rocilor şi a substanţelor minerale utile	*f*
I	Extrem de tari	Cuarţite şi bazalte, cele mai tari şi mai compacte	20
II	Foarte tari	Roci granitice foarte tari, porfire cuarţitice, granite foarte tari, şisturi cuarţitice, cuarţite mai puţin tari, gresii şi calcare foarte tari	15
III	Tari	Granit compact şi roci granitice, calcare şi gresii foarte tari, filoane cuarţitice, conglomerate foarte tari, minereuri de fier foarte tari	10
IIIa		Calcare tari, granit mai slab, gresii şi marmore tari, dolomit, pirite	8
IV	Destul de tari	Gresii normale, minereuri de Fe	6
IVa		Şisturi nisipoase, gresii şistoase	5
V	Semitari	Şist argilos tare, gresii şi calcare mai puţin tari, conglomerate puţin rezistente.	4
Va		Diferite şisturi puţin tari, marnă compactă.	3
VI	Destul de moi	Şist molae, calcar foarte moale, cretă, sare gemă, gips, antracit, marnă obişnuită, gresie alterată, pietriş cimentat.	2
VIa		Teren pietros mai slab, şist alterat, pietriş şi balast, cărbune tare, argilă întărită.	1,5
VII	Moi	Argilă compactă, cărbune moale, teren argilos.	1,0
VIIa		Argilă puţin nisipoasă, loess, pietriş, cărbune sfărîmicios.	0,8
VIII	Pămîntoase	Teren vegetal, turbă, pămînt argilos, nisip umed.	0,6
IX	Dezagregate	Nisip, grohotiş, pămînt de umplutură, cărbune în bucăţi sau dezagregat.	0,5
X	Curgătoare	Nisip curgător, teren mlăştinos, loess, terenuri îmbibate cu apă.	0,3

Prezenta lucrare are ca **obiect studierea indicatorilor** de uzare corelați cu indicatorii **corespunzători de rezistență la uzură** ai sculelor de foraj armate cu carburi metalice **sinterizate (CMS)**, în vederea obținerii de performanțe maxime în exploatare, prin realizarea de dinamici convenabile pentru uzura sculelor.

2. IPOTEZELE DE STUDIU

Pentru definirea corelațiilor și a determinărilor analitice de studiu, se consideră următoarele ipoteze :

I. Nu sînt cunoscute relațiile analitice cantitative ale vitezelor de uzură ale sculelor la dislocarea prin foraj a rocilor, în funcție de toți parametrii de influență și concret pentru fiecare metodă de foraj în parte, astfel încît studierea comportării CMS în exploatare se realizează comparativ, prin intermediul indicatorilor corespunzători de uzare și de rezistență la uzură.

II. Geometria și rezistența generală la solicitările exterioare (de exemplu la încovoiere) ale părții active a sculei sînt adecvate metodei și regimurilor de foraj aplicate, defectarea producîndu-se normal, prin uzarea elementelor din CMS.

III. Metoda și regimurile de foraj folosite permit dislocarea eficientă a rocii respective.

IV. Ponderea medie a uzurii abrazive, din uzura totală, corespunde valorilor din tabelul 2.1, precizia de $\pm$ 5% fiind satisfăcătoare (limitele intervalului de precizie, împreună cu valoarea medie corespunzătoare, se consideră variante de calcul).

Tabelul 2.1

Ponderea tipurilor de uzură

Nr. crt.	Metoda de foraj	Coeficienții de pondere	
		$P_0 \mp 0{,}05$	$P_A \pm 0{,}05$
1	ROTATIV	0,10	0,90
2	PERCUTANT	0,75	0,25
3	ROTOPERCUTANT (axial)	0,50	0,50

V. Capacitatea de uzare prin oboseală la șoc este proporțională cu rezistența la compresiune a rocii (pentru dislocare fiind necesară aplicarea pe sculă a unor sarcini proporționale cu rezistența rocii).

VI. Rocile puțin abrazive și abrazive au o abrazivitate de 25% și respectiv de 50%, în raport cu rocile foarte abrazive.

VII. Raportul dintre cele două capacități de uzare poate avea două valori limită, care constituie variante de calcul. În *varianta a*, capacitatea de uzare abrazivă a rocilor cu abrazivitatea cea mai mare (foarte

abrazive) este aproximativ egală cu capacitatea de uzare prin oboseală, iar în *varianta b* capacitatea de uzare abrazivă a rocilor cu abrazivitatea cea mai mică (puțin abrazive) este aproximativ egală cu capacitatea de uzare prin oboseală. În tabelul 2.2, sînt prezentate clasificarea și simbolizarea rocilor, în funcție de caracteristicile specifice forajului, precum și indicatorii corespunzători ai capacităților de uzare.

Tabelul 2.2

Caracteristicile rocilor

Nr. crt.	Natura ROCII				INDICATORII CAPACITĂȚILOR DE UZARE	
	TĂRIE		ABRAZIVITATE			C_A
	Denumire	f	Denumire	Simbol	C_0	varianta a / varianta b
1	SLABA	<6	PUȚIN ABRAZIVĂ	S	1	0,25 / 1
2			ABRAZIV	Sa		0,5 / 2
3			FOARTE ABRAZIVĂ	SA		1 / 4
4	MEDIE	6...12	PUȚIN ABRAZIVĂ	M	2	0,5 / 2
5			ABRAZIVĂ	Ma		1 / 4
6			FOARTE ABRAZIVĂ	MA		2 / 8
7	TARE	12...18	PUȚIN ABRAZIVĂ	T	3	0,75 / 3
8			ABRAZIVĂ	Ta		1,5 / 6
9			FOARTE ABRAZIVĂ	TA		3 / 12
10	EXTRATARE	>18	PUȚIN ABRAZIVĂ	E	4	1 / 4
11			ABRAZIVĂ	Ea		2 / 8
12			FOARTE ABRAZIVĂ	EA		4 / 16

VIII. Carburile metalice sinterizate existente prezintă valorile limită pentru caracteristicile fizico-mecanice, inclusiv pentru rezistențele la uzură. În tabelul 2.3 și în figura 2.1 sînt date, spre exemplificare, principalele caracteristici ale sortimentelor uzuale de carburi metalice sinterizate, pe bază de carbură de wolfram și cobalt, recomandate pentru utilizarea în foraj [8], observîndu-se că valorile se grupează în două game limită de variație, în raport cu conținutul în cobalt.

Tabelul 2.3

Principalele caracteristici ale CMS [8]

Nr. crt.	Sortiment		Rezistențe, la:			
	Simbol	Conținut mediu în Co., %	Încovoiere σ_i	Compresiune σ_c	Șoc, reziliența Charpy K, in. lbs (J)	Uzura abrazivă R_u, 1/pierdere masă
			1000 PSI (daN/mm²)			
1	268	16	490 (340)	590 (410)	27 (3,05)	3
2	55B*	16	420 (290)	560 (390)	25 (2,85)	3
3	258	13	470 (325)	630 (435)	24 (2,70)	6
4	55A	13	390 (270)	600 (415)	17 (1,90)	4
5	120	12	410 (285)	540 (370)	15 (1,70)	5
6	115	11,5	400 (275)	630 (435)	18 (2,05)	6
7	248*	11	450 (310)	670 (460)	21 (2,40)	7
8	231	10	400 (275)	580 (400)	18 (2,05)	4
9	241	10	400 (275)	610 (420)	17 (1,90)	6
10	90	10	350 (240)	630 (435)	15 (1,70)	7
11	820**	10	450 (310)	750 (520)	15 (1,70)	13
12	779	9	340 (235)	660 (455)	12 (1,35)	10
13	44A	6	320 (220)	750 (520)	12 (1,35)	15
14	883	6	290 (200)	790 (545)	12 (1,35)	35

* utilizate și la sapele cu conuri
** recomandat pentru prelucrări mecanice

IX. Pentru carburile metalice sinterizate utilizabile în foraj, reziliența este proporțională cu rezistența la uzura prin oboseală cu șoc, indiferent de felul solicitărilor la care sînt supuse.

X. Capacitatea rocii de a uza scula de foraj variază invers proporțional cu rezistența la uzură a sculei.

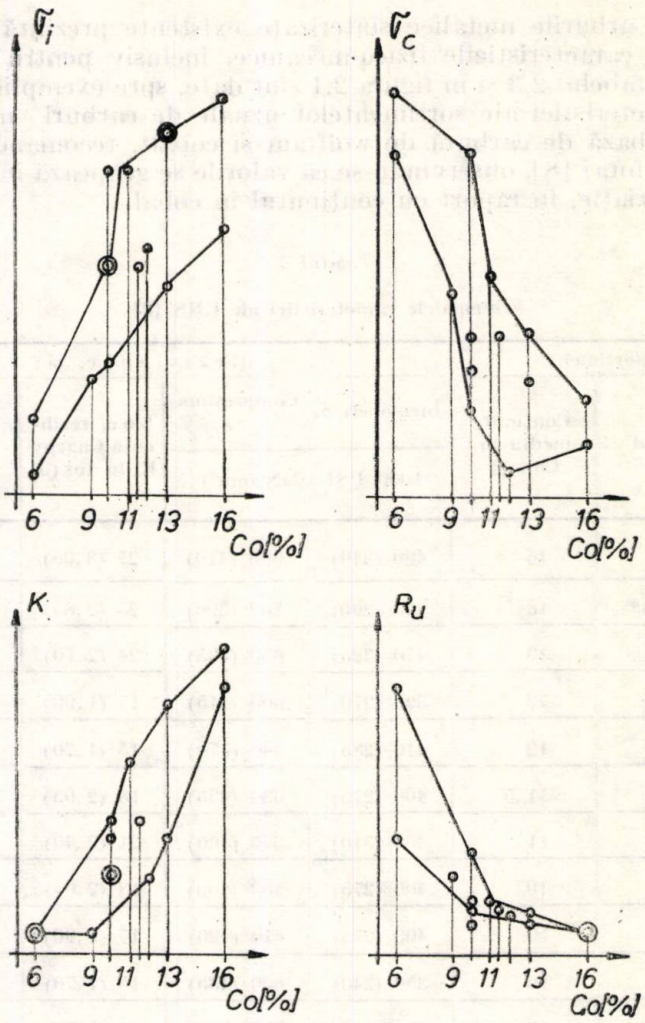


Fig. 2.1

3. CAPACITATEA ROCILOR DE A UZA SCULELE DE FORAJ

Viteza de uzare a sculei (volumul uzat în unitatea de timp) este o funcție de caracteristicele relative ale rocii Q și de parametrii regimului de foraj, presiunea specifică p și viteza v a mișcării relative, dintre sculă și roacă [9], dependență avînd forma generală

$$Y[\text{mm}^3/\text{h}] = Y(Q, p, v). \tag{3.1}$$

Fiecare metodă de foraj are un mecanism propriu (o dinamică) de uzare a sculei, întrucît parametrii regimului de lucru stabilesc de altfel de dependențe — și deci de efecte, pentru fiecare metodă.

Pentru o metodă de foraj definită și aplicînd un anumit regim de lucru într-o rocă dată, uzura medie (fracționară sau totală) devine *indicator de uzare* (*globală*) a sculei, adică

$$u = t \cdot Y, \tag{3.2}$$

caracteristic deci pentru natura rocii respective și pentru metoda de foraj aplicată, în care t [h] este durata de foraj considerată. Indicatorii de uzare u pot fi exprimați în unități de volum, similar relației 3.1, în unități de masă, în unități de lungime corespunzătoare dimensiunii specifice de uzat de exemplu înălțimea plăcuțelor din CMS), în fracțiuni (%) din volumul activ sau din dimensiunea specifică de uzură etc. Pentru simplificarea expunerii, în cele ce urmează nu vor fi specificate unitățile de măsură ale indicatorilor de uzare.

Este evident că, intensificînd regimul de foraj, celelalte condiții (metoda și roca) rămînînd neschimbate, adică de exemplu, mărind presiunea specifică de la p_1 la p_2 și/sau viteza relativă de la v_1 la v_2, indicatorul de uzare va crește, deci

$$u_1 = t \cdot Y_1(Q, p_1, v_1) < u_2 = t \cdot Y_2(Q, p_2, v_2).$$

În această situație, alături de uzarea mai rapidă a sculei, are loc de obicei și creșterea vitezei de foraj, utilizatorul alegîndu-și regimul de lucru optim, conform criteriilor tehnico-economice care se impun.

De asemenea, în scopul obținerii unor performanțe optime, intensificarea regimului este necesară și la scăderea forabilității rocii și/sau la pe măsura uzării sculei, cazuri în care și $Q_2 > Q_1$, rezultînd, cu respectarea semnificațiilor din exemplul de mai sus,

$$u_1' = t \cdot Y_1'(Q_1, p_1, v_1) < u_2' = t \cdot Y_2'(Q_2, p_2, v_2),$$

adică uzura crește de la u_1' la u_2', cînd se păstrează deci constantă numai metoda de foraj utilizată.

Avîndu-se în vedere definițiile anterioare, *indicatorii absoluți de uzare* ai sculei sînt

$$u_0 = P_0 \cdot C_0 \tag{3.3}$$

pentru uzura (parțială) prin oboseală la șoc,

$$u_A = P_A \cdot C_A \tag{3.4}$$

pentru uzura (parțială) abrazivă și, conform relațiilor 1.2 și 3.2,

$$u = u_0 + u_A = P_0 \cdot C_0 + P_A \cdot C_A = C_0 - P_A(C_0 - C_A) = \\ = C_A + P_0(C_0 - C_A) \tag{3.5},$$

pentru uzura globală. Acești indicatori de uzare sînt deci specifici metodei de foraj (implicit și sculei), putînd compara uzurile rezultate, fie la foraje cu regimuri constante, în roci cu aceeași forabilitate dar cu abrazivități diferite, fie la foraje cu regimuri de lucru variabile, în roci cu forabilități și abrazivități diferite.

Pentru uşurarea comparării uzurilor, se iau în consideraţie şi alte categorii de indicatori de uzare, şi anume:

— *indicatorii de pondere ai uzurilor*

$$y_0/\%/100/ = \frac{u_0}{u} = \frac{P_0 \cdot C_0}{P_0 \cdot C_0 + P_A \cdot C_A} = \frac{1}{1 + \frac{P_A \cdot C_A}{P_0 \cdot C_0}} \tag{3.6},$$

pentru uzura prin oboseală la şoc şi

$$y_A/\%/100/ = \frac{u_A}{u} = \frac{P_A \cdot C_A}{P_0 \cdot C_0 + P_A \cdot C_A} = \frac{1}{1 + \frac{P_0 \cdot C_0}{P_A \cdot C_A}} \tag{3.7}$$

pentru uzura abrazivă ($y_0 + y_A = 1$),
care exprimă contribuţia fiecărui tip de uzură, din uzura globală, pentru fiecare caz de foraj în parte,

— *indicatorii rapoartelor ponderilor uzurilor*

$$y_{0A}/\%/100/ = u_0/u_A = y_0/y_A = P_0 \cdot C_0/P_A \cdot C_A, \tag{3.8}$$ şi

$$y_{A0}/\%/100/ = u_A/u_0 = y_A/y_0 = P_A \cdot C_A/P_0 \cdot C_0 \tag{3.9}$$

($y_{0A} = 1/y_{A0}$), exprimînd raportul dintre indicatorii de uzare parţială (sau de pondere ai uzurilor), prin oboseală şi abrazivă, şi respectiv invers,

— *indicatorii relativi ai ponderilor uzurilor*

$$i_{0A} = y_{0A}/(y_{0A})_b \tag{3.10}$$ şi

$$i_{A0} = y_{A0}/(y_{A0})_b \tag{3.11}$$

($i_{0A} = 1/i_{A0}$), precum şi

— *indicatorii relativi de uzare*

$$i_0/\%/100/ = u_0/(u_0)_b \tag{3.12}$$

pentru uzura prin oboseală la şoc,

$$i_A/\%/100/ = u_A/(u_A)_b \tag{3.13}$$

pentru uzura abrazivă şi

$$i/\%/100/ = u/(u)_b \tag{3.14}$$

pentru uzura globală,
în relaţiile 3.10...3.14, definite pentru indicatorii relativi, indicele b corespunzînd indicatorului de uzare considerat ca bază de comparaţie.

Indicatorii de pondere, ai rapoartelor ponderilor şi relativi ai ponderilor uzurilor, bazîndu-se pe valorile indicatorilor absoluţi de uzare, sînt utilizabili în special la studiul influenţei abrazivităţii rocilor, pentru fiecare metodă de foraj aplicată. Valorile acestor indicatori sînt identice, pentru fiecare categorie de abrazivitate a rocilor de aceeaşi forabilitate, indicatorii relativi ai ponderilor uzurilor fiind aceeaşi şi pentru oricare metodă de foraj folosită. Spre exemplificare, pentru forajul în rocile cu forabilitatea medie, în ambele variante de calcul (conform ipotezei VII de studiu), în tabelele 3.1—3.4 şi corespunzător în figurile 3.1—3.6 sînt

Tabelul 3.1

Influența abrazivității, la forajul ROTATIV

Nr. crt.	Categoria de ABRAZIVITATE a ROCII	Valori	Varianta a / Varianta b — Indicatorii de uzare: absoluți u_0	u_A	u	de pondere y_0	y_A	raport pondere y_{0A}	y_{A0}
1.	Puțin abrazivă	limită	0,1	0,475	0,575	0,174	0,826	0,211	4,75
				1,9	2,0	0,05	0,95	0,053	19,0
2.			0,3	0,425	0,725	0,414	0,586	0,708	1,417
				1,7	2,0	0,15	0,85	0,176	5,667
3.		medie	0,2	0,45	0,65	0,308	0,692	0,444	2,25
				1,8	2,0	0,1	0,9	0,111	9,0
4.	Abrazivă	limită	0,1	0,95	1,05	0,095	0,905	0,105	5,5
				3,8	3,9	0,026	0,974	0,026	38,0
5.			0,3	0,85	1,15	0,261	0,739	0,353	2,833
				3,4	3,7	0,081	0,919	0,088	11,333
6.		medie	0,2	0,9	1,1	0,182	0,818	0,222	4,5
				3,6	3,8	0,053	0,947	0,056	18,0
7.	Foarte abrazivă	limită	0,1	1,9	2,0	0,05	0,95	0,053	19,0
				7,6	7,7	0,013	0,987	0,013	76,0
8.			0,3	1,7	2,0	0,15	0,85	0,176	5,667
				6,8	7,1	0,042	0,958	0,044	22,667
9.		medie	0,2	1,8	2,0	0,1	0,9	0,111	9,0
				7,2	7,4	0,027	0,973	0,028	36,0

Tabelul 3.2

Influența abrazivității, la forajul PERCUTANT

Nr. crt.	Categoria de ABRAZIVITATE a ROCII	Valori	Varianta a / Varianta b — Indicatorii de uzare: absoluți u_0	u_A	u	de pondere y_0	y_A	raport pondere y_{0A}	y_{A0}
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Puțin abrazivă	limită	1,6	0,1	1,7	0,941	0,059	16,0	0,062
				0,4	2,0	0,8	0,2	4,0	0,25
2.			1,4	0,15	1,55	0,903	0,097	9,333	0,107
				0,6	2,0	0,7	0,3	2,333	0,429
3.		medie	1,5	0,125	1,165	0,923	0,077	12,0	0,083
				0,5	2,0	0,75	0,25	3,0	0,333

Tabelul 3.2 (continuare)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4.	Abraziv	limită	1,6	0,2 / 0,8	1,8 / 2,4	0,889 / 0,667	0,111 / 0,333	8,0 / 2,0	0,125 / 0,5
5.			1,4	0,3 / 1,2	1,7 / 2,6	0,824 / 0,538	0,176 / 0,462	4,667 / 1,667	0,214 / 0,857
6.		medie	1,5	0,25 / 1,0	1,75 / 2,5	0,857 / 0,6	0,143 / 0,4	6,0 / 1,5	0,167 / 0,667
7.	Foarte abraziv	limită	1,6	0,4 / 1,6	2,0 / 3,2	0,8 / 0,5	0,2 / 0,5	4,0 / 1,0	0,25 / 1,0
8.			1,4	0,6 / 2,4	2,0 / 3,8	0,7 / 0,368	0,3 / 0,632	2,333 / 0,583	0,429 / 1,714
9.		medie	1,5	0,5 / 2,0	2,0 / 3,5	0,75 / 0,429	0,25 / 0,571	3,0 / 0,75	0,333 / 1,333

Tabelul 3.3

Influenţa abrazitivităţii, la forajul ROTOPERCUTANT (axial)

Nr. crt.	Categoria de ABRAZIVITATE a ROCII	Valori	Varianta a / Varianta b						
			Indicatorii de uzare:						
			absoluţi			de pondere		raport pondere	
			u_0	u_A	u	y_0	y_A	y_{0A}	y_{A0}
1.	Puţin abraziv	limită	1,1	0,225 / 0,9	1,325 / 2,0	0,83 / 0,55	0,17 / 0,45	4,889 / 1,222	0,205 / 0,818
2.			0,9	0,275 / 1,1	1,175 / 2,0	0,766 / 0,45	0,234 / 0,55	3,273 / 0,818	0,306 / 1,222
3.		medie	1,0	0,25 / 0,1	1,25 / 2,0	0,8 / 0,5	0,2 / 0,5	4,0 / 1,0	0,25 / 1,0
4.	Abraziv	limită	1,1	0,45 / 1,8	1,55 / 2,9	0,71 / 0,379	0,29 / 0,621	2,444 / 0,611	0,409 / 1,636
5.			0,9	0,55 / 2,2	1,45 / 3,1	0,621 / 0,29	0,379 / 0,71	1,636 / 0,409	0,611 / 2,444
6.		medie	1,0	0,5 / 2,0	1,5 / 3,0	0,667 / 0,333	0,333 / 0,667	2,0 / 0,5	0,5 / 2,0
7.	Foarte abraziv	limită	1,1	0,9 / 3,6	2,0 / 4,7	0,55 / 0,234	0,45 / 0,766	1,222 / 0,306	0,818 / 3,273
8.			0,9	1,1 / 4,4	2,0 / 5,3	0,45 / 0,17	0,55 / 0,83	0,818 / 0,205	1,222 / 4,889
9.		medie	1,0	1,0 / 4,0	2,0 / 5,0	0,5 / 0,2	0,5 / 0,8	1,0 / 0,25	1, / 4,

Tabelul 3.4

Indicatorii relativi ai ponderilor uzurilor

Nr. crt.	Categoria de ABRAZIVITATE a ROCII	i_A		i_A	
1.	Puțin abrazivă	1	4,0	1	0,25
2.	Abrazivă	0,5	2,0	2,0	0,5
3.	Foarte abrazivă	0,25	1	4,0	1

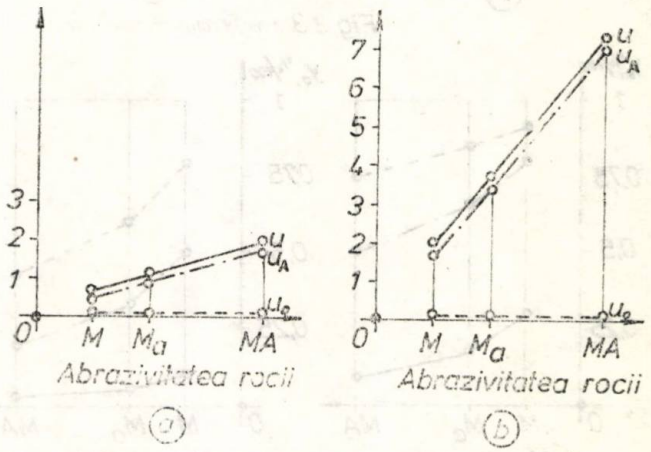


Fig. 3.1 (forajul rotativ)

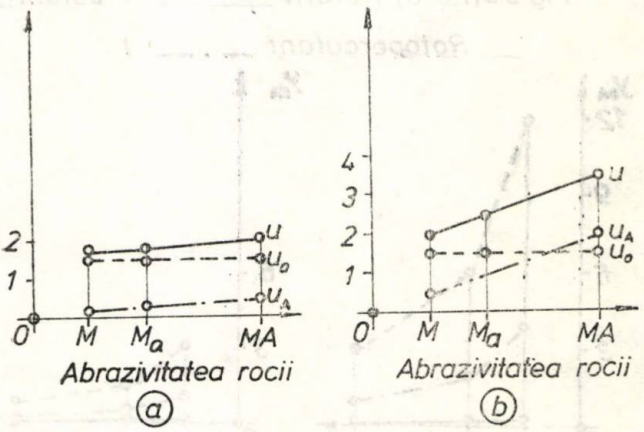


Fig. 3.2 (forajul percutant)

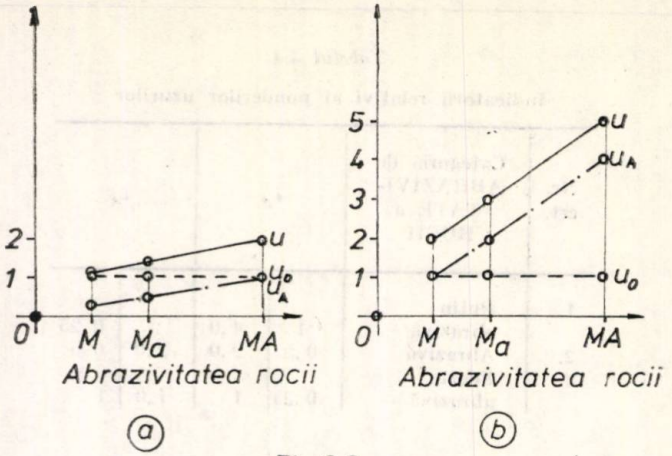


Fig. 3.3 (forajul rotopercutant axial)

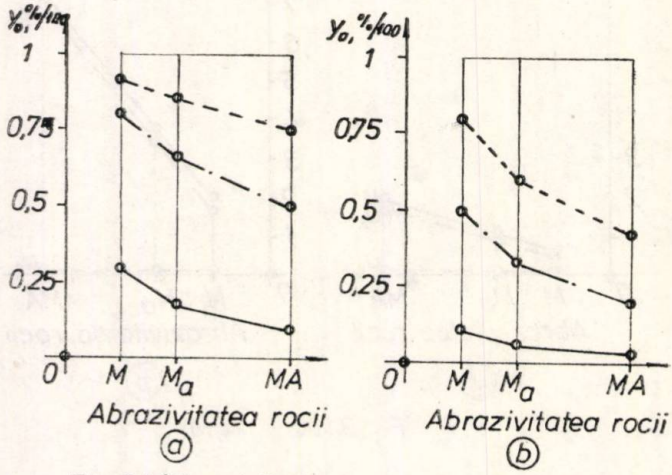


Fig. 3.4 (Foraj: Rotativ _____ , Percutant _ _ _ ,
Rotopercutant _ . _)

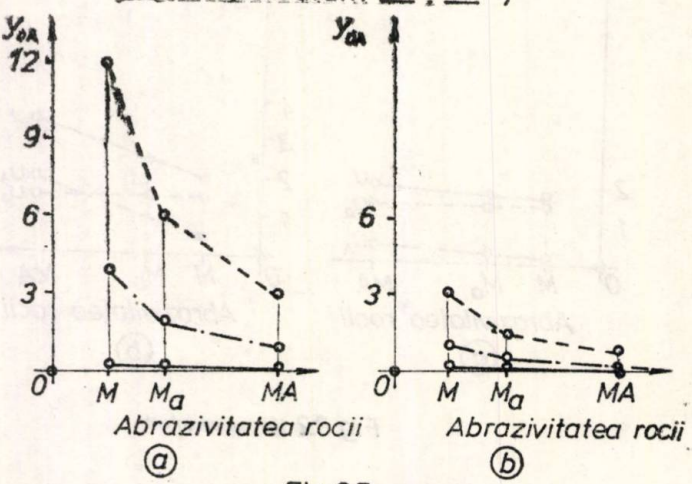


Fig. 3.5
(foraj rotativ _____ percutant _ _ _ _ rotopercutant axial _ . _)

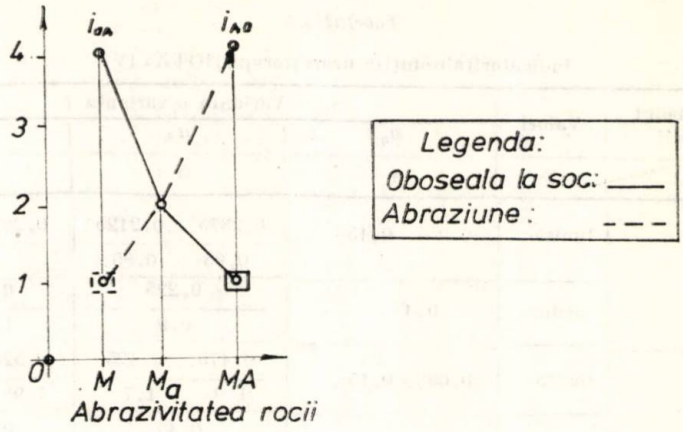


Fig.3.6

prezentate variațiile indicatorilor absoluți, de pondere, ai rapoartelor de pondere și relativi ai ponderilor uzurilor, în funcție de abrazivitatea rocilor, pentru fiecare metodă de lucru posibil de aplictat (amplasarea simbolizării din abscisă corespunde valorilor indicatorilor C_A, din tabelul 2.2).

Se constată, așa cum era de prevăzut, că metodele de foraj rotativ și percutant constituie limite ale influențelor tipurilor de uzură. În forajul rotativ predomină uzura abrazivă, a cărei pondere ajunge pînă la 85... ...97% în rocile foarte abrazive, iar în forajul percutant uzura prin oboseală cu șoc are, de regulă, valorile cele mai mari, ajungînd la ponderi de 70...94% în rocile puțin abrazive. În forajul rotopercutant (axial), oricare din cele două tipuri de uzură poate fi reprezentativ, în funcție de valoarea abrazivității rocilor. Conform ipotezelor făcute, indiferent de metodă de foraj sau de variantele de calcul considerate, valoarea uzurii prin oboseală crește de patru ori în raport cu uzura abrazivă. la forajul în rocile puțin abrazive, în comparație cu rocile foarte abrazive, și invers.

Indicatorii relativi de uzare permit compararea directă a uzurilor rezultate la aplicarea unei anumite metode de foraj, în roci de aceeași forabilitate, dar cu abrazivități diferite (deci cu regimuri de lucru constante) sau în roci cu forabilități și abrazivități diferite (deci cu regimuri de lucru variabile), precum și compararea indirectă a uzurilor rezultate din aplicarea celor trei metode de foraj considerate. Plecîndu-se de la valorile indicatorilor absoluți de uzare, determinați pentru fiecare categorie de rocă, tabelele 3.5—3.7 și figurile 3.7—3.9, în tabelul 3.8 și figurile 3.10—3.12 sînt prezentați indicatorii relativi pentru uzurile parțiale i_0 și i_A, respectiv pentru uzurile globale i, luîndu-se ca bază de comparație rocile slabe și puțin abrazive. Se observă că rocile extratari și foarte abrazive uzează mai mult de patru ori, prin oboseală cu șoc și de șaisprezece ori abraziv, uzurile globale crescînd corespunzător aproximativ de 12... ...14 ori în forajul rotativ, față de numai 5...7 ori în forajul percutant, forajul rotopercutant (axial) constituind cazul intermediar, în care uzurile globale cresc de 6...10 ori. Considerațînd domeniul de utilizare uzual

Tabelul 3.5

Indicatorii absoluți de uzare (forajul ROTATIV)

Nr. crt.	Simbolul rocii	Valori	Varianta *a*/varianta *b*		
			u_0	u_A	u
1	2	3	4	5	6
1	S	limită	0,05...0,15	0,2375...0,2125 0,95 ...0,85	0,2875...0,3625 1,0
		medie	0,1	0,225 0,9	0,325 1,0
2	Sa	limită	0,05...0,15	0,475...0,425 1,9 ...1,7	0,525...0,575 1,95 ...1,85
		medie	0,1	0,45 1,8	0,55 1,9
3	SA	limită	0,05...0,15	0,95 ...0,85 3,8 ...3,4	1,0 3,85 ...3,55
		medie	0,1	0,9 3,6	1,0 3,7
4	M	limită	0,1 ...0,3	0,475 ...0,425 1,9 ...1,7	0,575...0,725 2,0
		medie	0,2	0,45 1,8	0,65 2,0
5	Ma	limită	0,1 ...0,3	0,95 ...0,85 3,8 ...3,4	1,05 ...1,15 3,9 ...3,7
		medie	0,2	0,9 3,6	1,1 3,8
6	MA	limită	0,1 ...0,3	1,9 ...1,7 7,6 ...6,8	2,0 7,7...7,1
		medie	0,2	1,8 7,2	2,0 7,4
7	T	limită	0,15...0,45	0,7125...0,6375 2,85 ...2,55	0,8625...1,0875 3,0
		medie	0,3	0,675 2,7	0,975 3,0
8	Ta	limită	0,15...0,45	1,425...1,275 5,7 ...5,1	1,575 ...1,725 5,85 ...5,55
		medie	0,3	1,35 5,4	1,65 5,7
9	TA	limită	0,15...0,45	2,85 ...2,55 11,4 ...10,2	3,0 11,55 ...10,65
		medie	0,3	2,7 10,8	3,0 11,1

Tabelul 3.5 (continuare)

1	2	2	4	5	6
10	E	limită	0,2 ...0,6	0,95 ...0,85 3,8 ...3,4	1,15 ...1,45 4,0
		medie	0,4	0,9 3,6	1,3 4,0
11	Ea	limită	0,2 ...0,6	1,9 ...1,7 7,6 ...6,8	2,1 ...2,3 7,8 ...7,4
		medie	0,4	1,8 7,2	2,2 7,6
12	EA	limită	0,2 ...0,6	3,8 ...3,4 5,2 ...13,6	4,0 5,4 ...14,2
		medie	0,4	3,6 14,4	4,0 14,8

Tabelul 3.6

Indicatorii absoluţi de uzare (forajul PERCUTANT)

Nr. crt.	Simbolul rocii	Valori	Varianta a / varianta b		
			u_0	u_A	u
1	2	3	4	5	6
1	S	limită	0,7 ...0,8	0,075 ...0,050 0,3 ...0,2	0,775 ...0,850 1,0
		medie	0,75	0,0625 0,25	0,8125 1,0
2	Sa	limită	0,7 ...0,8	0,15 ...0,10 0,6 ...0,4	0,85 ...0,90 1,3 ...1,2
		medie	0,75	0,125 0,5	0,875 1,25
3	SA	limită	0,7 ...0,8	0,3 ...0,2 1,2 ...0,8	1,0 1,9...1,6
		medie	0,75	0,25 1,0	1,0 1,75
4	M	limită	1,4 ...1,6	0,15 ...0,10 0,6 ...0,4	1,55 ...1,70 2,0
		medie	1,5	0,125 0,5	1,625 2,0

Tabelul 3.6 (continuare)

1	2	3	4	5	6
5	Ma	limită	1,4 ...1,6	0,30 ...0,20 1,2 ...0,8	1,70 ...1,80 2,6 ...2,4
		medie	1,5	0,25 1,0	1,75 2,5
6	MA	limită	1,4 ...1,6	0,60 ...0,40 2,4 ...1,6	2,0 3,8 ...3,2
		medie	1,5	0,5 2,0	2,0 3,5
7	T	limită	2,1 ...2,4	0,225 ...0,150 0,9 ...0,6	2,325 ...2,550 3,0
		medie	2,25	0,1875 0,75	2,4375 3,0
8	Ta	limită	2,1 ...2,4	0,45 ...0,30 1,8 ...1,2	2,55 ...2,70 3,9 ...3,6
		medie	2,25	0,375 1,5	2,625 3,75
9	TA	limită	2,1 ...2,4	0,9 ...0,6 3,6 ...2,4	3,0 5,6 ...4,8
		medie	2,25	0,75 3,0	3,0 5,25
10	E	limită	2,8 ...3,2	0,3 ...0,2 1,2 ...0,8	3,1 ...3,4 4,0
		medie	3,0	0,25 1,0	3,25 4,0
11	Ea	limită	2,8 ...3,2	0,6 ...0,4 2,4 ...1,6	3,4 ...3,6 5,2 ...4,8
		medie	3,0	0,5 2,0	3,5 5,0
12	EA	limită	2,8 ...3,2	1,2 ...0,8 4,8 ...3,2	4,0 7,6 ...6,4
		medie	3,0	1,0 4,0	4,0 7,0

Tabelul 3.7

Indicatorii absoluți de uzare (forajul ROTOPERCUTANT-axial)

Nr. crt.	Simbolul rocii	Valori	Varianta a / varianta b		
			u_0	u_A	u
1	S	limită	0,45...0,55	0,1375...0,1125 0,55 ...0,45	0,5875...0,6625 1,0
		medie	0,5	0,125 0,5	0,625 1,0
2	Sa	limită	0,45...0,55	0,275 ...0,225 1,1 ...0,9	0,725 ...0,775 1,55 ...1,45
		medie	0,5	0,25 1,0	0,75 1,5
3	SA	limită	0,45...0,55	0,55 ...0,45 2,2 ...1,8	1,0 2,65 ...2,35
		medie	0,5	0,5 2,0	1,0 2,5
4	M	limită	0,9 ...1,1	0,275 ...0,225 1,1 ...0,9	1,175 ...1,325 2,0
		medie	1,0	0,25 1,0	1,25 2,0
5	Ma	limită	0,9 ...1,1	0,55 ...0,45 2,2 ...1,8	1,45 ...1,55 3,1 ...2,2
		medie	1,0	0,5 2,0	1,5 3,0
6	MA	limită	0,9 ...1,1	1,1 ...0,9 4,4 ...3,6	2,0 5,3 ...4,7
		medie	1,0	1,0 4,0	2,0 5,0
7	T	limită	1,35...1,65	0,4125...0,3375 1,65 ...1,35	1,7625...1,9875 3,0
		medie	1,5	0,375 1,5	1,875 3,0
8	Ta	limită	1,35...1,65	0,825 ...0,675 3,3 ...2,7	2,175 ...2,325 4,65 ...4,35
		medie	1,5	0,75 3,0	2,25 4,5
9	TA	limită	1,35...1,65	1,65 ...1,35 6,6 ...5,4	3,0 7,95 ...7,05
		medie	1,5	1,5 6,0	3,0 7,5
10	E	limită	1,8 ...2,2	0,55 ...0,45 2,2 ...1,8	2,35 ...2,65 4,0
		medie	2,0	0,5 2,0	2,5 4,0
11	Ea	limită	1,8 ...2,2	1,1 ...0,9 4,4 ...3,6	2,9 ...3,1 6,2 ...5,8
		medie	2,0	1,0 4,0	3,0 6,0
12	EA	limită	1,8 ...2,2	2,2 ...1,8 8,8 ...7,2	4,0 10,6 ...9,4
		medie	2,0	2,0 8,0	4,0 10,0

Tabelul 3.8

Indicatorii relativi de utare (valori medii)

Nr. crt.	Simbol ROCA	Varianta a / Varianta b															
		METODA DE FORAJ															
		ROTATIV			PERCUTANT						ROTOPERCUTANT (axial)						
		i_0	i_A	i	i_0		i_A		i		i_0		i_A		i		
1	S		1	1			1		1				1		1		
2	Sa	1	2	1,69/1,9	1	—	2	—	1,08/1,25	—	1	—	2	—	1,2/1,5	—	
3	SA		4	3,08/3,7			4		1,23/1,75				4		1,6/2,5		
4	M		2	2,0/2,0			2	1	2,0/2,0	1			2	1	2,0/2,0	1	
5	Ma	2	4	3,38/3,8	2	1	4	2	2,15/2,5	1,08/1,25	2	1	4	2	2,4/3,0	1,2/1,5	
6	MA		8	6,15/7,4			8	4	2,46/3,5	1,23/1,75			8	4	3,2/5,0	1,6/2,5	
7	T		3	3,0/3,0			3	1,5	3,0/3,0	1,5/1,5			3	1,5	3,0/3,0	1,5/1,5	
8	Ta	3	6	5,08/5,7	3	1,5	6	3	3,23/3,75	1,62/1,875	3	1,5	6	3	3,6/4,5	1,8/2,25	
9	TA		12	9,23/11,1			12	6	3,69/5,25	1,85/2,625			12	6	4,8/7,5	2,4/3,75	
10	E		4	4,0/4,0			4	2	4,0/4,0	2,0/2,0			4	2	4,0/4,0	2,0/2,0	
11	Ea	4	8	6,77/7,6	4	2	8	4	4,31/5,0	2,15/2,5	4	2	8	4	4,8/6,0	2,4/3,0	
12	EA		16	12,31/14,4			16	8	4,92/7,0	2,46/3,5			16	8	6,4/10,0	3,2/5,0	

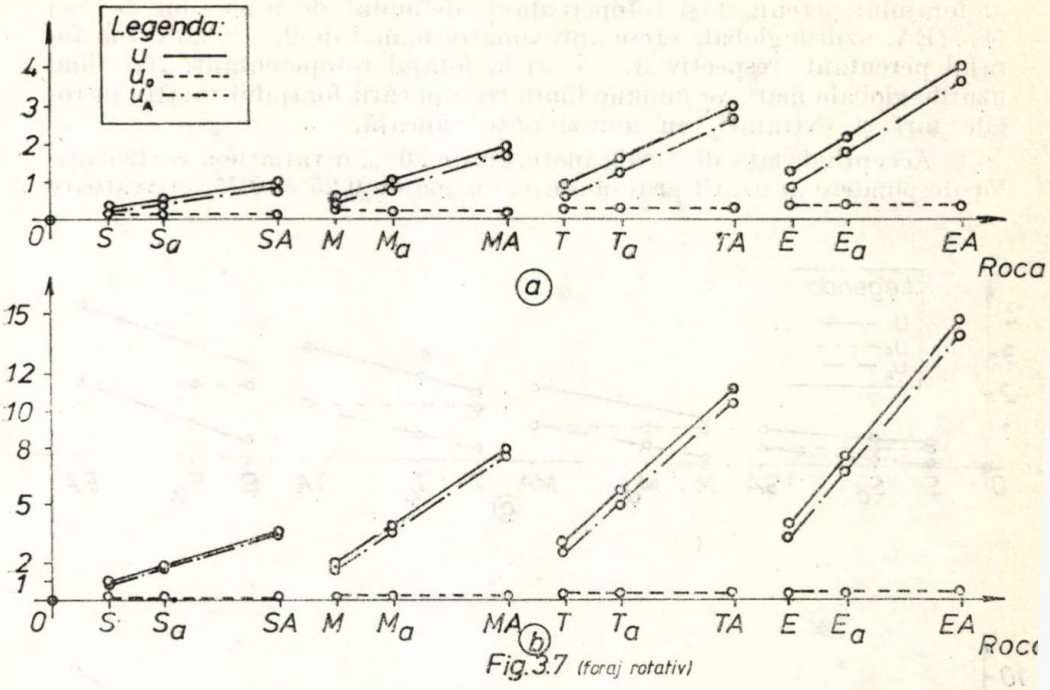


Fig.3.7 (foraj rotativ)

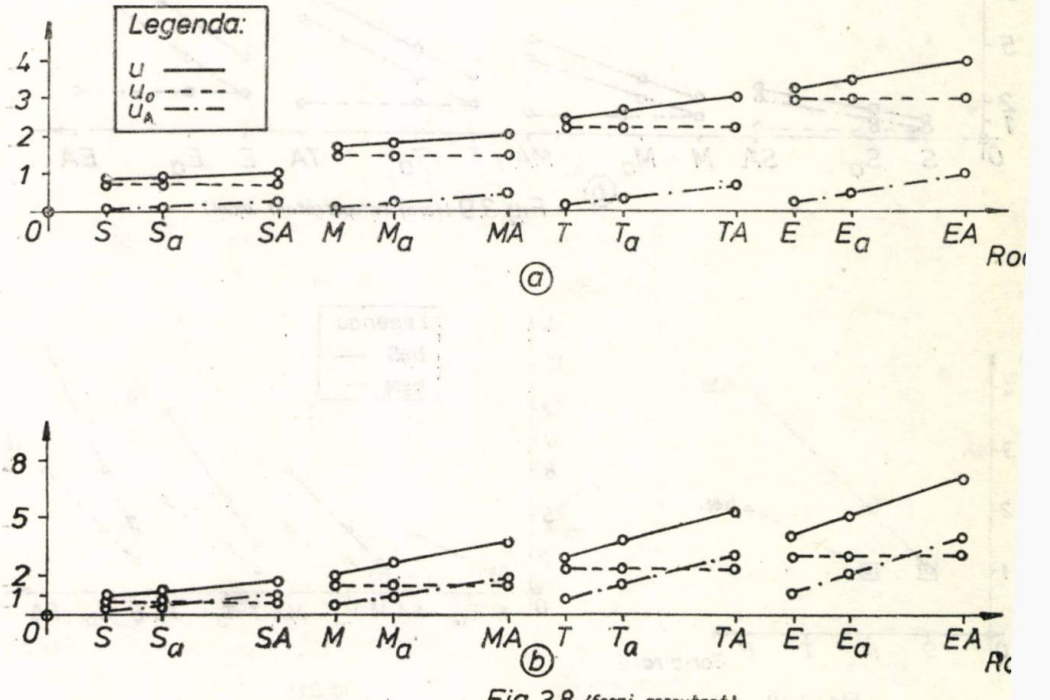
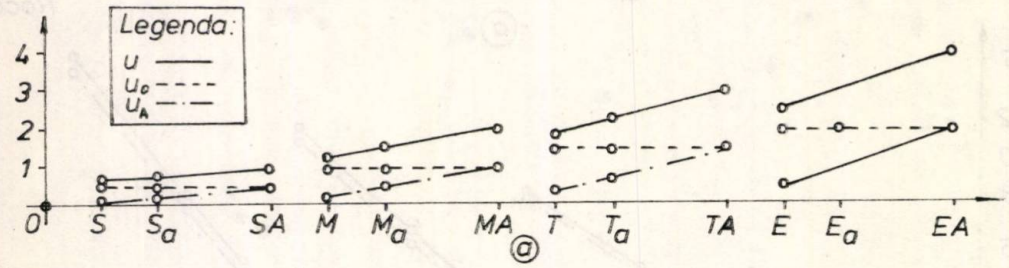


Fig.3.8 (foraj percutant)

al forajului percutant și rotopercutant, delimitat de intervalul de roci M...EA, uzurile globale cresc aproximativ numai de 2,5...3,5 ori la forajul percutant, respectiv 3...5 ori la forajul rotopercutant. Dat fiind uzurile globale mari, se impune limitarea aplicării forajului rotativ în rocile tari și extratari, cu abrazivitate ridicată.

Acceptînd, față de media ipotetică de 50%, o variație a coeficienților de pondere ai uzurii prin oboseală cu șoc de 0.25...0.75, crescătoare



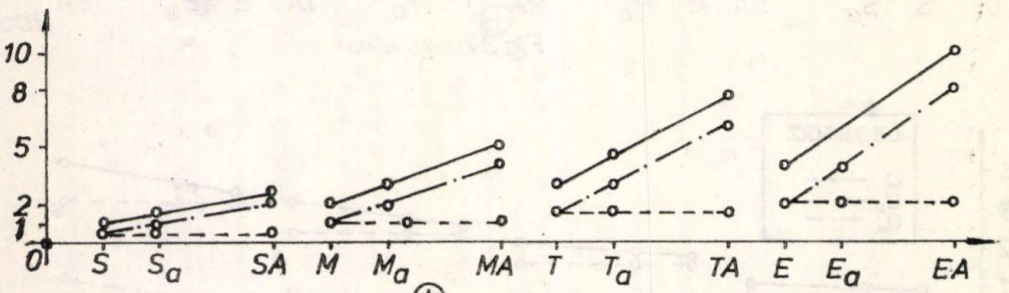


Fig. 3.9 (foraj rotopercutant axial)

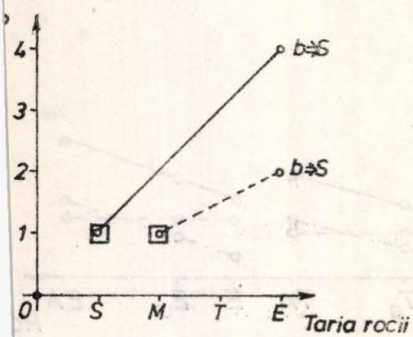


Fig. 3.10

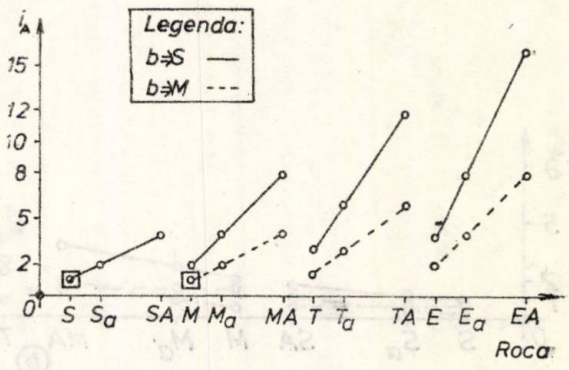
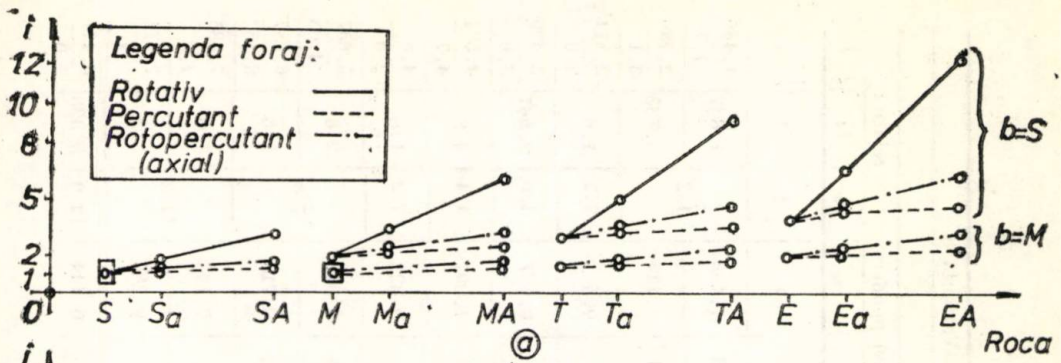
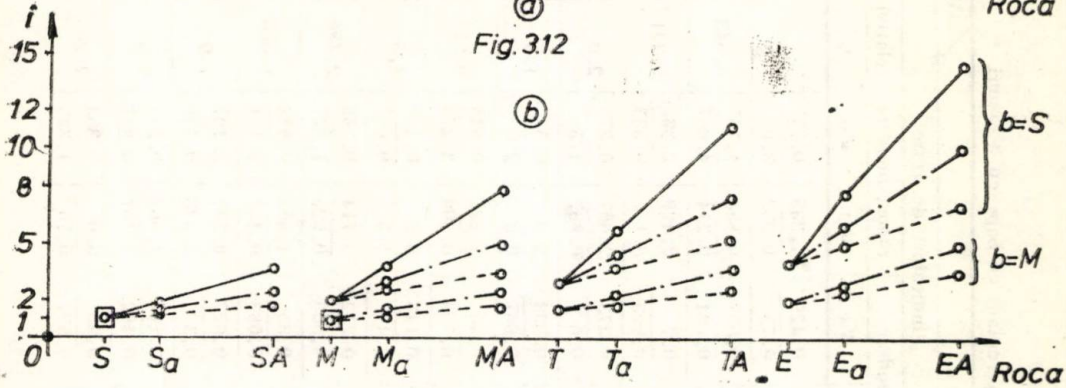


Fig. 3.11

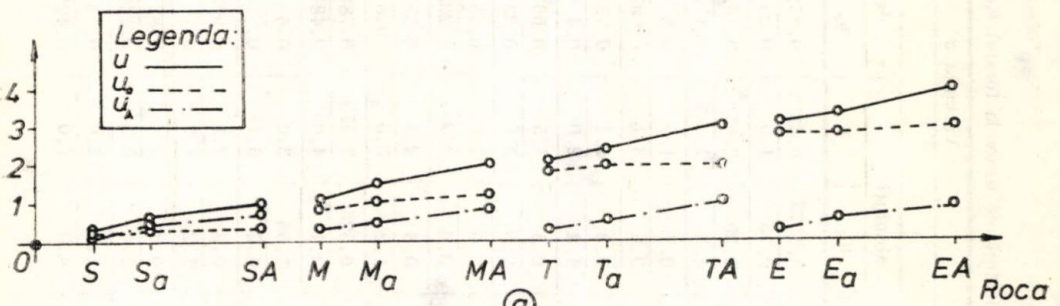


ⓐ

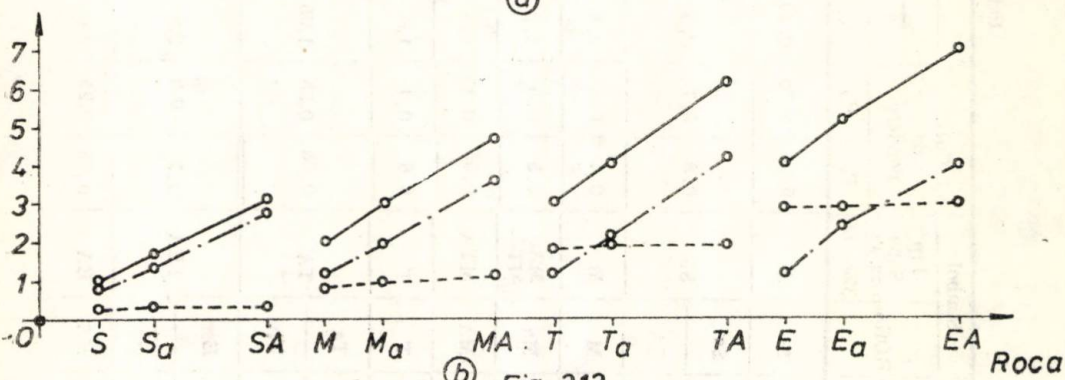
Fig. 3.12



ⓑ



ⓐ

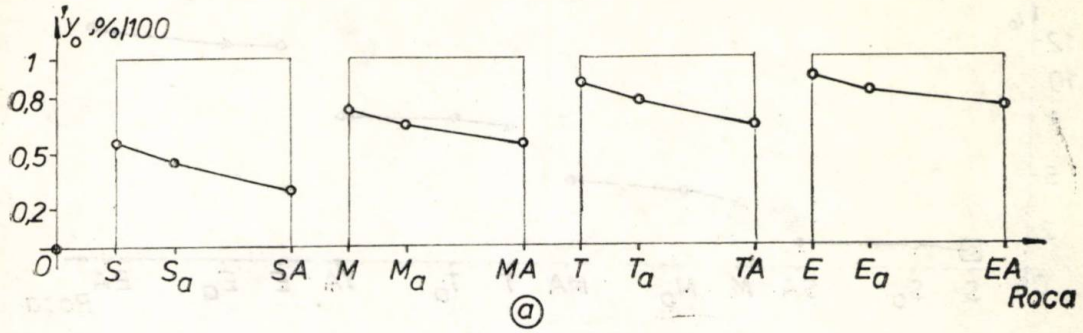


ⓑ Fig. 3.13

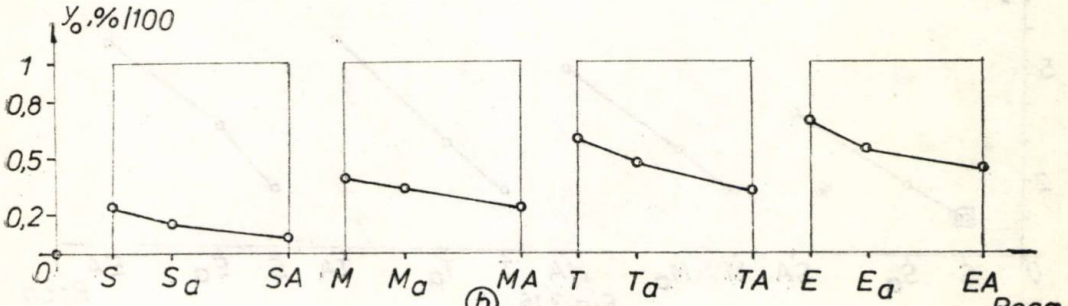
Tabelul 3.9

Indicatorii de uzare la forajul Rotopercutant cu Sape cu 3 Conuri

Nr. crt.	Simbol ROCA	Simbol Tip Sapa STAS 328–80	Coef. de pondere P_0	Coef. de pondere P_A	Varianta a / Variănta b — Indicatorii de uzare: absoluţi u_0	absoluţi u_A	absoluţi u	de pondere y_0	de pondere y_A	raport pondere y_{0A}	raport pondere y_{A0}	relativi pondere i_{0A}	relativi pondere i_{A0}	relativi i_0	relativi i_A	relativi i
1	S	S	0,25	0,75	0,25	0,1875 0,75	0,4375 1,0	0,571 0,25	0,429 0,75	1,333 0,333	0,75 3,0	1	1	1	1	1
2	Sa	SM	0,3	0,7	0,3	0,35 1,4	0,65 1, 7	0,462 0,176	0,538 0,824	0,858 0,214	1,167 4,667	0,643	1,155	1,2	1,867	1,486 1,7
3	SA					0,7 2,8	1,0 3,1	0,3 0,097	0,7 0,903	0,429 0,107	2,333 9,333	0,321	3,115		3,733	2,286 3,1
4	M	M	0,4	0,6	0,8	0,3 1,2	1,1 2,0	0,727 0,4	0,273 0,6	2,667 0,667	0,375 1,5	2,0	0,5	3,2	1,6	2,514 2,0
5	Ma	MA, MT	0,5	0,5	1,0	0,5 2,0	1,5 3,0	0,667 0,333	0,333 0,667	2,0 0,5	0,5 2,0	1,5	0,667	4,0	2,667	3,429 3,0
6	MA	MTA	0,55	0,45	1,1	0,9 3,6	2,0 4,7	0,55 0,235	0,45 0,766	1,222 0,306	0,818 3,273	0,917	1,091	4,4	4,8	4,571 4,7
7	T	T	0,6	0,4	1,8	0,3 1,2	2,1 3,0	0,857 0,6	0,143 0,4	6,0 1,5	0,167 0,667	4,5	0,221	7,2	1,6	4,8 3,0
8	Ta	TA	0,65	0,35	1,95	0,525 2,1	2,475 4,05	0,788 0,481	0,212 0,509	3,714 0,929	0,269 1,077	2,786	0,359	7,8	2,8	5,657 4,05
9	TA					1,05 4,2	3,0 6,15	0,65 0,317	0,35 0,683	1,855 0,464	0,538 2,154	1,393	0,718		5,6	6,857 6,15
10	E	TEA	0,7	0,3	2,8	0,3 1,2	3,1 4,0	0,903 0,7	0,097 0,3	9,333 2,333	2,107 0,429	7,0	0,143	11,2	1,6	7,086 4,0
11	Ea					0,6 2,4	3,4 5,2	0,824 0,538	0,176 0,462	4,667 1,167	0,214 0,857	3,5	0,286		3,2	7,771 5,2
12	EA	EA	0,75	0,25	3,0	1,0 4,0	4,0 7,0	0,75 0,429	0,25 0,571	3,0 0,75	0·333 1,333	2,25	0,444	12,0	5,333	9,147 7,0



ⓐ



ⓑ

Fig. 3.14

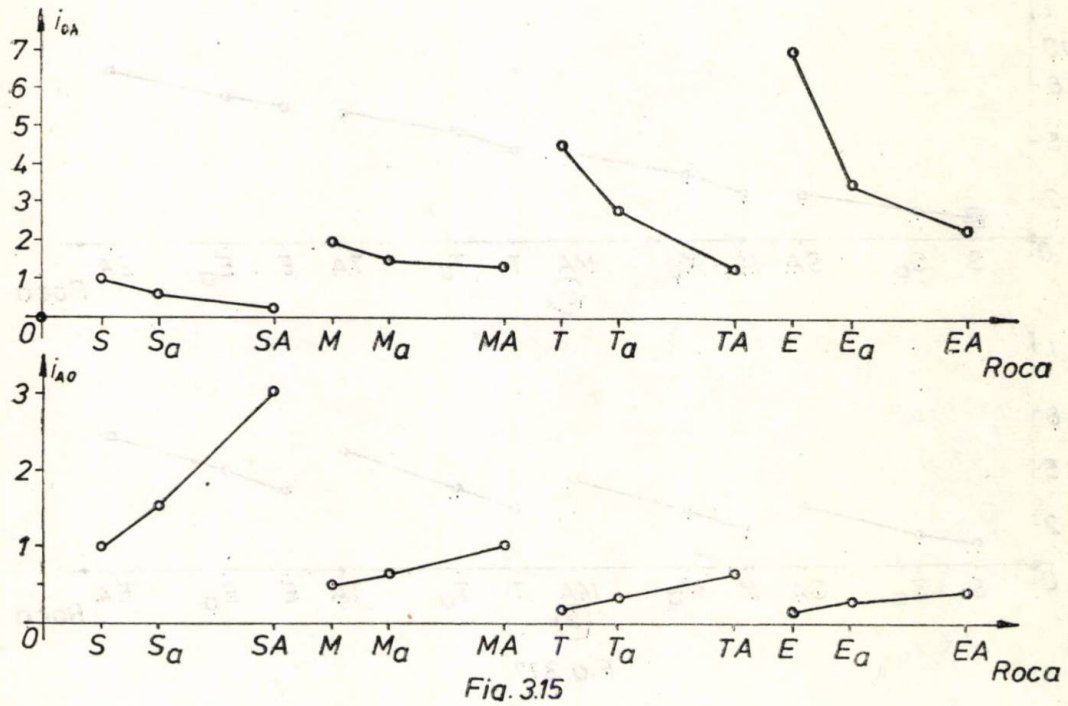


Fig. 3.15

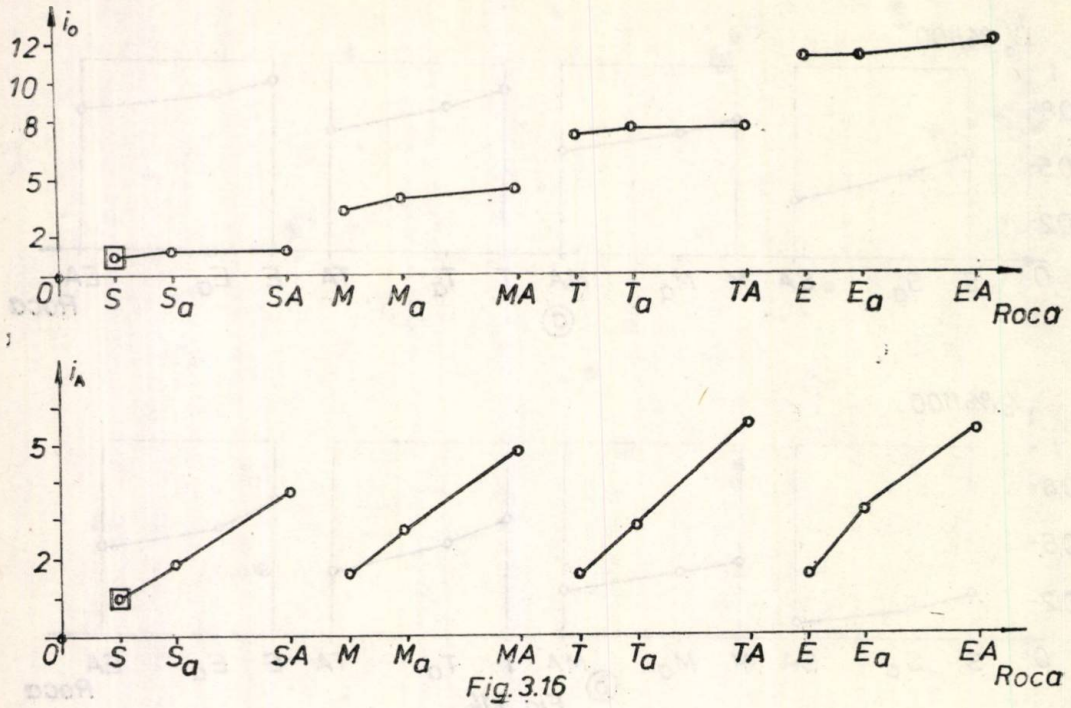


Fig. 3.16

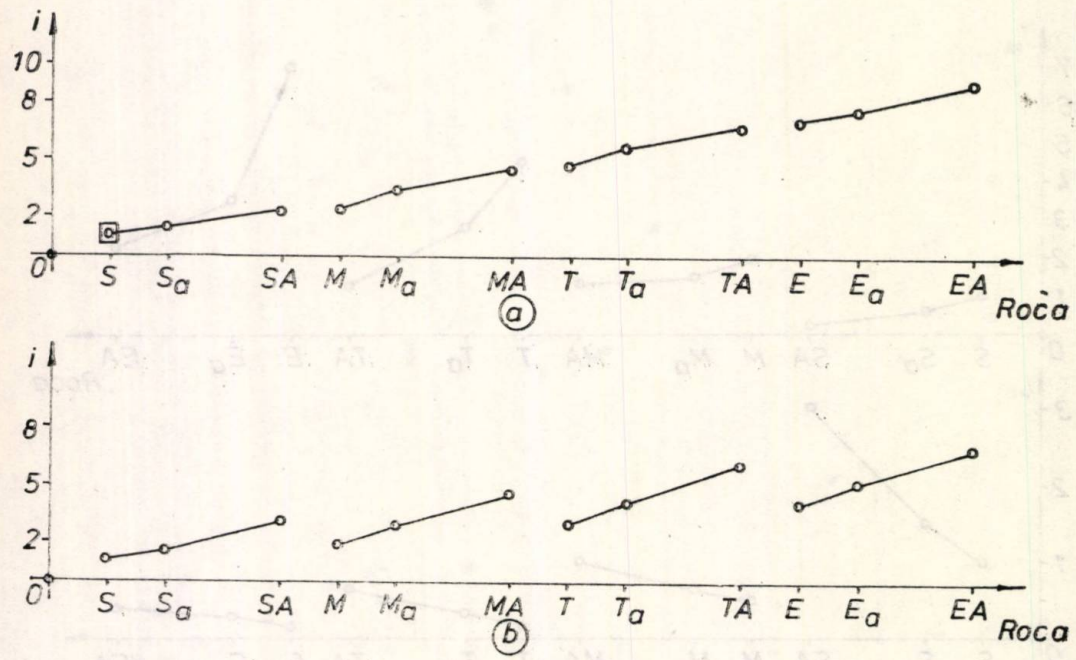


Fig. 3.17

de la rocile slabe spre cele extratari, dat fiind condiţiile cinematice de funcţionare cu alunecări parţiale ale elementelor active în contact cu roca, indicatorii de uzare la forajul rotopercutant cu sape cu trei conuri (apreciaţi ca similari, în medie şi la forajul cu cuţite pentru combinele miniere) sînt calculaţi în tabelul 3.9 şi în figurile 3.13—3.17, constatîndu-se variaţii ale uzurii globale de pînă la 7...9 ori.

Primit la redacţie la 9 octombrie 1985

BIBLIOGRAFIE

1. * * * STAS 7476-83, *Capete detaşabile armate cu plăcuţe din carburi metalice.*
2. * * * STAS 2519-85, *Sfredele monobloc pentru forarea percutantă.*
3. * * * STAS 328-80, *Sape cu trei conuri. Tipodimensiuni.*
4. D. CONSTANTINESCU şi N. V. MEREANU, *Sape de foraj.* E. T., Bucureşti, 1976.
5. * * * *Rock drilling data,* Padley and Venables Limited (agendă de foraj).
6. * * * *Barrenas hexagonales de percusion,* Fabryka Sprzetu i Navzedzi. Gorniczych, Kopex, Polonia, 1978.
7. LARSEN-BASSE, J., *Wear of hard-metals in Rock Drilling,* Powder Metalurgy, No. 31 (1973).
8. * * * *Typical values for the properties of Carboloy cemented Carbides.*
9. D. CONSTANTINESCU, *Contribuţii la studiul durabilităţii şi uzurii sapelor cu tăiş fix cu inserţii din metal dur sinterizat,* IPGG, Bucureşti, 1971.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

INDEX ALFABETIC

	Nr.	Pag.
ANGHEL, AL., v. POSEA, N.	2	142
ANGHEL, AL., v. GRIGORE, N.	4	336
AVRAM, L., v. CÎRTOAJE, V.	5	499
BALAR, M., v. ȚOPA, N.	4	388
BENA, D., Mișcări de circulație ale fluidelor compresibile în jurul cercului unitate. Calculul numerelor Mach critice	1	22
BLUMENFELD, M., CONSTANTIN, N., SOBEC, M., GĂVAN, M., Studiul tensiunilor în zona supapei de evacuare a unui compresor de înaltă presiune, efectuat cu metoda elementelor finite, prin substructurare	5	507
BĂGNARU, D., v. BUCULEI, M.	2	189
BRATU, P., v. ENE, GH.	1	46
BUCȘĂ, GH., v. DIMOFTE, FL.	1	68
BUCȘĂ, GH., v. DIMOFTE, FL.	3	304
BUCULEI, M., BĂGNARU, D., Contribuții la analiza cinetoelastică a mecanismelor plane pe modele cu număr finit de grade de libertate	2	189
CĂPITANU, L., ȘERBAN, GH., Încercarea de anduranță a alternatoarelor și regulatoarelor auto	1	83
CÎRTOAJE, V., AVRAM, L., Calculul eforturilor axiale la prinderea în pene a garniturii de foraj	5	499
CONSTANTIN, N., v. BLUMENFELD, M.	5	507
CONSTANTINESCU, D., Contribuții la utilizarea carburilor metalice sinterizate în foraj. I.	6	584
DIMOFTE, FL., NEDELCU, ȘT., BUCȘĂ, GH., Cercetări teoretice privind determinarea caracteristicilor funcționale ale lagărelor aerostatice	1	68
DIMOFTE, FL., BUCȘĂ, GH., Cercetări experimentale privind influența abaterilor macrogeometrice asupra caracteristicilor statice și dinamice ale lagărelor aerostatice	3	304
DUBINĂ, D., Formularea generalizată a metodei elementelor finite	4	350
DUMITRACHE, AL., v. DUMITRESCU, H.	2	129
DUMITRESCU, H., GEORGESCU, ADELINA, DUMITRACHE, AL., Proiectarea aerodinamică a elicei de randament maxim	2	129
ENE, GH., BRATU, P., Determinarea traiectoriei granulei individuale pe sita cu mișcare de ruliu	1	46
ENE, GH., IATAN, R., Unele aspecte privind dinamica ciururilor cu mișcare de ruliu	3	294
ENE, GH., RENERT, M., Asupra comportării stratului de material granular supus cernerii pe sita ciururilor cu mișcare de ruliu	5	490
ERHAN, M., v. SETEANU, I.	6	538

	Nr.	Pag.
GĂVAN, M., v. BLUMENFELD, M.	5	507
GEORGESCU, ADELINA, v. DUMITRESCU, H.	2	129
GRIGORE, N., ANGHEL, AL., POSEA, N., Calculul la fluaj al sistemelor de conducte. II.	4	336
GRIGORE, N., v. POSEA, N.	2	142
IACOB, C., Asupra tensorului de inerție al unui sistem material	6	517
IATAN, R., v. ENE, GH.	3	294
IVAN, G., v. REDLOV, T.G.	3	267
JELER, V., JELEV, I., Mișcarea nepermanentă mixată a apei în galeriile și conductele uzinelor hidroelectrice și stațiilor de pompare	3	227
JELEV, I., v. JELER, V.	3	227
LUCA, IOANA, Implicații termodinamice și reversibilitate temporală în termoviscoelasticitatea liniară de tip integral	6	549
LUCA, IOANA, SOÓS, E., Termostatica fluidelor termoelastice. II. Potențiali termostatici	1	3
LUCA, IOANA, SOÓS, E., Termostatica fluidelor termoelastice. III. Stabilitatea echilibrului global	2	111
LUCA, IOANA, SOÓS, E., Restricții termodinamice în termoviscoelasticitatea liniară	3	217
LUCA, IOANA, SOOS, E., Proprietăți constitutive în termoviscoelasticitatea liniară. I. Compatibilitate cu termodinamica și cu termostatica	5	429
LUCA, IOANA, SOÓS, E., Proprietăți constitutive în termoviscoelasticitatea liniară. II. Reversibilitate ; simetrie ; întîrziere ;	6	528
MARCOV, N., Efecte de compresibilitate pentru o clasă de mișcări fluide	6	543
MLADINESCU, T., Contribuții la studiul frecării dintre flancurile dinților angrenajelor cilindrice cu dantură dreaptă	4	372
MOROIANU, A., v. ȚOPA, N.	4	388
MUNTEANU, GH., Prelucrarea datelor înregistrate în zborurile de încercare ale avionului pentru estimarea poziției punctului neutru	1	54
MOȘU, N., Aflarea expresiei vitezei și accelerației liniare absolute pentru cazul general pe cale deductivă	6	579
MUȘAT, S. D., Două metode matriceale pentru stuxiul încovoierii grinzii continue pe reazeme elastice înclinate	3	279
NEDELCU, ȘT., v. DIMOFTE, FL.	1	68
ONU, G., O soluție consistentă pentru calculul coloanelor pasive	1	36
PANDREA, N. I., Calculul geometric al transmisiei cu cuplaje tripoide. I.	2	168
PANDREA, N. I., Calculul geometric al transmisiei cu cuplaje tripoide. II	3	252
POPA, M., Studiul cîmpului de temperatură a mașinilor-unelte	2	197
POSEA, N., ANGHEL, AL., GRIGORE, N., Calculul la fluaj al sistemelor de conducte. I.	2	142
POSEA, N., V. GRIGORE, N.,	4	336
REDLOV, T. G., IVAN, G., Ecuații parametrice de stabilitate privind flambajul elastic al stîlpului format din n tronsoane prismatice coaxiale	3	267
RENERT, M.,O ENE, GH.,	5	490
SANDU, M. AL., v. ȘTEFĂNESCU, D.-M.	2	204
SETEANU, I., ERHAN, M., Contribuții noi la studiul mișcării laminare a fluidului viscos. II. Utilizarea transformării conforme pentru domenii bandă	6	538
SOARE, M., Asupra unei curbe funiculare în spațiu	1	102
SOBEC, M., v. BLUMENFELD M.	5	507
SOÓS, E., v. LUCA, IOANA	1	3
SOÓS, E., v. LUCA, IOANA	2	111
SOÓS, E., v. LUCA, IOANA	3	217
SOÓS, E., v. LUCA, IOANA	5	429
SOÓS, E., v. LUCA, IOANA	6	528
STAICU, ȘT., Forma matriceală a ecuațiilor de mișcare a sistemelor	4	325
STAICU, ȘT., Ciocnirea normală a sistemelor solide	5	446
STROE, I., Influența distribuției de masă și a armonicei gravitaționale I_5, asupra mișcării vehiculului spațial pe orbite ecuatoriale circulare	1	28

	Nr.	Pag.
STROE, I., Integrale prime ale ecuațiilor mișcării vehiculului spațial în prezența unui centru atractiv	5	485
ȘERBAN, GH., v. CĂPITANU, L.	1	83
ȘTEFĂNESCU, D.-M., SANDU, M. AL., Analiza stării de deformații a unui element axial-simetric cu pereți subțiri	2	204
TUDOR, A., ULAȘKIN, A. P., Câteva aspecte privind influența capilarității asupra ungerii suprafețelor plane rugoase cu viteze mici de alunecare	1	88
ȚEPOSU, I., Sarcinile aerodinamice pe organele avionului în cazul manevrelor longitudinale neliniare cu variații mici de altitudine și viteză. I.	5	454
ȚOPA, N., MOROIANU, A., BALAR, M., Calculul construcțiilor subterane la acțiuni seismice	4	388
ULAȘKIN, A. P., v. TUDOR, A.	1	88
ZECHERU, GH., Utilizarea rezultatelor încercării de încovoiere prin șoc pentru evaluarea tenacității la rupere K_{1C} a oțelurilor	4	404

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-dinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, Calea Victoriei nr. 125, 79717, sectorul 1.